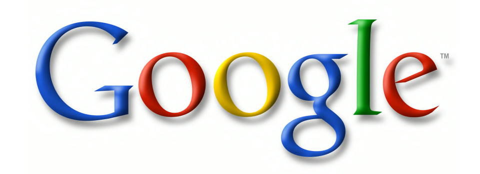
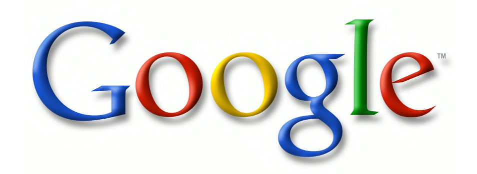
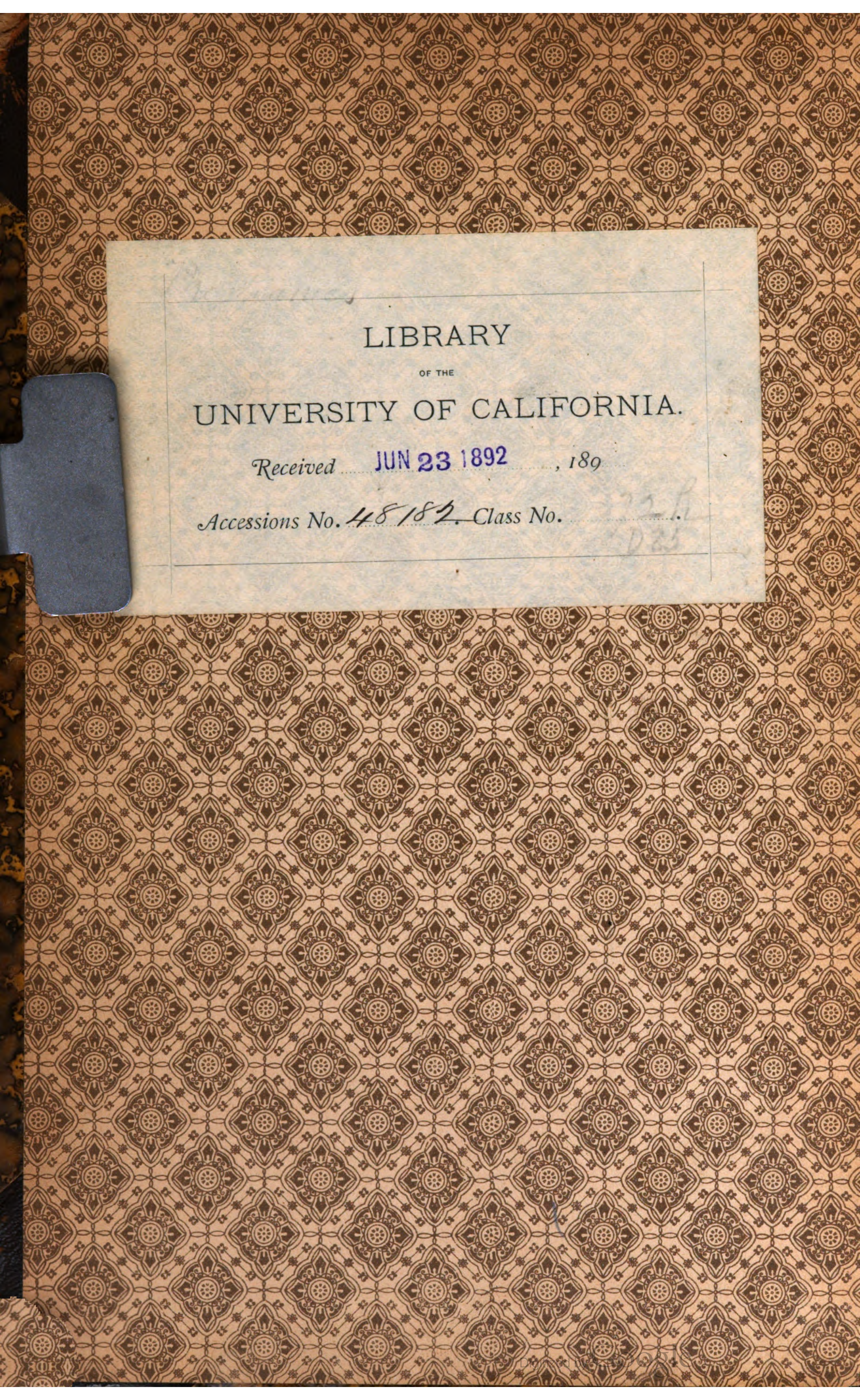








LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF CALIFORNIA.
Received JUN 23 1892, 189
Accessions No. 48182 Class No.



Kritische Geschichte

der allgemeinen

Principien der Mechanik.

Von der philosophischen Facultät der Universität Göttingen
mit dem
ersten Preise der Beneke-Stiftung
gekrönte Schrift.

Nebst

einer Anleitung zum Studium mathematischer Wissenschaften.

Von

Dr. E. Dühring.

Dritte,
wiederum erweiterte und theilweise umgearbeitete Auflage.



Leipzig,
Fues's Verlag (R. Reisland).
1887.



Vorrede.

Beschaffenheit und Sinn des Werks, welches hiemit in dritter wiederum verbesserter und erweiterter Auflage erscheint, werden durch die als Zubehör dieser Vorrede nachfolgend abgedruckten Belagstücke und Bemerkungen erst vollständiger verständlich. Freilich sind es zunächst äusserliche Nebenumstände, die hiedurch beleuchtet werden; aber eben um das Innerste und die tiefsten Grundlagen meines einschlägigen Arbeitens, welches der Preisausschreibung von 1869 Jahrzehnte vorangegangen war, gehörig zu würdigen, muss man wissen, wie wenig die äusserliche Aufgabenstellung, und was sich im Guten und Uebeln daran anschloss, die feste Haltung und den sichern Gang meiner Bestrebungen alterirt haben.

Die erste Auflage des vorliegenden Buchs erschien im September 1872 und war, abgesehen von blossen, zur Verkürzung nothwendigen Streichungen, einigen Kleinigkeiten und literarischen Nachträgen, der genaue wörtliche Abdruck des Manuscripts, wie es der Facultät vorgelegen hatte.

Der zweiten Auflage, welche Herbst 1876 erschien und erhebliche Verbesserungen brachte, war namentlich die Anleitung zum Studium der mathematischen Wissenschaft hinzugefügt, die der Leser auch in der vorliegenden dritten Auflage, jedoch mit derjenigen Anpassung wiederfindet, durch die sie besser als ergänzendes Seitenstück zu der Anleitung in den neuen mathematischen Grundmitteln dienen kann. Beide Anleitungen, die in dem mathematischen Fundamentalwerk und die hier der geschichtlichen Mechanikexposition angeschlossene, bilden nunmehr ein Zusammen sich wechselseitig ergänzender und erweiternder Arbeiten,

deren jede aber auch als etwas relativ Selbständiges schon für sich allein zur Belehrung und Wissensreform wohl Wege genug anzeigt. Veranlasst war ursprünglich die Anleitung durch allerlei Einzelanfragen über das Studium, die von Lesern der ersten Auflage an mich gerichtet wurden. Derartigen Bedürfnissen für später nach Möglichkeit im Allgemeinen entgegenkommen, hiess beide Theile, die Anfrager und den Befragten, der Specialbemühungen entledigen.

Die fragliche zweite Auflage musste zum Sommer des nächstfolgenden Jahres, also länger als ein Semester nach ihrem Erscheinen (da im gesammten Bereich meiner Schriften und in meinem Verhalten an der Universität zum Leidwesen meiner Neider Zweckdienlicheres nicht aufzufinden war), für die Berliner Universitätsprofessoren den Anknüpfungspunkt zur Wegnahme meines statutengemäss unwiderruflichen Privatdocentenrechtes abgeben. Eine Entfernung von dieser unbesoldeten und gewöhnlichermaassen bedeutungslosen, von mir aber vierzehn Jahre lang nur allzu erfolgreich innegehabten Lehrlicenz durfte selbst nach Maassgabe der veralteten Statuten nur auf Grund einer schweren Anstössigkeit im Verhalten des Docenten beantragt werden. Komischerweise musste dazu aber als entscheidend eine Stelle herhalten, die auch schon in der ersten Auflage dieses Buchs, also fast ein halbes Jahrzehnt früher, im Hauptpunkt wörtlich ebenso gestanden, und die obenein diesen Hauptpunkt mit aller erdenklichen Zurückhaltung nur in seiner reinen und handgreiflichen Thatsächlichkeit ausgesprochen hatte, wie man es des Näheren in Nr. 177 der vorliegenden Auflage bemerkt findet. Um eine Anstössigkeit handelte es sich allerdings; aber sie war nicht auf meiner Seite, sondern lag in der angeführten Thatsache selbst, welche ein Stück Material zum Verhalten der Literatur und der Gelehrten gegenüber Robert Mayer und seiner Entdeckung enthielt. Als mehr denn Anstössigkeit, nämlich als ein Seitenstück und eine gesteigerte Consequenz zu den gegen Robert Mayer direct oder indirect geübten Gelehrtenthaten, ist nun aber von vielen Unbefangenen das Verfahren gegen mich erkannt und gewürdigt worden, so dass ich wegen des Urtheils darüber nicht erst auf eine Nachwelt und deren Nachrichter zu warten brauche.

Was das Verhältniss dieser Arbeit zu Vorgängern anbetrifft, so kamen einzig und allein die einigen Bogen in Frage, auf denen Lagrange in seiner Analytischen Mechanik geschichtliche Skizzen der Principienentwicklung geliefert hatte. Von diesen und Lagranges sonstigen Bemerkungen konnte ich Manches als Leitfaden für tiefere und schärfere Untersuchungen benutzen; vom 19. Jahrhundert an fielen aber auch solche erste einführende und gute Fingerzeige fort. Jedoch habe ich nicht erst hier unmittelbar nach den Thatsachen gearbeitet, sondern bin auch für alles Frühere so verfahren, als wenn jener grösste Analytiker in jedem Punkte eine besorgliche Controle erfordert hätte, während sich mir hinterher allerdings seine Anführungen und Urtheile, abgesehen von vereinzelten Ausnahmen, als vorzüglich zutreffend erwiesen haben. Allerdings hatte Lagrange im Allgemeinen so wenig wie Jemand vor ihm oder nach ihm einen zureichenden Begriff von den letzten Zerlegungen und einfachsten Bestandtheilen zusammengesetzter Wahrheiten und Thatsachen.

So ist denn auch die folgende Arbeit die erste eingehende ihrer Art und durch die neuen kritischen Mittel überhaupt die erste tiefer eindringende gewesen. Sie ist dies auch bisher geblieben und wird es auch, soweit sich bis jetzt absehen lässt, bleiben. Universitär angestiftete Nachgängereien haben sich freilich in Form bestellter Buchhändlerartikel auf den Markt gedrängt, theils unter ähnlichen Titeln, theils mit physikgeschichtlichen Aushängeschildern; aber schon bei der geringsten Notiznahme wird man an derartigen Machwerken den sudlerisch compilatorischen Charakter, den Mangel jeder ernsten wissenschaftlichen Bestrebung und die Mache für äusserliche Zwecke des heutigen Coterie- und Soldgelehrtenthums nicht verkennen. Selbst bessere Erscheinungen als solche Literaturfliegen sind, weil sie doch noch viel zu tief standen, für frühere Zeitalter in meinem Buch nicht erwähnt worden; wie sollte jenes zeitgenössische Summen niedrigster Sorte hier eine, auch nur bis zu einzelnen Namhaftmachungen hinabsteigende Beachtung finden!

Nunmehr steht die vorliegende Arbeit im Zusammenhange einer von uns theils erweiterten theils umgeschaffenen Mathematik und entsprechender physikalischer und chemischer Entdeckungen

und Fortschritte. In Vergleichung hiezu hat das Preisurtheil, welches dieselbe Universität, auf der es ein günstiger Zufall hat entstehen lassen, nach Erbrechung des meinen Namen enthaltenden Couverts, in der Mehrzahl ihrer Glieder im Stillen verwünscht hat, nur noch die nebensächliche geschichtliche Bedeutung eines Stückchens unbewusster sachlicher Gerechtigkeit wider Willen und Interesse. Ueber die nachträglichen Illustrationen dieser im Grunde antiuniversitären Gerechtigkeit, die, wenn auch wohl nicht vom Standpunkt des einzelnen Hauptbeurtheilers, so doch von dem des Körperschaftsgeistes und zugehörigen Gelehrtenstandes unabsichtlich war und durch entgegengesetzte, bis heute fortgesetzte Machinationen nicht unschädlich gemacht werden konnte, — über diese komischen Illustrationen mit der possirlichen Aufgabe, das Geschehene nach Kräften ungeschehen zu machen, sehe man unsere nachherigen Erläuterungen zu den Belagstücken.

Der Zufall hat es mitsichgebracht, dass die Veröffentlichung dieser Auflage mit der Zeitspanne zusammentrifft, in der nach den Anfängen meines literarischen Wirkens für die Wissenschaft 25 Jahre solcher und ähnlicher Thätigkeit, überhaupt aber des Eintretens und Arbeitens für Freiheit, Vermehrung und Reform der Wissenschaft, sowie ihrer Consequenzen für die Lebensveredlung voll geworden sind. Die Adresskundgebungen zu diesem Jahreabschnitt sind nicht bei Hunderten geblieben. Nicht aber blos zahlreich, sondern auch ansehnlich sind die Unterschriften gewesen. Obwohl man ungeziemend sich zur Unterschrift Drängende, wo man sie als unecht oder halb erkannte, gradezu ausgeschlossen hat, ist es dennoch zu einer Betheiligung von Tausenden gekommen. Aus den mehreren Arten von Publicum meiner verschieden verzweigten Schriften hat sich der vielstimmige, aber im Grundton einheitliche Widerhall zusammengesetzt, den meine theoretischen und praktischen Bestrebungen gefunden. Ein nicht bedeutungsloser Theil hievon, vielfach ausgehend von Männern in entsprechenden Lehrstellungen oder technischen Functionen, hat zugleich speciell dem mathematisch naturwissenschaftlichen Gebiet meiner Arbeiten und meiner Kämpfe gegolten, — ich sage zugleich; denn er war ebenfalls mit dem Eintreten für den sonstigen, namentlich den volks- und völkerwissenschaftlichen Schriftsteller

und den für die Umschaffung der Zustände ideell thätigen Mann verbunden.

Nach Alledem ist keine Besorgniss am Platze, ich will nicht sagen, dass sich die von mir vertretene Sache keine Bahn bräche; denn darum bin ich für mein Theil noch nie bekümmert gewesen; — sondern dass die gemachte Bahn sich nicht bald erweitern und dass bei dem Fortschreiten Zeitabschnitte in Rechnung kommen möchten, für die sich unter den Menschen nur die sehr entschieden weiter Denkenden und Strebenden interessiren.

Nun noch ein paar Aeusserlichkeiten! Der Abdruck des Verzeichnisses meiner Schriften am Ende des Buchs ist insofern auch ein Bestandtheil desselben, als er bei den im Verlauf des Werks vorkommenden Anführungen die Umständlichkeiten vollständiger Titelangaben einfürallemal erspart. — Der in andern Vorreden von mir geübten und begründeten Gewohnheit gemäss ist auch diese in jedem Exemplar mit Federunterzeichnung versehen.

Zehlendorf bei Berlin, im Mai 1887.

E. Dühring

Hauptpunkte äusserer Vor- und Nachgeschichte der folgenden Arbeit.

Im April 1869 wurde zum ersten Mal auf Grund einer Beneke-Stiftung, auf welche unsere unten folgende Erläuterung einiges Licht wirft, von der philosophischen Facultät der Universität Göttingen eine Preisaufgabe gestellt und zwar durch nachstehendes Ausschreiben:

> „Die Facultät wünscht eine Kritische Geschichte der allgemeinen Principien der Mechanik. Sie bezeichnet die Zeit Galileis als den geeigneten Anfangspunkt der Darstellung und erwartet nur einleitungsweise die Leistungen der antiken Mathematik und Mechanik, nicht die Theorien der speculativen Philosophie des Alterthums, in der zum Verständniss nöthigen Ausdehnung erörtert zu sehen.
>
> Die geschichtliche Seite der Arbeit würde zu zeigen haben, wann, von wem und auf Veranlassung welcher bestimmten Aufgabe jedes einzelne der wesentlichen Principien der Mechanik zuerst aufgefunden und ausgesprochen, wann, durch wen und auf Veranlassung welcher andern bestimmten Bedürfnisse oder Untersuchungen der ursprüngliche Ausdruck der Theoreme verändert, berichtigt oder früher vereinzelte zu einem allgemeineren Princip zusammengezogen worden sind. Hiebei verlangt die Facultät zwar kein weitläufiges Eingehen auf die verschiedenen Anwendungen der Principien, legt jedoch Werth auf die Erwähnung der Originalbeispiele, an denen ihre jedesmalige Fassung zuerst erprobt worden ist.
>
> Die kritische Seite der Arbeit, deren äusserliche Trennung von der historischen oder völlige Verschmelzung mit dieser dem

Geschmack und Ermessen der Bearbeiter überlassen bleibt, würde zu zeigen haben, wieviel an jedem dieser mechanischen Principien nur ein selbstverständlicher logischer Grundsatz, wieviel die zum Gebrauche nothwendige mathematische Formulirung eines solchen Grundsatzes, wieviel dagegen Ausdruck einer allgemein gültig befundenen Erfahrungsthatsache, wieviel endlich nur eine durch den bisherigen Umfang der Erfahrungserkenntniss wahrscheinlich gemachte Annahme ist.

Die Facultät erwartet, dass im geschichtlichen und im kritischen Theil nicht ausschliesslich die Arbeiten der Mathematiker und Physiker, sondern auch der nützliche und schädliche Einfluss der innerhalb des zu schildernden Zeitraums aufgetretenen philosophischen Theorien berücksichtigt werde. Um aber den Umfang der Aufgabe zu ermässigen, verzichtet die Facultät auf Berücksichtigung der eigentlich physischen Theorien und Hypothesen über die Constitution der wirklichen Körper und die Natur der wirklichen Ereignisse sowie auf die Erörterung der chemischen Processe, des organischen und des psychischen Lebens; sie überlässt dem Bearbeiter, anhangsweise die Richtungen anzugeben, nach denen bisher die allgemeinen mechanischen Principien Eingang in diese Gebiete gefunden haben. Sie wünscht dagegen die Darstellung soweit fortgeführt, dass sie die neuen Vorstellungsweisen noch einschliesst, welche über den Begriff von Naturkräften, über ihre Wirkungsweisen und den Uebergang ihrer Wirkungsformen in einander sich hauptsächlich an die Untersuchungen über das mechanische Aequivalent der Wärme geknüpft haben."

In der öffentlichen Facultätssitzung vom 11. März 1872 wurde über die fünf eingegangenen Arbeiten berichtet. Das die vorliegende Schrift betreffende Urtheil (veröffentlicht in den Nachrichten d. Königl. Ges. d. Wissenschaften zu Göttingen, Nr. 8, v. 13. März 1872) lautet vollständig:

„Die fünfte Arbeit mit dem Spruche: S'il y a quelque chose u. s. w. hat der Facultät durch 586 enggeschriebene Folioseiten eine grosse aber angenehm lohnende Mühe verursacht. Sie erregt schon durch ihr ausführliches Inhaltsverzeichniss die Hoffnung, in ihr wirklich alle die Fragen sorgfältig berücksichtigt zu finden, welche das Programm der Facultät der Beachtung der Bearbeiter empfohlen hatte. Die Ausführung bestätigt diese Hoffnung in

höchst erfreulicher Weise. Mit vollständigster und freister Beherrschung der Sache und erstaunlicher Ausdehnung genauster literarischer Kenntnisse sind nicht nur alle wesentlichen Punkte erörtert, sondern eine grosse Anzahl kleinerer Discussionen, welche die Facultät nicht für unerlässlich gehalten hätte, aber mit Dank anerkennt, da sie überall dem volleren Verständniss des Gegenstandes dienen, bezeugen zugleich die grosse Liebe und die Umsicht, mit welcher der Verfasser sich in seine Aufgabe vertieft hat. Dem ausserordentlichen so aufgehäuften Stoffe entspricht die Fähigkeit zu seiner Bewältigung. Der Verfasser hat Darstellung und Kritik nicht getrennt, sondern folgt, beide vereinigend, dem Verlauf der für die Mechanik sich unterscheidenden Epochen; durch feines Gefühl für klare Vertheilung der Massen ist es ihm gelungen, zugleich auf die ganze geistige Signatur der Zeitalter, auf den wissenschaftlichen Charakter der leitenden Persönlichkeiten und auf die fortschreitende Entwicklung der einzelnen Principien und Lehrsätze ganz das belehrende geschichtliche Licht fallen zu lassen, welches die Facultät vor allem gewünscht hatte. Auch keine der besondern Forderungen, welche das Programm der Aufgabe ausgesprochen hatte, ist unbeachtet geblieben. Die ursprünglichen Aufgaben, an deren Behandlung jedes neue Princip oder Theorem entstand, sind überall mit vollendeter Anschaulichkeit reproducirt und die allmälige Umformung, die jedes erfahren hat, durch alle Zwischenglieder sorgfältig verfolgt. Die Berührungen der mechanischen Gedanken mit der philosophischen Speculation sind nirgend vermieden; sie sind nicht nur in eignen Abschnitten entwickelt, sondern der feine philosophische Instinct, der den Verfasser auch auf diesem Boden leitet, ist ebenso deutlich in einer grossen Anzahl aufklärender allgemeiner Bemerkungen sichtbar, welche an schicklichen Stellen in die Darstellung der mechanischen Untersuchungen verflochten sind. Den angenehmen Eindruck des Ganzen vollendet eine sehr einfache aber an glücklichen Wendungen reiche Schreibart, die warme Anerkennung jedes Verdienstes, die erklärende Entschuldigung des Misslungenen und die vornehme Schonung, mit der über das Verkehrte hinweggegangen wird. Nur ein Bedenken hegt die Facultät. Der Verfasser ist sehr ausführlich in Wiederholungen früher dargestellter Sätze und in Rückverweisungen auf sie; denkt man sich die vorliegende Arbeit als eine Reihe von

Vorträgen, so erscheinen diese Recapitulationen als gut berechnete Mittel einer ausgezeichneten Lehrbegabung; auch werden sie im übersichtlichen Druck den Leser nicht ebenso aufhalten als bei der Durchsicht der Handschrift. Gleichwohl bleibt der Erwägung werth, ob nicht eine grössere Einschränkung hierin wenigstens in der letzten Hälfte der Schrift sich empföhle, wo einestheils ohnehin die Natur der Sache zu häufigen Reproductionen derselben Gedanken unter verschiedenen Formen zwingt, anderntheils Alles, was der Verfasser beachtet wünscht, als durch das Frühere bereits hinlänglich eingeschärft gelten kann. Anderes hat die Facultät nicht zu erwähnen; voll Befriedigung, sich als die Veranlasserin dieser schönen Leistung zu wissen, durch welche ihre Aufgabe vollständig gelöst und viele Nebenerwartungcn übertroffen sind, zögert sie nicht, dem Verfasser den ersten Preis hiedurch öffentlich zuzuerkennen."

Die Stiftung, welche mit der vorliegenden Arbeit inaugurirt worden ist, ging testamentarisch von dem 1864 verstorbenen Consistorialrath C. G. Beneke aus und sollte dem Andenken seines Bruders F. E. Beneke und dessen philosophischen Bestrebungen gewidmet sein. Die Göttinger philosophische Facultät, welche von dem Magistrat der Stadt Berlin, dem Curator der Stiftung, die Betrauung mit der jährlichen Ausschreibung der Preise übernahm, that dies jedoch nur unter der Bedingung, dass sie die Themata aus dem Umkreis aller derjenigen Wissenschaften wählen dürfte, welche sich in der philosophischen Facultät vereinigt fänden. Hienach kann es nicht überraschen, dass diese erste Preisausschreibung wesentlich die angewandte Mathematik, also ein ganz positives Gebiet zum Gegenstande gehabt hat. Was die Schicksale F. E. Benekes betrifft, dem zu Ehren und in dessen Sinn der Stifter seine Anordnung getroffen hatte, so war jener schon 1822 als Privatdocent der Philosophie von der Berliner Universität auf Betrieb des damaligen Hauptprofessors der Philosophie Hegel wegen angeblichen Materialismus durch den liberalistelnden Minister Altenstein removirt worden. Nach einer Anzahl Jahre wieder rehabilitirt und später nach des genannten Professors Tode wenigstens zu einer ausserordentlichen Professur befördert, gelangte er doch schliesslich zu keinem ordentlichen Amt innerhalb der Facultät, obwohl seine Thätigkeit an der Universität und in der Literatur für einen derartigen geringfügigen Anspruch mehr als zureichend gewesen und seine

philosophischen Arbeiten den sehr untergeordneten gleichzeitiger ordentlicher Professoren, namentlich denen eines damaligen, jetzt längst verschollenen Berliner Hauptprofessors und spätern Tonangebers der Facultät, Namens Trendelenburg, noch gewaltig überlegen geblieben waren. Beneke scheint nun gegen das von ihm nicht recht durchschaute Universitätstreiben nicht gleichgültig genug gewesen zu sein und verschwand 1854 in seinem 57. Lebensjahre. Sein Leichnam wurde in einem bei Berlin belegenen Wasser aufgefunden.

Das seltsame Missgeschick der Berliner Universität mit Privatdocenten von Ruf steht übrigens nicht vereinzelt da. Einige zwanzig Jahre vor dem Benekeschen Fall hatte Schopenhauer ihr nach zehnjähriger Privatdocentenschaft den Rücken gekehrt, aber freilich nicht um ins Wasser, sondern um mit der Universitätsphilosophie ein wenig ins Gericht zu gehen. Zwei Jahrzehnte nach dem Benekeschen Todesfall (1875) beschäftigte sich die Universität angelegentlich mit der, für diesmal freilich noch nicht von Statten gegangenen Remotion des Verfassers dieser Schrift, um dann erst bei einem zweiten Anlauf (1877) damit zu reüssiren. Letzteres freilich nicht zu ihrer weitern Erbauung, da sich dabei ein Sturm erhob, von einer Art, wie ihn die Universitäten gegen sich noch nicht erlebt hatten! Näheres über diesen unerwarteten Hergang findet man im Cap. 8 meiner, das allgemeine Programm meiner Bestrebungen darlegenden Schrift „Sache, Leben und Feinde“, wo dieses gegen meine Sache ausgespielte Universitätsstückchen zwar im Verhältniss zum umfassenden Gegenstande des Buchs nur kurz beleuchtet werden konnte, aber zur Bloslegung heutiger Gelehrtenbeschaffenheit zureichend gekennzeichnet worden ist.

Komischerweise flocht sich in die Vorbereitungen der auf meine Entfernung abzielenden Manöver auch öffentlich ein mithelfendes Schrittchen derselben Göttinger Facultät ein, unter deren Firma das im oben abgedruckten Urtheil enthaltene, seltene Lob fünf Jahre vorher zur Welt gekommen war. Dieses Episödchen ist Neue Grundgesetze I, Cap. 4 Nr. 6 näher erwähnt; hier aber müssen wenigstens die eigne Göttinger Kundgebung und billigerweise auch meine damalige Antwort darauf platzfinden. Die Erklärung der Göttinger Facultät, die in verschiedenen Blättern amtlich veröffentlicht wurde, lautete:

> „Herr Dr. Dühring hat seine Geschichte der Principien der Mechanik, welcher wir den Preis der Benekestiftung zuerkannt hatten, in zweiter Ausgabe veröffentlicht. Auf die Vorreden

beider Ausgaben und auf die theils eingeschalteten theils angefügten Zusätze der zweiten hat unser Urtheil, welches auch dieser zweiten Ausgabe vorgedruckt ist, keine Beziehung. Göttingen, den 28. Februar 1877. Der Decan etc."

In einem der Blätter, dem „Literarischen Centralblatt" erwiderte ich folgendermaassen:

„In einer mir erst jetzt zu Gesicht gekommenen Annonce vom 17. März c. im „Lit. Centralblatt" unterstellt mir die Göttinger philosophische Facultät, in der zweiten Auflage meiner „Geschichte der Principien der Mechanik" durch Abdruck des lobpreisenden Facultätsurtheils eine Verantwortlichkeit der Facultät für die Vermehrungen und umgearbeiteten Theile in Anspruch genommen zu haben. Nun ist das Urtheil einfach historisch der ersten Entstehungsgeschichte des Buches einverleibt, also der Facultät die Ehre einer solchen Verantwortlichkeit nie zugemuthet. Bezüglich des Ganzen verzichte ich aber auch gern auf die Verantwortlichkeit der Facultät. In der Augsb. A. Ztg. ist es ja einem meiner Gegner, der sich eine kleine Geistreichelei nicht verhalten konnte, gelegentlich entschlüpft, dass es, wie einst der Akademie von Dijon mit Rousseau, so der Universität Göttingen mit mir ergangen sei, nämlich eine Klaue zu prämiiren, ohne den zugehörigen Löwen zu kennen. Auch ich habe von vornherein gewusst, dass das ungewöhnliche Lob nicht meiner Person galt, was den Werth der Arbeit wohl ebensowenig mindern wird, als der jetzige Versuch einer Art von Zurücknahme, zumal ja vor dieser Zurücknahme der Hauptbeurtheiler, der alte solide Physiker W. Weber, bereits Göttingen verlassen hatte. Berlin, im Mai 1877. E. Dühring."

Was Herrn Wilhelm Weber anbetrifft, so ist er ein Stück in die achtziger Lebensjahre hineingelangt und auch ältestes Mitglied der ausser der physikalischen noch bestehenden mathematischen Classe der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften. Ich habe es hier aber mit der Firma einer Facultät zu thun, innerhalb deren auch die Epigonen und Neulinge, namentlich die von hebräischer Art, inzwischen mit dem Amtiren und Hantiren immer mehr in den Vordergrund getreten sind. In meinem Buch war es nicht blos selbstverständlich sondern auch handgreiflich, dass sich das mitgetheilte Urtheil nicht auf das beziehen konnte und sollte, wodurch sich die zweite Auflage von der ersten unterschied. Das Gegentheil voraussetzen lassen, hiess einen

nicht vorhandenen Sachverhalt zum Anknüpfungspunkt einer Kundgebung gegen mich machen, nach der die Sehnsucht freilich nur zu verständlich geworden ist. Wenn ich demgegenüber, wie oben ersichtlich, 1877 und noch als Docent auf die Verantwortlichkeit der Facultät für das Ganze, also auch für den Stamm und kurzweg für das Werk, insofern es wörtlich beibehalten, verzichtet habe, so muss ich jetzt noch etwas hinzufügen. Ich habe nämlich mit dem Abdruck des Urtheils auch meinerseits keine Verantwortlichkeit dafür übernommen, dass dieses in allen Punkten zutreffend sei. Mich hat die darin enthaltene seltene Lobpreisung von Anfang an nicht so eingenommen, um mich über die ihm anhaftenden Mängel hinwegsehen zu lassen, — obwohl jenes Lob mir auch solche Eigenschaften bezüglich Forschung, Darstellung, ja auch Lehrbegabung zuschrieb, die sich nicht auf das vorliegende Werk beschränken konnten, sondern den wissenschaftlichen Charakter der Person unwillkürlich mitkennzeichneten.

Auch das Publicum würde meine Arbeit und mich nicht völlig zutreffend würdigen, wollte es sich in jeglichem Punkte nach jenem Urtheil richten. Wenn beispielsweise von dem feinen philosophischen Instinct die Rede ist, der den Verfasser auch auf dem Boden geleitet habe, wo sich die mechanischen Gedanken mit der philosophischen Speculation berühren, so macht das in dem mathematischen und naturwissenschaftlichen Fachmann nebenbei anerkannte Etwas von feinem (aber doch blossem) Instinct für philosophische Dinge wohl mehr als blos ein feines Lächeln rege. Die Lachmuskeln sind aber noch schwerer innerhalb eines edlen Maasses zu halten, wenn man bedenkt, dass jene Witterung von philosophischem Instinct auf Rechnung eines Herrn Lotze, eines damaligen Philosophieprofessors zu setzen ist und noch dazu eines solchen, der vermöge seiner Rückläufigkeit und seiner Charakterhaltung ein Feind des Verfassers sein musste und sich auch als solcher, und zwar obenein als versteckter, vorher und nachher bethätigt hat. In diesem Falle war er ahnungslos dazu gekommen, zu dem mathematisch physikalischen Urtheilskern des Herrn Wilhelm Weber, von dem er sachlich nichts verstand, etwas stilistische Redaction und ein paar Bemerkungskörnchen von seiner eignen Tenne mit beizutragen.

Wenn von der vornehmen Schonung die Rede ist, mit welcher ich über das Verkehrte hinweggegangen sein soll, so ist dies ein mir etwas zweifelhaftes Lob und das Verdienst meinerseits ein unschuldiges. Soviel als möglich persönliche Schonung mit sachlicher Schärfe ver-

einbar zu machen, ist jederzeit bei allem meinem Arbeiten mein Bestreben gewesen und ist es, trotz aller übeln Erfahrungen mit meinem guten Willen, auch noch heute. Auch erkläre ich die Verkehrtheiten lieber, als dass ich sie geisselte. Jene Vornehmheit im Hinweggehen kann aber höchstens im gröbern Sinne als Schonung gelten; im feinern ist sie eher das Gegentheil. Auch kann in der Kritik Schonung unter Umständen eine Pflichtwidrigkeit sein. Wie sollte man denn sonst jene Anerkennung jedes Verdienstes, die in demselben Satz selber anerkannt wird, und die Gerechtigkeit für ein Verdienst mit der Schonung gegen das Unverdienst vereinigen, durch welches das Verdienst (z. B. auch das R. Mayers) geflissentlich verkannt oder gar bestohlen worden! Ueberhaupt wäre Schonung gegen geistige Missgestalt, zumal wenn letztere obenein aufdringlich und anmaassend auftritt, oder gar gegen das wissenschaftliche Verbrechen, selber ein Vergehen. Sie wäre eine Verletzung des andern Theils und überdies ein Verrath des allgemeinen Interesse an öffentlicher Gerechtigkeit. In dem Maasse, als sich das Verkehrte breitgemacht und, wie beispielsweise auch die Gausserei, den Appell an Büttel und Polizei mitgeschürt hat, um sich meiner sachlichen Kritik auf den Universitäten zu entledigen, habe auch ich die geistige Sonde tiefer eingelegt und die Diagnose des Uebels ungenirt in exact angemessenen Grössenbestimmungen formulirt.

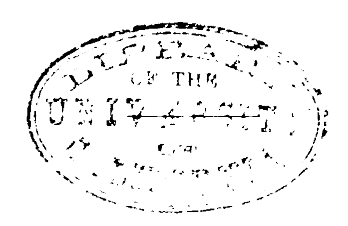
Zur Nachgeschichte und zum Nachurtheil sei übrigens noch darauf hingewiesen, dass, wenn ich bezüglich dieser Preisarbeit dem Spiele des Zufalls in der Facultät (nicht ihrer guten Absicht) etwas verdanke, die Facultät demjenigen Zufall, der ihr in Gestalt meiner Arbeit widerfahren, und meinem redlichen Bemühen auch etwas zu verdanken hat. Obwohl sie nämlich seit 1869 bisher jedes Jahr eine Aufgabe gestellt und ihr dazu alle ihre positiven Wissensgebiete zur Verfügung standen, so hat sie doch nur das erste Mal, wo sie ausnahmsweise modern zweckmässig verfahren, dazu auch das voll entsprechende Glück gehabt. Es gingen ihr auf jene Ausschreibung einschliesslich der meinigen fünf Arbeiten ein, was in solchem positiven Specialgebiet schon eine starke Concurrenz ist. Darunter war sogar noch eine, die sie des zweiten niedrigen Preises für werth erachtete. Wie hat sich aber nachher das Bild geändert! Meistens sind gar keine Arbeiten eingegangen; ein paar Male kam etwas, was nur einen zweiten Preis erhielt, weil es für den ersten nicht genügend war, und was sonst noch einmal vereinzelt zur Krönung gelangte, war bedeutungslos. Sogar

auf mehrfache Wiederholungen derselben Aufgabe liefen keine Arbeiten ein. Die weitern Früchte der Benekestiftung lieferten also so gut wie nichts. Das Missgeschick oder vielmehr Ungeschick lag in erster Linie in der Wahl der Aufgaben und gelegentlich auch wohl noch überdies in den Ansprüchen. Wenn hienach die Benekestiftung und die Thätigkeit der Göttinger an ihr eine Art Geschichte hat, so wird dieser Umstand wohl von jedem Kenner und unparteiischen Beurtheiler der Verhältnisse auf meine Arbeit zurückgeführt werden müssen.

In meinem Buch ist, wie in meinen andern Wissensgeschichten, nicht blos an der Geschichtsschreibung sondern auch an der Geschichte der Sache gearbeitet. Auch ist dies nicht blos im Sinne jenes Ausspruchs von Lagrange geschehen, den ich für das nothwendige Motto der eingesendeten Arbeit als noch am ehesten passend ausgesucht hatte. Man vergleiche über ihn Nr. 135. Im Original lautet er: „S'il y a encore quelque chose à désirer dans la mécanique, c'est le rapprochement et la réunion des principes qui lui servent de base et peut-être même la démonstration rigoureuse et directe de ces principes.“ Dies war gegen die Wende des 18. Jahrhunderts gesagt und ein Jahrzehnt nach dem ersten Erscheinen der „Mécanique analytique“. Der grosse und, was mehr sagen will, ehrliche Mathematiker hat noch anderthalb Jahrzehnte fortgearbeitet und ist bis zuletzt immer wieder darauf zurückgekommen, für die ihm noch nicht klar genug gewordenen Ausgangspunkte volleres Licht zu schaffen. Jetzt ist jene analytische Mechanik, durch deren schönen Entwurf Lagrange eine Epoche markirte und ein neues Grundmittel darbot, ein Jahrhundert alt geworden. Jedoch ist in der Anerkennung und dem richtigen Verständniss dessen, was jenes Buch bot, namentlich auch bezüglich der allgemeinen Grundgleichung, die heutige Zeit noch hinter ihm zurück. Auch glaube ich mir den entscheidenden Antheil zurechnen zu dürfen, wenn bereits Anzeichen einer bessern Wendung hervortreten. Dennoch nehme man meine Theilnahme für das Hohe und Edle in den Eigenschaften Lagranges nicht etwa für eine Einordnung in die Grenzen seiner eignen Ziele und seiner Art und Weise. Grade und zu allererst in der reinen Mathematik mussten weitere Absteckungen platzgreifen und ein festerer Boden gewonnen werden. Hieran schliesst sich nun mit Sicherheit nicht blos eine Vertiefung und erweiterte Bethätigung, sondern auch eine vollständige Klärung alles Mechanischen.

Hätte ich daher den Aufgabentitel „Kritische Geschichte u. s. w.“

nicht bewahren wollen, so hätte der Buchinhalt sich auch dahin fassen lassen: Die allgemeinen Principien der Mechanik in kritischer Geschichte und als Entwicklungssystem mit eignen Vervollkommnungen u. s. w. An derjenigen Art von Vollendung, wie sie für einzelne Punkte noch weiter erstrebt werden kann, fehlt es freilich grade von meinem eignen, das letzte Ideal in Sicht bringenden Standpunkt, noch hie und da. Auch trage ich überhaupt für die gesammte Mathematik und deren Anwendungen noch eine abstractere und höhere Fassung im Sinne. Allein was hier noch übrigbleibt und von meinem Sohn oder mir sowohl zur Vollendung des Systems als auch zur Bereicherung des Einzelwissens hinzuzufügen ist, würde sich durch den nun einmal fertigen Rahmen des vorliegenden Werks unpassend umschränkt finden. Hier muss also das einfache Wort gelten: Jedes an seinem Ort und zu seiner Zeit, d. h. nicht als Nebenwerk eines Geschichtsberichts, sondern als selbständige historische, nämlich geschichtemachende Function.



Inhalt.

Zweiter Abschnitt.

Die Zeiten von Huyghens und Newton.

Dritter Abschnitt.

Die Zeit der allgemeinen Formulirungen und der analytischen Entwicklung bis auf Lagrange.

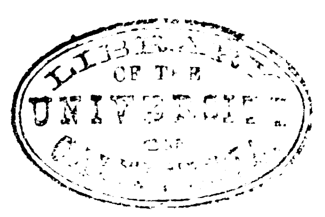
Bedingungsgleichungen in der Functionentheorie. Allgemeine Methode dieser Herleitung. 134. Vorzüge dieser letzten Beweisgestaltung. Stellung des virtuellen Princips in der Mechanik der Functionentheorie. Verhältniss zu Lagranges Behandlung der Zusammensetzung der Kräfte. 135. Fossombroni und Carnot über das virtuelle Princip. Die Carnotsche Vorstellung von einer rein geometrischen Verschiebung ohne dynamischen Effect. Lagranges Bemerkung über die Gültigkeit des Princips für endliche Differenzen. 136. Zusammenhang der Carnotschen Vorstellung mit den Ideen über die Rolle des Infinitesimalen. Unabhängigkeit des virtuellen Princips von der Beziehung auf die elementaren Verschiebungen und entsprechenden Hülfsgrössen. 137. Antike Strenge Lagranges in der Umwandlung der gewöhnlichen differentiellen Begriffe in Functionenbegriffe. Fundamentale Grundlage in der Begriffsfassung der Geschwindigkeit. Zwei Conceptionsarten. Zeitliche Bewegungstangirung. Zerlegung des wirklichen Bewegungselements in einen gleichförmigen Bestandtheil und ein veränderndes Element zweiter Ordnung. 138. Methode Lagranges, die differentiellen Begriffe umzugestalten. Unsere unmittelbare Rationalisirung des Unbeschränktkleinen. Doppelseitige, nicht hinkende Abkürzungen. Kritik des Ausweges von Lagrange. 139. Lagranges Gründe für die Beschränkung der Theorie auf Bewegungen, die den Quadraten der Zeit und keinen höheren Potenzen entsprechen. Nichtaufnahme der Distanzen in die principiellen Grundformen der Functionen. 140. Analytischer Uebergang von den Bewegungserscheinungen zur Berücksichtigung der Massen. Unexactheiten in der Vorstellungsart, die sich bei der Einführung des Massenfactors in die Gleichungen zeigen. 141. Analytischer Kraftbegriff und Bedeutung der Kraftsymbole für Statik und Dynamik. 142. Das virtuelle Princip in seinem allgemeinsten, auch für die Dynamik gültigen Sinne. Gestaltung der Verhältnisse für eine einzige Coordinatenaxe. Die unbestimmten, mit den abgeleiteten Functionen der Bedingungsgleichungen multiplicirten Kräfte. Das virtuelle Princip als Consequenz des Kraftbegriffs. 143. Aufstellung der allgemeinen statischen Grundgleichung in Lagranges Analytischer Mechanik. Kein blos symbolischer Sinn. Erinnerung an das Fadenschema. 144. Noch allgemeinere Form der statischen Grundgleichung, in welcher die Verbindungen und Bedingungsgleichungen durch die virtuellen Momente unbestimmter Kräfte ersetzt werden. Methode der unbestimmten Multiplicatoren. Vorstellung des Systems als wenn es ein freies wäre. 145. Gewinnung der dynamischen Grundgleichung aus der statischen Beziehung. Gemeinsames in jeder Kräftegleichung. Unabhängigkeit der analytischen Beziehung zwischen den blos absolut genommenen Kräften von den Vorstellungen des Gleichgewichts oder der Bewegung. Verschiedene Verfahrungsarten zur Vornahme und Auslegung der Reductionen auf Null und der Abtheilungen der Bestandtheile. 146. Sinn einer allgemeinen Kräftegleichung, die erst durch die Art der Interpretation statisch oder dynamisch wird. Gemeinsame Grundregel zur Bearbeitung dieser Gleichung und zur analytischen Einkleidung aller mechanischen Probleme in eine Anzahl Particulargleichungen. 147. Uebersicht der äussern Anordnung und des entsprechenden innern Zusammenhangs der allgemeinen Lehren in Lagranges Analytischer Mechanik. 148. Stellung der besondern

Vierter Abschnitt.

Das neunzehnte Jahrhundert.

Schluss.

Das Studium der mathematisch mechanischen Wissenschaften und die Lehren der Geschichte.



Einleitung.

Bedeutung des Gegenstandes und Verhältniss zum Alterthum.

1. Die Geschichte der Principien einer Wissenschaft enthält im kritischen Sinne mehr, als was man gewöhnlich von einer Geschichte der Wissenschaft, die sich kurzweg als solche bezeichnet, zu erwarten hat. Gäbe es also auch, was nicht der Fall ist, bereits ein die Geschichte der Mechanik behandelndes Werk, so würde dennoch, nach der üblichen, mehr oder minder compilatorischen Art des Ausfalls solcher Werke in benachbarten Gebieten, also etwa nach den vorhandenen Geschichten der Mathematik zu schliessen, eine Geschichte der principiellen wesentlichen Grundlagen, Fortschritte und Wendungen in kritischer Beziehung nicht wenig voraushaben müssen. Es ist schwieriger, System und Auswahl des Stoffes in die Behandlung der Geschichte zu bringen, als blos allerlei Thatsachen zu sammeln, nebeneinander zu stellen oder aneinander zu reihen. Im letzteren gemeinen Falle mögen die Materialien zusehen, wie sie sich miteinander vertragen, und der Leser mag sich selbst daran versuchen, die Mischung von ungehörigen Bestandtheilen zu säubern und nach kritischen Gesichtspunkten zu ordnen. Eine Principiengeschichte dagegen wird schon durch ihr Ziel darauf hingewiesen, nach klaren Sonderungen zu streben und das kleinste Detail wie die grössten schematischen Dimensionen des Wissens darauf anzusehen, in welchem Maasse beide zur Entwicklung beigetragen d. h. die wesentlichen Veränderungen und Bereicherungen des Wissensbestandes herbeigeführt haben.

In dem Sinne, in welchem wir hier die Principien der Mechanik verstehen, enthalten sie alles Wesentliche der Wissenschaft, und

ausser ihnen giebt es nur noch Detail von zweiter Ordnung. Diese Begrenzung gilt gleichmässig für das rein Mechanische wie für die mathematischen Hülfsmittel. Auch im Bereich der letzteren kann man die Angabe der einzelnen Wendungen verlangen, durch welche beispielsweise eine analytische Mechanik geschaffen worden ist, und einer detaillirten Nachweisung haben wir grade für diese Seite der Sache ganz besonders bedurft, um die Grundgestalt sichtbar zu machen, in welcher die rationelle Mechanik in neuster Zeit zu einer vornehmlich analytischen geworden ist. Die Lösung der Aufgabe vom Oscillationscentrum ist eine principielle Wendung von grosser Tragweite gewesen, und an diesem Beispiel mag man vorläufig ermessen, wie das Principielle im Werden der Wissenschaften zu verstehen sei. Die besonders markirten Einsichten, an die sich vieles Andere anknüpfen lässt, sind wahrhafte Principien und Anfänge, und es thut nichts, dass sie hinter sich bereits Voraussetzungen haben, wenn sie nur selbst auf dem wissenschaftlichen Wege gleichsam Stationen von eigenthümlichem Charakter vorstellen und so wenigstens relative Ausgangspunkte für neue Entwicklungsreihen werden.

2. Rein logisch verstanden, giebt es verschiedene Ordnungen von Principien. Die erste Ordnung derselben enthält die wirklichen Axiome oder diejenigen Sätze, welche wenigstens vorläufig die Rolle von Axiomen spielen. Alles Beweisen führt auf erste Selbstverständlichkeiten zurück, die der Ableitung nicht bedürftig und auch nicht zugänglich sind. Die Grundsätze der Geometrie sind die bekanntesten Beispiele dieser Gattung. Wissenschaften aber, die nicht blos Vorstellungen, wie Zahlen oder räumliche Gedankenconstructionen, bearbeiten, sondern die volle Wirklichkeit, also das Medium der physischen Körperlichkeit d. h. Materie und Kraft zum Gegenstande haben, beruhen als solche nicht auf selbstverständlichen Einsichten, sondern auf einfachen, nicht mehr weiter zerlegbaren Thatsachen der Natur. Die ersten Principien werden hier also aus dem Thatsachenmaterial, nicht aber aus blossem Gedankenstoff gewonnen. Nicht Grundschemata des Denkens, sondern Grundelemente des Naturverhaltens sind in den realen Wissenschaften die eigentlichen Axiome. Letztere werden aus den Mannichfaltigkeiten der Naturthätigkeit durch Beobachtung, experimentelle Zerlegung und schliessendes Denken ausgeschieden und so in ihrer Einfachheit sichtbar gemacht. Die Mechanik als Realwissenschaft hat demgemäss hier ihren prin-

cipiellen Boden, und alles Weitere an relativen Principien muss in ihr auf die Combination solcher ersten Thatsachenelemente zurückgeführt werden.

Der rationelle Charakter der Mechanik besteht in dem Verbinden der Thatsachen, nicht blos nach Ursache und Wirkung, sondern nach Grund und Folge. Der Mechanismus der Natur oder auch derjenige, welcher auf menschlicher Zusammensetzung der Theile beruht, wird nach Maassgabe bestimmter allgemeiner Wirkungsarten in seinen besondern Wirkungsergebnissen erkannt. Nicht Ursachen allein, sondern eingesehene Ursachen d. h. Realgründe sind hiezu erforderlich, und die Wissenschaftlichkeit der Mechanik an sich selbst sowie ihrer mannichfaltigen Anwendungen bemisst sich ganz und gar nach dem Grade des Verständnisses, welches für die allgemeinen Sachgründe der speciellen und zusammengesetzten Vorgänge erschlossen worden ist.

Eine solche Rationalität ist aber noch nicht vorhanden, solange die mechanische Praxis dem Gängelbande des unmittelbaren mehr instinctiven und meist auf den besondern Zweck beschränkten Urtheils ohne ein höheres, theoretisches Interesse folgt. Ein gewisses Maass praktischer Mechanik hat lange bestanden, ehe auch nur die einfachsten Wirkungsarten der Kräfte erklärt wurden. Schon aus den Bauten des ägyptischen und des indischen Alterthums lässt sich auf die Anwendung mechanischer Kunstmittel zur Fortschaffung bedeutender Lasten schliessen. Die griechische Ueberlieferung zeigt bereits mehr. Sie berichtet von der Anwendung sehr einfacher Vorrichtungen; aber sie bietet selbst zu Zeiten, in denen sich die mechanische Praxis künstlicher gestaltet hatte, keine Beläge, welche das Vorhandensein eines wissenschaftlichen Bewusstseins über mechanische Verhältnisse vor den Arbeiten des Archimedes in entscheidender Weise bekundeten. Allerdings kannte Aristoteles das Hebelprincip[1]; aber er wusste es nicht recht zu beweisen. Andere werden mehr gewusst haben, als er, der nicht einmal sonst, geschweige in mathematischer Beziehung auf der Höhe seiner Zeit stand. Aber fertige Ergebnisse und übliche wohlgesetzte Beweise hätten dem „Leser", wie er von Plato genannt wurde, in seiner Sammelgelehrsamkeit schwerlich entgehen können. Die Vorstellungen und Reflexionen der Fachleute oder exacteren mathematischen

[1]) Vergl. die ersten Entwicklungen seiner Quaestiones mechanicae.

Theoretiker sind sicherlich besser gewesen, als die Speculationen des Aristoteles; aber an markirten Resultaten werden sie eben auch nicht reicher gewesen sein.

3. Die Gestalt, in welcher sich uns das, was das Alterthum an wissenschaftlicher Mechanik aufzuweisen hat, in einer der genauern Prüfung zugänglichen und positiven Weise zeigt, sind die einschlagenden Schriften des Archimedes. Der eigenthümliche Charakterzug dieser scharfsinnigen Leistungen ist die Beschränkung auf blosse Statik und, was noch mehr sagt, auf rein statische Methoden. Von dem Schritt, durch welchen die statischen Verhältnisse gleich im Eingang der neuern Zeit auf eventuell mögliche Bewegungen zurückgeführt wurden, ist bei Archimedes keine Spur anzutreffen, und hieraus erklärt sich, warum die eigentlichen Principien der Mechanik im Alterthum noch keine Rolle spielen konnten. Die tiefer greifenden Principien müssen den Gleichgewichts- und den Bewegungsverhältnissen gemeinschaftlich sein. Sie setzen also wenigstens einen Anfang in der Dynamik voraus, und der Grund dieser neuen, völlig modernen Wissenschaft wurde erst durch Galilei gelegt.

Die antike, streng wissenschaftliche Statik, wie sie durch Archimedes repräsentirt ist, beschränkte sich wesentlich auf eine Lehre von den Schwerpunkten und auf eine Ausführung der Gewichts- und Stabilitätsverhältnisse eingetauchter und schwimmender Körper. Die sonstigen Kenntnisse des Archimedes, namentlich diejenigen über die verschiedenen mechanischen Potenzen, entziehen sich, wie fast das ganze übrige theoretisch mechanische Wissen des Alterthums, einer unmittelbaren Prüfung, da blosse Berichte und Spuren, aus denen sich auf die theoretische Beschäftigung mit den einzelnen mechanischen Vorrichtungen schliessen lässt, die Sache selbst nicht ersetzen können. Jedoch dienen sie häufig genug dazu, anzuzeigen, was man nicht wusste und nicht konnte. Ausserdem hat für die geschichtliche Entwicklung auch schon deshalb nur das urkundlich erhaltene Wissen einen Werth, weil dieses allein, nicht aber irgend eine unbestimmte Anführung die Anknüpfungspunkte für die modernen Bestrebungen abzugeben vermochte. Dieser Umstand macht es auch rathsam, die einschlagenden Einzelheiten erst an denjenigen Orten anzuführen, wo irgend eine Beziehung zu den Unternehmungen der Neuern dazu auffordert.

4. Der eben erwähnte Grund nöthigt uns auch, das bei

Archimedes principiell Bedeutende in aller erforderlichen Ausführlichkeit erst dann zu erörtern, wenn wir es im Eingange der neuern Zeit unter den Händen der modernen Forscher neue Wichtigkeit und gleichsam erst Leben gewinnen sehen. Was der Zufall von seinen Schriften übrig gelassen hat, war zunächst fast als ein caput mortuum zu betrachten; denn es überlieferte anstatt der Auffindungsmethoden nur ein Gerüst fertiger Sätze und solcher Beweise, welche mehr die Erzwingung der Anerkennung als die Entstehungsgründe der Einsichten im Auge hatten. Die neuere Zeit hat sich die Methoden erst selbst erfinden müssen, und wenn es auch keinem Zweifel unterliegen kann, dass sich Archimedes und die Alten bei der Aufsuchung der Wahrheiten gewisser natürlicher Methoden und Vorstellungsweisen bedienten, so haben sie dieselben doch niemals auseinanderzusetzen gehabt, weil ihr vorzüglichstes Augenmerk bei der Darstellung die Strenge einer zwingenden Beweisform blieb. In ihrer Geometrie ist die Exhaustionsmethode ein Beispiel für die Art, wie sie in ihren Beweisen die unmittelbar leitenden Vorstellungen absichtlich durch logische Umwege ersetzten, auf denen sie allein die formale Strenge des Raisonnements für jeden Fall zu wahren glaubten. Etwas Aehnliches muss noch weit entschiedener in der Mechanik stattgefunden haben, und dieser Umstand erklärt uns auch einigermaassen die Thatsache, dass die antiken Ueberlieferungen nicht durch ihr blosses urkundliches Vorhandensein zu wirken und die eignen schöpferischen Antriebe, an denen es im ganzen Mittelalter vollständig mangelte, nicht zu ersetzen vermochten. Die Anregungen, die von diesen Schriften im Eingange der neuern Zeit ausgegangen sind, waren nicht von der Art, wie sie auf passive Generationen zu wirken vermögen. Es war eine selbst schöpferisch strebende Zeit und der Geist überlegener wissenschaftlicher Charaktere, wodurch aus den Resten des Alterthums etwas über fertige Resultate Hinausreichendes gewonnen wurde.

In der That verdanken wir dem Alterthum in der Mechanik keine Formulirung irgend eines lebendig productiven Erkenntnissprincips, welches sich mit den modernen Principien, wie z. B. dem der Zusammensetzung der Kräfte, oder gar mit demjenigen der virtuellen Geschwindigkeiten vergleichen liesse. Archimedes geht in seiner Schrift über das Gleichgewicht der Ebenen von der gleich an die Spitze des ersten Buchs gestellten axiomatischen Voraus-

setzung aus, dass „gleich schwere Grössen, die in gleichen Entfernungen wirken, im Gleichgewicht sind". Mit Hülfe dieser ohne weitere Nachweisung hingestellten Annahme beweist er im sechsten Satz das allgemeine Hebelprincip. Die weiteren Ausführungen seiner Gleichgewichtstheorie betreffen die Schwerpunkte und zwar zunächst im ersten Buch diejenigen der einfachsten Figuren, wie der Dreiecke und Trapeze. Im zweiten Buch wird alsdann auf Grund der Quadratur der Parabel weitergegangen, und die Anwendungen erhalten einen vorwiegend mathematischen Charakter. Ueberhaupt kann man von den erhaltenen Arbeiten des Archimedes sagen, dass ihr Hauptgegenstand die reine Mathematik sei, und dass die Combination der aufgefundenen geometrischen Sätze mit mechanischen Begriffen und Problemen häufig nur dazu dient, den geometrischen Neigungen einen Gegenstand zu verschaffen.

5. Die andere der beiden erhaltenen mechanischen Schriften des syrakusischen Mathematikers ist diejenige über die schwimmenden Körper. Gleich an der Spitze derselben steht die Voraussetzung, dass in einer Flüssigkeit der weniger gedrückte Theil durch den mehr gedrückten in die Höhe getrieben werde, und dass jeder Theil von der senkrecht über ihm befindlichen Flüssigkeit gedrückt werde. Der fünfte Satz des ersten Buchs besagt das Einsinken eines leichteren Körpers bis zur Verdrängung eines seinem eignen gleichen Gewichts der Flüssigkeit, und der siebente Satz spricht die Abnahme des Gewichts der schwereren Körper um das Gewicht der verdrängten Flüssigkeitsmasse aus. Die ganze Schrift geht in ihren weiteren Anwendungen zunächst auf Kugelabschnitte und dann auf parabolische Konoide ein, so dass Alles wesentlich nur Bethätigung der einfachen Sätze an mathematisch interessanten Verhältnissen ist. Die Stabilität von Körpergebilden der höheren Geometrie, die man sich in Flüssigkeiten getaucht denkt, ist die subtilere Seite der verwickelteren Untersuchungen, während nicht nur für unsern Zweck sondern auch für die moderne Geschichte der Mechanik die Formulirung der einfachen Fundamentalwahrheiten der Hydrostatik eine weit grössere Bedeutung hat. Wir werden aber auch diese principiellen Anfänge erst da genauer erörtern, wo an dieselben von den Neuern wieder angeknüpft wird. Beiläufig bemerkt, hat die hydrostatische Arbeit des Archimedes das Schicksal gehabt, nicht einmal in griechischer Sprache, sondern durch arabische Vermittlung und in einer höchst defecten Gestalt auf uns zu gelangen.

Dennoch konnte Lagrange[1]) grade von diesen Stabilitätsuntersuchungen behaupten, dass „die Neuern wenig hinzugefügt haben".

6. Nach dem Vorangehenden beschränken sich die principiellen Anfänge zu den Grundlagen der allgemeinen Mechanik auf ein paar Begriffe und Sätze der Statik und der Hydrostatik. Vor Allem ist es der Begriff des Schwerpunkts, der den ersten Ausgangspunkt für die rein theoretischen Untersuchungen bildet. Alsdann ist es das Verhältniss der Kräfte am Hebel, was zur Grundlage der antiken Erklärungen gemacht wird. Die Hydrostatik beruht dagegen in der Hauptsache auf eigenthümlichen Principien und Elementarsätzen, und von einer Ableitung dieser relativ einfachen Fundamente aus Grundsätzen und Vorstellungen der allgemeinen Mechanik ist noch keine Spur anzutreffen. Derartiges gelingt erst den Neuern, indem sie die Flüssigkeit in ihrer jedesmaligen Begrenzung als eine natürliche Maschine betrachten.

Abgesehen von dem geringen Umfang des Gegenstandes haben aber die antiken Principien und Elementarsätze in ihrer Form, Ausdrucks- und Einführungsart vor der üblichen Einkleidung der neuern Grund- und Hauptsätze logisch Einiges voraus. Das Einzige, worüber man rücksichtlich ihres Sinnes zu Zweifeln Anlass gefunden hat, ist die Frage, wieweit die ersten von Archimedes zu Grunde gelegten Voraussetzungen als Erfahrungsthatsachen oder aber als ursprüngliche Verstandesnothwendigkeiten gelten sollten. Nun bleibt es freilich im Ausdruck der Sache völlig unentschieden, ob der Satz vom Gleichgewicht am gleicharmigen Hebel durch die Erfahrung verbürgt sein solle, oder ob man die Symmetrie der Verhältnisse als einen reinen Verstandesgrund des auf beiden Seiten gleichen Verhaltens anzusehen habe. Die Neuern pflegen sich in solchen Fällen der Wendung zu bedienen, dass kein Grund vorhanden sei, warum eine Wirkung eher in dem einen als in dem entgegengesetzten Sinne, also eher nach der einen als nach der andern Seite erfolgen solle, und dass mithin überhaupt bei dem Mangel eines derartigen Grundes eine solche unterschiedliche Gestaltung des Verhältnisses gar nicht statthaben könne. Sie haben also, sobald sie ein solches Raisonnement als stichhaltig zur Geltung bringen, unverkennbar die Absicht, die

---

[1]) Mécanique analytique, 2. Ausg. 1811, Bd. I, erste Abth. Sect. VI, Art. 1.

fraglichen Verhältnisse als blosse Verstandesnothwendigkeiten erscheinen zu lassen. Etwas Aehnliches bei Archimedes vorauszusetzen, hat man streng genommen kein Recht. Ein Bewusstsein über den verschiedenen Ursprung der Erkenntniss war im Alterthum am allerwenigsten vorhanden. Auch ist es erst die allerneuste Zeit gewesen, in welcher die principielle Unterscheidung der Verstandesnothwendigkeiten und der Erfahrungsthatsachen ernstlicher maassgebend zu werden vermocht hat. Dieser kritische Gesichtspunkt ist daher von der Art, dass man nicht annehmen darf, er habe schon für Archimedes von Bedeutung sein können. Der Vorwurf der Unbestimmtheit des Sinnes, in welchem die Principien genommen werden sollen, fällt daher entweder fort, oder ist auf die ganze unentwickelte Auffassung des Alterthums auszudehnen. Unter beiden Voraussetzungen bleiben die Archimedischen Formulirungen der Principien in ihrer formalen Strenge unberührt. Ihr Inhalt ist genau derselbe, gleichviel ob man annimmt, er habe durch die blosse einfache Verstandesvorstellung oder durch die Erfahrung oder durch das einheitliche Zusammenwirken beider Elemente verbürgt sein sollen. Allerdings war das Vorbild der Darstellung die bereits ausgebildete Verfassung der reinen Mathematik; aber die Nachtheile dieser zunächst sehr natürlichen Einseitigkeit trafen die Beweise mindestens ebensosehr als die Principien, und sie sind in der neuern Zeit noch weit bemerklicher hervorgetreten als im Alterthum. Die strenge Sonderung des rein Mathematischen von dem specifisch Mechanischen ist noch heute nicht vollständig vollzogen, und es wird eine der methodisch wichtigsten Aufgaben unserer Kritik sein, die in dieser Beziehung erforderlichen Abgrenzungen genau zu bezeichnen.

7. Die Mathematik des Alterthums übertraf die Bedürfnisse der damaligen Mechanik, indem sie sich mit Gebilden vertraut gemacht hatte, für welche die natürlichen Anwendungen erst in der neuern Zeit und zum Theil erst spät aufgefunden wurden. Die Theorie der Kegelschnitte bildet hiezu den wichtigsten Belag.

Die neuere Wissenschaft zeigt dagegen vornehmlich den umgekehrten Entwicklungsgang. Diejenigen mathematischen Einsichten, durch welche Galileis Grundlegungen der Dynamik gehörig benutzt und ausgebildet werden konnten, fanden sich vielfach erst an der Hand der mechanischen Probleme selbst, so dass man behaupten kann, in der neuern Zeit seien die wichtigsten Bestandtheile der mathematischen Erkenntniss weniger die Frucht einer

freien, gleichsam spielenden Geistesbewegung, wie bei den Griechen, sondern das Ergebniss der Anforderungen gewesen, welche von der materiellen Forschung ausgingen.

Dennoch war es von der grössten Wichtigkeit, dass man gegen die Zeit der modernen Wiederbelebung der Wissenschaften einen Schatz fertiger mathematischer Einsichten vorfand, der inzwischen noch durch die Anfänge einer bereits moderner gestalteten Arithmetik und Algebra bereichert worden war. Mit Hülfe dieses Wissens und vermittelst der Einführung in die Behandlung der ersten Principien der Statik und Hydrostatik durch Archimedes haben sich die Neuern zu eignen Untersuchungen vorbereitet. Selbst die zusammenhangloseren Reste und sogar die gelegentlichen Beurkundungen blosser Versuche, wie sie sich vornehmlich in den Collectionen des Pappus antreffen lassen, haben in manchen Fällen und zwar nicht blos durch das Gelungene, sondern auch durch das Verfehlte anregend gewirkt.

Weit bedeutungsloser blieb dagegen für die principiellen Thatsachen der Mechanik alles das, was die Zeit nach Archimedes an Berichten oder Schriftresten über praktische Mechanik aufzuweisen hat. Alle diese Ueberlieferungen vertreten nur die negative Thatsache, dass man in der principiellen Begründung eher Rückschritte als Fortschritte gemacht hatte. Ungefähr ein Jahrhundert nach der Zeit des Archimedes bediente sich (der ältere) Heron von Alexandrien des Satzes vom Hebel, um die Wirkungsart der ihm bekannten einfacheren Maschinen zu erklären. Der eigentlich wissenschaftliche Geist scheint aber seitdem immer mehr abgenommen zu haben, so dass man für das Alterthum Archimedes und dessen Zeit als den Culminationspunkt des rationellen mechanischen Wissens betrachten muss. Die geometrischen und die statischen Aufstellungen dieses einen Mannes haben selbst in der verkürzten und zum Theil defecten Gestalt, in welcher sie auf uns gelangt sind, mehr Bedeutung gehabt, als was sich in der Mechanik und in der mit der Mechanik in Zusammenhang gebrachten Geometrie sonst noch erhalten hat. Der Zeitraum, welcher diese in der Mechanik fruchtbarste Erscheinung des Alterthums von den ersten Bekundungen eines entschieden schöpferischen Geistes der modernen Aera trennt, ist für die principiellen Fortschritte so gut wie nicht vorhanden. Die achtzehn Jahrhunderte, welche Galilei von Archimedes trennen, hindern uns daher keineswegs, die eine Erscheinung fast unmittelbar an die andere zu knüpfen. Was vor

oder ziemlich gleichzeitig mit Galilei zu berücksichtigen ist, kennzeichnet sich vorwiegend als vorbereitende Auffrischung der antiken Ueberlieferung. Da es überdies auch der Zeit nach nur wenig früher anzutreffen ist, als die Galileischen Leistungen, so kann man im Grossen und Ganzen den erwähnten Zwischenraum als leer und gleichsam als eine geschichtliche Wüste ansehen.

Wie nun aber Galilei nur in der Statik den Alten etwas zu verdanken hat, für die Dynamik aber selbständiger Schöpfer ist, so verwandelt sich auch das aus der antiken Statik Entlehnte unter seinen Händen in etwas principiell besser Begründetes. Die statischen Verhältnisse nehmen gleichsam an der Bewegung und dem Leben Theil, welches den dynamischen Einsichten eigenthümlich ist. Alle Erklärungen werden vertieft und legen die starre Form ab, in welcher sie den natürlichen Gründen des lebendigen Geschehens mehr oder minder entfremdet waren. Auf diese Weise erhält auch die Statik neue Grundlagen, und die Principien derselben erscheinen in ihren natürlichen Beziehungen zu denen der neu geschaffenen Wissenschaft der Dynamik. Derartige Ergebnisse konnten aber offenbar nicht die einseitige Frucht blosser Ueberlieferung sein, sondern müssen als eine Wirkung der modernen Vertiefung in die einfachsten und natürlichsten Principien der mechanischen Vorgänge angesehen werden. Auch ist dieser Sachverhalt der entscheidende Grund, aus welchem eine kritische Geschichte der allgemeinen Principien mit der neuern Zeit und speciell mit Galilei zu beginnen, das ausserdem principiell Erhebliche aber nur einzuschalten und den neuern Auffassungsarten und Ausgangspunkten unterzuordnen hat.

Erster Abschnitt.

Die Zeit Galileis. — Grundlegung der Dynamik.

Erstes Capitel.

Vorgänger Galileis.

8. Wüsste man auch nichts von den Kenntnissen und Ideen Derjenigen, welche sich vor Galilei mit Fragen der praktischen oder theoretischen Mechanik beschäftigten, so würde man dennoch nicht voraussetzen dürfen, dass eine neue Gattung des Wissens ohne alle Uebergänge zu Stande gekommen sei. Eine solche Annahme würde dem geschichtlichen Gesetz der Stetigkeit widersprechen. So hoch man daher auch den Antheil eines einzelnen Mannes an der Hervorbringung eines neuen Zweiges der Forschung veranschlagen möge, ja selbst, wenn man Ursache hat, einer einzigen Persönlichkeit die wesentliche Schöpfung einer ganzen Wissenschaft zuzuschreiben, so wird man sich doch zu hüten haben, zu meinen, die Gedanken Anderer hätten sich vorher noch nie in einer verwandten Richtung bewegt. Schon die Grundsätze der Veranschlagung der Wahrscheinlichkeiten sprechen gegen eine solche unhistorische Auffassung. Das Fertige und Gelungene ist selten die Frucht der ersten Bestrebungen, sondern in der Regel das Ergebniss einer Reihe von Ansätzen, Versuchen und unvollkommenen Lösungen. Selbst in dem Fall, in welchem der spätere Entdecker weder direct noch indirect von den Bemühungen seiner Vorgänger Kenntniss gehabt hätte, würde die Geschichte dennoch die Vorversuche zu verzeichnen haben, da sie nicht blos die Bedingungen, unter denen der Einzelne bewussterweise arbeitete, sondern auch diejenigen Chancen berücksichtigen muss, die für die Erfolge der Gesammtheit gelten.

Galilei ist der Schöpfer der Dynamik und der Verbesserer der Statik. In der ersteren Eigenschaft hatte er ein volles Recht, schon auf dem Titel seiner Hauptschrift von „neuen Wissenschaften“ (nuove scienze) zu reden. Nichtsdestoweniger haben die neuern Forschungen gezeigt, dass er auch bezüglich der Dynamik bereits ein Jahrhundert früher einen Vorgänger hatte, dessen Genie dem seinigen nicht nachstand, und der vielleicht eine noch höhere Werthschätzung verlangt, wenn man seine Ideen und Leistungen mit den wissenschaftlichen und sonstigen Verhältnissen seiner Zeit vergleicht. Dieser Mann war Leonardo da Vinci, geb. 1452, also 112 Jahre vor Galilei. Der weitere Kreis des Publicums kennt ihn vornehmlich als grossen Maler; die Wissenschaft hat dagegen in ihm einen Vertreter der anscheinend verschiedensten Gebiete technisch und theoretisch mechanischen Charakters zu suchen. Ja noch mehr! Jener italienische Maler hat sich nicht blos in besondern Wissenszweigen, wie in der technischen Lehre der Wasserbewegung oder in der Anatomie und Bewegungslehre der menschlichen Körpertheile, sowie in mehreren andern Specialrichtungen als bedeutender und vielfach bahnbrechender Geist erwiesen, und er hat nicht etwa blos die tiefern Gründe mechanischer Vorgänge zum Theil mit Erfolg erforscht, sondern er ist auch der Repräsentant richtiger Vorstellungen über die allgemeine Methode der Erlangung eines richtigen Naturwissens. Was er über das Verhältniss der Erfahrung zur Speculation sagt, trägt der ersteren volle Rechnung und ist zugleich ein Zeugniss für den Werth der letzteren. Er kannte ebensogut die Nothwendigkeit der Beobachtung und des Experiments als die Tragweite der rationellen Consequenzen. In dieser Beziehung sind seine kurzen Auslassungen über die Methode, wie wir sie in Venturis [1]) Essai S. 31—32 und in Libris [2]) Geschichte der Mathematik in Italien Bd. III, S. 235 wörtlich ausgezogen finden, weit zutreffender, als was spätere Philosophen, namentlich aber Bacon von Verulam, in umfassenden Werken auseinanderzusetzen vermocht haben. Diese methodisch richtigen Vorstellungen haben ausser ihrer allgemeinen Bedeutung auch noch einen besondern Sinn für die Mechanik. Nur an der Hand richtiger Grundsätze über die Untersuchungsart ist es später einem Galilei gelungen,

---

[1]) Venturi, Essai sur les ouvrages physico-mathématiques de Léonard de Vinci. Paris 1797.

[2]) Libri, Histoire des sciences mathématiques en Italie, 4 vols. Paris 1838—41.

der modernen Physik eine sichere Grundlage zu geben. Es lohnt daher der Mühe, den allgemeinen Formulirungen der Forschungsgrundsätze in einer Geschichte der mechanischen Principien einige Aufmerksamkeit zuzuwenden. Was Leonardo im 15. Jahrhundert als maassgebend nicht nur aussprach, sondern, was mehr bedeutet, auch in seinen eignen Arbeiten zur Anwendung brachte, trifft mit der sorgfältigsten Fassung zusammen, die sich heute nur irgend den Erfordernissen einer gediegenen mathematischen und experimentellen Untersuchungsart geben lässt. Im Gange der Erkenntniss legte er zwar den Ton auf Beobachtung und Experiment und wollte die allgemeinen Regeln stufenweise auf Grund der besondern Thatsachen angebahnt wissen; allein er wusste auf der andern Seite auch die Fruchtbarkeit der sich frei bewegenden Phantasie zu schätzen und ging von vornherein davon aus, dass für die Hervorbringung eines sichern Wissens die Anwendung der Mathematik unumgänglich sei.

9. Ein Wort Leonardos über das Verhältniss der Mechanik zur Mathematik kann als typisch für die Rolle angesehen werden, welche die Anwendungen der Mathematik des Alterthums und der neuern Zeit in der Mechanik gespielt haben. „Die Mechanik," sagt er[1], „ist das Paradies der mathematischen Wissenschaften, weil man mit ihr zur Frucht des mathematischen Wissens gelangt" (si viene al frutto). In der That hat sich die Frucht der antiken Mathematik am glänzendsten in der modernen Mechanik und zwar speciell in derjenigen der Himmelskörper gezeigt. Auch ist man erst tiefer in das Verfahren der Natur eingedrungen, seit man von der mathematischen Charakteristik der blos anschaulichen Phänomene den Uebergang zur Messung der realen Kräfte bewerkstelligt hat. Die Mathematik und speciell die Geometrie gestattet eine Menge von Anwendungen auf die Natur, in denen jedoch streng genommen nur die Kennzeichnung von Anschauungsgebilden und so zu sagen nur von Gesichtsphänomenen in Frage kommt. Solange man ausschliesslich in dieser Anwendungssphäre verbleibt, entzieht sich der Kern der Natur, dessen Grundlage in den Massenverhältnissen und mechanischen Kräften zu suchen ist, einer exacten Ergründung. Das Wissen behält alsdann einen vorherrschend phoronomischen Charakter. Man kennt im günstigsten Falle die Bewegungserscheinungen; aber man vermag nicht auf das Verhältniss der

[1]) Libri, im angeführten Werk, Bd. III, S. 40.

Ursachen solcher Bewegungen zu schliessen. Die Keplerschen Gesetze sind ein glänzendes Beispiel dieser rein phänomenalen Vorbereitungen der tieferen, eigentlich mechanischen Erkenntniss. Einem Leonardo wären die Früchte jener Gesetze, wenn er, gleich Galilei, zu den Zeiten Keplers gelebt hätte, schwerlich entgangen. So sehr war seine Geistesart geeignet, ebenso der mechanisch realen, wie der speculativen Seite eines Gegenstandes zu entsprechen. Ein Kepler mit seiner oft überkühnen Phantasie würde ihm verständlich gewesen sein und an ihm voraussichtlich einen Mann gefunden haben, der die einschlagenden Erfolge eines Newton vorweggenommen hätte.

Obwohl die Werke des genialen Italieners theils verloren gegangen, theils aber auch unwirksam geblieben sind, so lässt sich doch aus dem, was aus der erhaltenen Manuscriptenmasse seit Eingang unseres Jahrhunderts veröffentlicht worden ist, wenigstens soviel ersehen, dass sehr erhebliche mechanische Vorstellungen, die man in der herkömmlichen Geschichtsdarstellung gewöhnlich später datirt, bereits jenem Forscher angehörten. Freilich gehörten sie hiemit nicht zugleich auch dem fünfzehnten Jahrhundert, ja auch nicht dem grössern Theil des sechzehnten. Grade aber, weil sie der allgemeinen Aneignungsfähigkeit des Zeitalters bedeutend vorauseilten, haben sie für die Einleitung der neuern Geschichte der Mechanik ein besonderes Interesse. Derselbe Geist, der in den kosmischen Vorstellungen weit in die Folgezeit hinausgriff, hat in den allerersten Principien der Mechanik Anschauungsweisen und fundamentale Einzelkenntnisse bekundet, deren Inhalt und Artung ein klares und tiefes Nachdenken über die Naturvorgänge verräth. Ungeachtet der Dürftigkeit der grade nach dieser Seite besonders verkümmerten Hinterlassenschaft können dennoch einige Punkte und zum Theil mit des Autors eignen Worten über allen Zweifel erhoben werden.

10. Am deutlichsten ergiebt sich aus einzelnen Stellen und Manuscriptenfragmenten, dass Leonardo das Bewegungsgesetz auf der schiefen Ebene kannte, und dass er zutreffende Vorstellungen vom stetigen Wachsen der Geschwindigkeiten beim Fallen der Körper hatte. In ersterer Beziehung sagt er[1]), indem er mit AB die Höhe und mit AC die Länge der schiefen Ebene bezeichnet: „Das Fallen des Körpers A auf der Linie AC erfolgt im Verhältniss

[1]) Bei Venturi, in der angef. Schrift, S. 18, § 7.

zum Fallen in AB in einer Zeit, die um so viel länger ist, als AC im Vergleich mit AB mehr Länge hat.“ Diese Aufstellung ist um so wichtiger, als sie keine blos statische, sondern eine dynamische ist. Nicht das weit leichter bestimmbare Gleichgewichtsverhältniss auf der schiefen Ebene, sondern die relative Fallzeit wird richtig angegeben. Weiter heisst es dann: „Der schwere Körper A fällt schneller durch den Bogen ACE als durch die Sehne AE.“ Diese Einsicht ist nichts als eine Anwendung der Kenntniss des Falles auf der schiefen Ebene, und die Paradoxie, die theils in der Sache, theils in der Formulirung liegt, hat später einem Galilei, der denselben Satz als Consequenz seiner Falltheorie aufstellen musste, Gelegenheit zu eingehenden Auseinandersetzungen gegeben. Nimmt man noch eine Aeusserung Leonardos[1]) hinzu, derzufolge er sich beim Fallen die Geschwindigkeiten in arithmetischer Progression wachsend dachte, so ist hinreichend ersichtlich, dass er einen erheblichen Theil der Eigenschaften des freien Falles gekannt haben müsse, und dass er auf diese Weise den von Galilei definitiv und in ihrem ganzen Umfang festgestellten Wahrheiten sehr nahe gekommen sei.

Nicht von ganz gleicher Bedeutung, aber doch noch immer sehr erheblich sind die Andeutungen und Spuren jener Auffassungsart des Kräfteverhältnisses, deren bestimmtere Gestaltung wir heute als diejenige nach dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten bezeichnen. Offenbar wurde das in Rücksicht auf die eventuellen freien Kräftewirkungen umgekehrte Verhältniss der durch den Hebel und andere Potenzen fest vorgeschriebenen relativen Geschwindigkeiten von Leonardo beachtet und in diesem Verhältniss sogar der Grund des gegenseitigen Aufwiegens sowie überhaupt der Wirkungsgleichheit erkannt. Jedoch hat sich das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten zu seiner vollständigen Allgemeinheit erst in mehreren Abstufungen entwickelt, so dass man bei Leonardo nur von einem Anfang zu demselben reden kann.

11. Was zwischen Leonardo da Vinci und Galilei an principiell interessirenden Thatsachen vorkommt, bezieht sich auf die Arbeiten oder Ideen von Männern, die theils an die überlieferte Statik des Alterthums anknüpften, theils aber auch gelegentlich vereinzelte dynamische Vorstellungen vertraten. In letzterer Beziehung ist besonders I. B. Benedetti (gest. 1570) anzuführen. Er wusste,

---

[1]) S. das Fragment in den Beilagen zu Libris angef. Werk, Bd. III, S. 212.

dass im leeren Raume die Körper unabhängig von ihrer Masse mit gleicher Geschwindigkeit fallen d. h. von denselben Höhen bei den verschiedensten Massen in gleichen Zeiten zur Erde gelangen. Diese Erkenntniss war nicht unwichtig, wenn man bedenkt, dass noch zur Zeit Galileis die Aristotelischen Vorstellungen von Schwere und Leichtigkeit und von dem schnelleren Fallen der schwereren Körper vermöge ihres grösseren Gewichts in Umlauf waren. In der gemischten Schrift von den „Verschiedenen Speculationen“ [1]) behandelt Benedetti die Mechanik in einem besondern Abschnitt. Er kannte die Centrifugalkraft und sprach es deutlich aus, dass die Körper, sich selbst überlassen, in der Tangente fortgehen. Bei Gelegenheit des nicht graden Hebels bekundet er eine Kenntniss von dem Begriff des Moments im heute üblichen Sinne dieses Worts, indem er S. 143 sagt: „dass die Grösse eines beliebigen Gewichts oder die bewegende Kraft (virtus movens) in Beziehung auf eine andere Grösse durch den Nutzen (beneficio) der Senkrechten erkannt werde, die vom Mittelpunkt der Waage auf die Linie der Neigung gezogen würden.“ Dies ist die Grundlage der gegenwärtigen Theorie der Momente.

12. Bereits ein älterer Zeitgenosse von Galilei ist der gewöhnlich Guido Ubaldi genannte Marquis del Monte (geb. 1545). In seinem Buch über die Mechanik [2]) gebraucht er die Verhältnisse der virtuellen Geschwindigkeiten am Hebel als Erklärungsprincip und bekundet übrigens eine bedeutende Kenntniss der mechanischen Leistungen der Alten. Indessen beschränkt er sich auch insofern streng auf den antiken Standpunkt, als er über blosse Statik nicht hinausgeht. Galilei nennt ihn in den Discorsi [3]) dritter Tag S. 266 als denjenigen, durch welchen er persönlich bewogen worden sei, seine Untersuchungen über die Schwerpunkte zu vertiefen. Uebrigens ist die Statik Ubaldis insofern noch sehr unvollkommen, als es ihm nicht einmal gelingt, das vorher bei Gelegenheit Benedettis erwähnte Princip der Momente ausser auf den Hebel auch noch auf die schiefe Ebene anzuwenden. Ungeachtet verschiedener Fehler in den Ausführungen, namentlich in der Behandlung der Schraube, hatte seine Schrift für ihr Zeitalter eine grosse restaurative Bedeutung, indem sie die Leistungen des

[1]) Benedicti Divers. speculat., Taurini 1585.

[2]) Guido Ubaldi Mechanicorum liber, Pisauri 1577.

[3]) Galilei, Opere, 16 vol. Firenze 1842—56, Bd. XIII Discorsi e dimostrazioni matematiche etc.

Alterthums in gehöriges Licht setzte. Andernfalls würde sie auch schwerlich 1615 wiedergedruckt worden sein.

Vergleichen wir das für die Principien in Frage Kommende bei Benedetti und Guido Ubaldi mit dem, was wir von Leonardo da Vinci beibringen konnten, so bleibt der grosse Unterschied zu Gunsten des Letzteren nicht im Mindesten zweifelhaft. In ihm ist daher auch der wahre Vorgänger der Galileischen Dynamik anzuerkennen.

Zweites Capitel.

Begründung der Dynamik durch Galilei.

13. Man hat die Dynamik als die Theorie der beschleunigenden Kräfte definirt, und sie ist in der That auch wesentlich eine Lehre von den Ursachen der veränderlichen Bewegung. Dennoch setzt sie, um überhaupt möglich zu sein, auch die Betrachtung des gleichmässig beharrenden Bewegungszustandes eines Körpers voraus. Ihr erstes Axiom bezieht sich grade auf diese gleichmässige Beharrung, die man gewöhnlich Trägheit nennt und als ein gemeinsames Grundgesetz der Bewegung und der Ruhe ausspricht. Ohne dieses Axiom würde kein einziger Schluss und nicht die einfachste Rechnung bezüglich der realen Bewegungen möglich sein. Die Wirkungsart der Kräfte selbst würde ohne jenen Grundsatz ein Räthsel bleiben müssen; aber ganz besonders würde ohne ihn die Entwicklungs- und Summirungsart der Theilelemente einer Kraft in der Zeit völlig unverständlich sein. Man hat daher ein Recht, die Dynamik ganz allgemein als eine Lehre von den Ursachen und Gesetzen der Bewegung aufzufassen, gleichviel ob es sich um die Combination blosser Beharrungsbewegungen oder um Ortsveränderungen unter dem Einfluss stets von Neuem wirkender Kräfte handle.

Wie man aber auch den Sinn des Wortes bestimmen möge, so wird doch in jedem Fall, also für den weiteren wie für den engeren Begriff der Sache, Galilei als der Urheber der ersten Grundsätze und zugleich auch der wichtigsten Hauptlehren der allgemeinen Dynamik zu betrachten sein. Abgesehen von den greifbaren Errungenschaften, wie sie in der Theorie der Fallgesetze auch für die oberflächlichste Auffassung vorliegen, ist aber

besonders der Grad von Klarheit des Bewusstseins hervorzuheben, mit welchem das neue Wissen bei Galilei auftritt. Selbst wenn es gelänge, noch manche Einzelheiten auch schon bei Vorgängern nachzuweisen, so würde doch auch für derartige Punkte die vorzügliche Form der Galileischen Vorstellungs- und Darstellungsart einen nicht unwesentlichen Unterschied begründen. Sein Gedankengang und seine Fassung der Ideen legen die neuen Erkenntnisse in einer Weise vor Augen, die für den fraglichen Wissenszweig bisher noch nicht übertroffen, ja nicht einmal wieder erreicht worden ist. Wenn er schrieb, so war es ihm darum zu thun, in einer lebenden Sprache die Gedanken in der natürlichsten Weise auseinander entstehen zu lassen. Nicht die Mittheilung fertiger Ergebnisse oder die Bethätigung von Kunstgriffen, sondern die möglichst naturgemässe Auffassung des Naturverfahrens selbst war sein Ziel. Wie er an die Stelle blosser Statik die neue Wissenschaft der Dynamik setzte, so vertauschte er auch die starren Formen der Ueberlieferung mit einer auf Bewegung beruhenden Expositionsmethode. Die dialogische Entwicklung, die er als äussere Form für seine Hauptschriften wählte, hat daher bei ihm eine innere Bedeutung. Sie ist das Gewand, in welchem er seine echt dialektisch gehaltenen Untersuchungen am ungezwungensten vorführen konnte.

In der Statik hat Galilei theils etwas ältere, theils etwas jüngere Zeitgenossen, welche zusammen einen gewissen Fortschritt dieses Wissenszweiges repräsentiren, zumal unter ihnen einer ist, der in seiner Art einige Aehnlichkeit mit den bahnbrechenden Eigenschaften Galileis zeigt. Dies ist der Niederländer Simon Stevin (gest. 1633), von dem wir bezüglich der Principien der Statik und Hydrostatik weiter unten besonders und ausführlicher zu handeln haben werden. Wie Stevin als älterer, so kommt Descartes als jüngerer Zeitgenosse Galileis in Frage. Jedoch ist der Metaphysiker Descartes, der seinen Namen in der Geschichte auf die Dauer nur seiner Betheiligung an der Geometrie zu verdanken haben wird, für uns einzig und allein dadurch von einem grösseren Interesse, dass er als warnendes Beispiel für den überwiegend schädlichen Einfluss der metaphysischen Philosophie und, da die Philosophie bisher wesentlich metaphysisch geblieben ist, auch überhaupt als charakteristischer Fall für die wissenschaftshemmenden Wirkungen all solcher Philosophie dasteht. Wir werden ihn daher auch nur dann an der richtigen Stelle behandeln,

wenn wir ihn unter die Rubrik der philosophischen Einflüsse bringen.

Ausser Stevin und Descartes kommen zur Zeit Galileis bisweilen noch geniale Repräsentanten einzelner Wendungen, wie z. B. Fermat (gest. 1665) in Betracht. Jedoch werden derartige Wendungen, wie das Fermatsche Princip der geringsten Wirkung, erst in weit späteren Ausführungen Anderer berühmt und einflussreich, so dass wir uns in diesem Abschnitt auf eine vorläufige Darstellung und Sichtung solcher Keimgedanken zu beschränken haben.

14. Man kann die eben gegebenen Andeutungen kurz dadurch zusammenfassen, dass man sagt, das Galileische Gebäude der Dynamik sei bereits fertig gewesen, während sich seine Zeit und sogar die in ihr erst aufgekommenen Philosophien vorwiegend auf blosse Statik beschränkten. Fragt man aber danach, wie er selbst sich zu der letzteren verhalten habe, so muss man ihm auch hier die Rolle eines Verbesserers zutheilen, der ausser einigen Erweiterungen auch eine neue Auffassungsart der statischen Principien zur Durchführung brachte. Hieher gehört namentlich die Geltendmachung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten als einer überall anwendbaren Grundanschauung, in der zugleich die Vorstellung von der wahren Ursache des Gleichgewichts und überhaupt des gegenseitigen Aufwiegens der Kräfte enthalten sei. Diese Tragweite hatte man bis dahin jenem Princip noch niemals gegeben.

In einem gewissen Sinne kann man bereits von Galilei sagen, dass er die Statik und die Dynamik in engster Vereinigung miteinander behandelt und in den Principien bei der Begründung seiner neuen Wissenschaft keineswegs jene Trennung zugelassen habe, in welcher man nach ihm die beiden Zweige einander entfremdete, um sie dann später, nämlich erst im Laufe des letzten Jahrhunderts, einander wieder annähern zu müssen. In der That ist es sehr bezeichnend, dass in dieser Beziehung ein Lagrange ausdrücklich auf Galileis Grundbegriffe zurückkommen und dieselben behufs einer einheitlichen Behandlung der gesammten rationellen Mechanik wieder aus der Vergessenheit und Vernachlässigung hervorsuchen musste.

Da es die dynamischen Einsichten waren, welche eine vollkommnere Auffassung der statischen Principien ermöglichten, so müssen wir mit der historischen Einführung in die ersteren

beginnen und die Erörterungen über die statischen Principien theils einflechten, theils folgen lassen.

15. Die wichtigsten in die Mechanik einschlagenden Schriften Galileis sind auch zugleich im Allgemeinen seine Hauptwerke. Erst gegen Ende seines langen, beinahe acht Jahrzehnte (1564—1642) währenden Lebens gelangte er zur Veröffentlichung derjenigen Arbeit, welche die Grundlegung der Dynamik zum eigentlichen Gegenstande hat. Es sind dies die Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze u. s. w. Diese Dialoge erschienen zuerst 1638. Ihr Kern ist in der als „dritter Tag“ bezeichneten Abtheilung zu suchen, in welcher es der Verfasser, der bei aller Kenntniss der alten Sprachen doch auf die lebende Ausdrucksweise einen grossen Werth legte, dennoch über sich gewonnen hat, eine lateinische Formulirung der Hauptsätze gleichsam als Text der italienischen, viel freieren Entwicklungen einzureihen. Die zweite Hauptschrift, die auch bereits, aber nur nebensächlich im Dienste ihres Hauptzwecks, die Principien des mechanischen Wissens und sogar die Grundlagen der Dynamik enthielt, ist der von vornherein sowie durch die Schicksale, die er seinem Verfasser zuzog, berühmt gewordene Dialogo intorno ai due massimi sistemi del mondo, der 1632 veröffentlicht wurde. Obwohl in demselben die Nachweisung der Richtigkeit des Copernicanischen Systems den Hauptgegenstand bildet, so ist er doch zugleich ein Werk, in welchem der Autor seinen physikalischen Gedankenkreis, seine Forschungsmethode und sogar seine Naturphilosophie zur Darstellung bringt.

Erst an dritter Stelle ist eine kleinere Schrift zu nennen, die zugleich die früheste, für die Mechanik sehr erhebliche Veröffentlichung Galileis repräsentirt. Sie erschien in erster Ausgabe 1612 unter dem Titel: Discorso intorno alle cose che stanno in su l'acqua o che in quella si muovono. Diese Abhandlung, in welcher theils die hydrostatischen Sätze des Archimedes gegen Angriffe vertheidigt, theils eigenthümliche Auffassungsweisen entwickelt werden, ist besonders dadurch wichtig und interessant, dass sie die Anwendung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten auf das Gleichgewicht und die Bewegung in Flüssigkeiten enthält und ausserdem einleitungsweise die entsprechenden allgemeinen und Galilei zum Theil eigenthümlichen Begriffe und Vorstellungsarten mit der grössten Deutlichkeit und Ursprünglichkeit entwickelt. Wir werden daher auf den Inhalt derselben

weit mehr zu achten haben, als bisher geschehen ist, zumal sie die Feststellung des Zeitpunkts, in welchem gewisse Theorien allgemein zugänglich wurden, durch ihr verhältnissmässig frühes Datum ausserordentlich erleichtert.

Merkwürdigerweise ist grade diejenige Schrift, welche den Titel Mechanik trägt, ihrer Bedeutung nach erst an vierter und letzter Stelle anzuführen. Es ist eine kleine Arbeit über die Statik, welche in italienischer Sprache erst sieben Jahre nach dem Tode ihres Verfassers herausgegeben wurde. Dagegen erschien schon ziemlich früh (1634) eine französische (etwas freie) Uebersetzung derselben von Mersenne. Galilei selbst scheint keinen allzu grossen Werth auf diese Darstellung der mechanischen Potenzen gelegt zu haben. Die Herausgabe der Pariser Uebersetzung [1]) bezeugt jedoch das Interesse, welches man in den dortigen betreffenden Kreisen, für welche Mersenne mit seinen Bemühungen die Stelle eines Journals vertrat, grade an dieser Leistung nahm. Wären nicht die wichtigsten Grundanschauungen in der mehr autentischen Gestalt nicht posthumer Werke vorhanden, so würde allerdings auch diese kleine statische Schrift eine unschätzbare Quelle sein und genügen, wenigstens die durchgängige Anwendung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten sowie einige andere Grundanschauungen Galileis ausser Zweifel zu stellen. So aber werden wir uns auf die Schrift Della scienza meccanica (1649) meist erst in zweiter Linie zu berufen haben.

Ausser diesen Schriften, unter denen nur die letzte so zu sagen halbposthum ist, findet sich noch mancherlei zur Mechanik Gehöriges, aber nur selten zur Kennzeichnung durchaus Nothwendiges in den übrigen Arbeiten und Briefen theils astronomischen, theils physikalisch mathematischen Inhalts. Einiges hievon ist erst in neuster Zeit herausgegeben worden. Hervorzuheben sind hierunter die Sermones de motu gravium [2]) als eine sehr frühe Studie, aus welcher aber dennoch ein Theil für die fünfzig Jahre später erschienenen, vorher angeführten Discorsi maassgebend gewesen ist. Auch die erwähnten lateinischen Einreihungen des dynamischen Grundwerks stammen fast wörtlich aus der Zeit der Abfassung der Sermones, also aus jener ältesten

---

[1]) Les mécaniques de Galilée. Paris 1634.

[2]) Zum ersten Mal 1854 nebst Zugehörigem gedruckt in der Florentiner Ausgabe der Werke Galileis, Bd. XI.

Gruppe von Ausarbeitungen, die Galilei Anfangs seiner zwanziger Lebensjahre vornahm. Da sich dieselben auf die Cardinaltheorien beziehen, so ist hiemit festgestellt, wie früh Galilei nicht nur seine Grundgedanken fasste, sondern auch deren wesentlichste Consequenzen zog. Uebrigens enthalten die Sermones selbst die einfachsten Grundgesetze der Bewegung und sind ausserdem noch dadurch interessant, dass sie bemerken lassen, wie sich ihr Verfasser von der Aristotelischen Ueberlieferung lossagte, und welche Schwierigkeiten er zu überwinden hatte, um der herrschenden Vorstellungsarten selbst Herr zu werden.

16. Für unsern Zweck handelt es sich weniger um eine vollständige Ausführung der dynamischen Hauptresultate, durch welche Galilei berühmt geworden ist, als vielmehr um die Analyse des an ihnen principiell Bedeutsamen. Die Gesetze des freien Falles sowie desjenigen auf der schiefen Ebene und der Pendelschwingungen, alsdann die Bestimmung der Wurfparabel und was sonst im Rahmen dieser Fundamentalergebnisse festgestellt wird, ist für die gegenwärtige Auffassung dem gewöhnlichen Inhalt nach etwas ganz Geläufiges, dagegen in Rücksicht auf die Entstehungsart und auf die Galilei eigenthümliche Gedankenform weit weniger Erforschtes. Auch kommt es uns darauf an, deutlich zu machen, wie z. B. die Theorie des Falles der Körper über die besondere Eigenthümlichkeit ihrer einzelnen Hauptergebnisse weit hinaus gegriffen und bereits eine Lehre von der allgemeinen Form der Kräftewirkung eingeschlossen habe. Ueberhaupt werden wir überall die Keime zu späteren Theorien sorgfältig zu beachten haben, um hiedurch der stufenweisen Entwicklung der einfachsten Principien zu den markirteren oder vollständigeren Auffassungsarten der späteren Zeit gehörig folgen zu können. Aus derartigen Gründen sowie auch im Interesse der Hervorhebung des Systematischen, welches sich in einem gewissen Maass in der Geschichte selbst bemerklich macht, beginnen wir mit einer Charakteristik gewisser, grade der Galileischen Denkweise eigenthümlicher Grundbegriffe. Hieher gehört zunächst derjenige des Moments, welcher, wie zuerst Lagrange[1]) hervorgehoben hat, weit natürlicher gestaltet ist, als die speciellere Idee, welche in dem überwiegenden Sprachgebrauch der heutigen Mechanik kurzweg mit diesem Ausdruck oder auch als statisches Moment bezeichnet wird. Bis zu einem

---

[1]) Méc. anal. 2. Ausg. 1811, Bd. I, erste Abth. Sect. I, Art. 16.

gewissen Punkt ist seit der kritischen Bemerkung des Verfassers der Analytischen Mechanik die ursprüngliche Idee Galileis in den virtuellen Momenten, wie dieselben von der heutigen Mechanik verstanden werden, wieder zur Geltung gelangt. Dennoch ist der Begriff, den Galilei vor Augen hatte, weit allgemeiner und natürlicher, und er reicht sogar noch weiter, als es sich Lagrange vorstellte.

17. Der Begriff des Moments fällt bei Galilei mit dem der Kraft insofern zusammen, als die fragliche Vorstellung nichts weiter als eine naturgemässe und deutliche Fassung sowie nähere Bestimmung der sonst schweifenden Kraftconception ist. Die Empfindungsvorstellung von dem Andrang, den ein schwerer bewegter Körper gegen einen Widerstand ausüben würde, ist offenbar für die Entstehung der Galileischen Idee vom Moment maassgebend gewesen. Da die Momente in diesem Sinne nicht etwa blos für bewegte Massen, sondern auch für die statischen Fälle des blossen Drucks oder Zugs gelten, so repräsentiren sie ein der Statik und Dynamik, den Gleichgewichts- und den Bewegungsverhältnissen gemeinschaftliches Princip.

Die erste und zugleich deutlichste Auslassung über den Begriff des Moments findet sich in der oben angeführten Schrift: „Ueber die Gegenstände, welche sich auf dem Wasser befinden oder darin bewegen“ (1612), die häufig als diejenige über die schwimmenden Körper citirt wird. Dort[1]) rechtfertigt Galilei sogar seinen Sprachgebrauch als etwas, was mit dem gewöhnlichen Leben übereinstimme, indem man sage: „Dies ist ein sehr wichtiges (grave) Geschäft, aber das andere hat wenig Bedeutung (è di poco momento).“ Das Moment wird als jene virtù, forza, efficacia bezeichnet, mit welcher der Motor bewegt und das Bewegte widersteht, „welche Kraft (virtù) nicht allein von der einfachen Schwere, sondern von der Geschwindigkeit der Bewegung und von den verschiedenen Neigungen der Räume abhängt, in denen die Bewegung vor sich geht.“ Uebrigens spricht Galilei so, als wenn der Begriff des Moments in dieser Weise bei den Mechanikern bereits in Gebrauch wäre. Doch beschränkt sich dieser Umstand wieder dadurch, dass er seinen Sprachgebrauch rechtfertigt. Dies hätte er nicht nöthig gehabt, wenn bei den

---

[1]) Discorso intorno alle cose che stanno in su l'acqua .... Bd. XII der angef. Ausg. der Werke, S. 14.

Mechanikern etwas Anderes als der Begriff der oben (Nr. 11) bei Benedetti erwähnten Momente und ausserdem etwa der Ubaldische Anfang mit den virtuellen Geschwindigkeiten in Frage gekommen wäre.

Der Lieblingsausdruck für eine augenblickliche Kraftwirkung ist bei Galilei das Wort impeto. Dieser „Andrang“, den er augenscheinlich sich ursprünglich als durch eine Muskelempfindung geschätzt dachte, ist völlig gleichbedeutend mit Moment, und die letztere Bezeichnung soll eben nur der wissenschaftliche Kunstausdruck sein, bei dessen Gegenstand es sich zugleich regelmässig um eine objective Messung und um Beseitigung der rohen Form der blossen Empfindungsvorstellung handelt. Indessen verschmäht Galilei keineswegs eine Anknüpfung an die ursprüngliche Vorstellung vom Impetus, sobald eine Verdeutlichung durch Zurückgreifen auf die letzten Erkenntnissursachen erforderlich ist. Hiedurch ist er im Stande, zugleich fasslich und gründlich zu sein. An der eben angeführten Stelle heisst es ferner: „Gleiche absolute, mit gleicher Geschwindigkeit bewegte Gewichte haben gleiche Kräfte und Momente in ihrem Wirken.“ Diesem als erstes Princip aufgestellten, für uns aber zunächst des Momentbegriffs wegen erheblichen Satze wird als zweites Princip die ausgedehntere Formulirung hinzugefügt, wonach gleiche Gewichte bei ungleichen Geschwindigkeiten ihre Momente im Verhältniss dieser Geschwindigkeiten haben. In allen hydrostatischen und auf die Bewegung in den Flüssigkeiten bezüglichen Anwendungen ist die Vorstellung von der Gleichheit oder dem Verhältniss der Momente der durchgängig leitende Gesichtspunkt, und so konnte Galilei sagen, dass er in dieser Abhandlung mehr unmittelbare Gründe als Archimedes geben und eine andere Methode befolgen wolle.

Die wörtlich angeführten Principien sind, genauer betrachtet, nur Umschreibungen derjenigen Vorstellungen, die schon in dem Begriff des Moments selbst enthalten waren. Sie können daher als Erläuterungen zur Definition gelten.

In dem Hauptwerk der Discorsi über die neuen Wissenschaften findet sich an entscheidender Stelle eine ähnliche Bestimmungsart und Charakteristik des Momentbegriffs. Es heisst dort in einem Zusammenhang, in welchem der Fall auf der schiefen Ebene von Grund aus erläutert werden soll[1]: „l'impeto,

---

[1]) Discorsi e dimostrazioni matematiche, Bd. XIII. 3. Tag, S. 174.

il talento, l'energia, o vogliamo dire il momento del discendere.“ Das Wort talento, Fähigkeit, sowie überhaupt das Häufen der Bezeichnungen ist beachtenswerth. Diese Umstände bekunden das Bestreben des Autors, einen Begriff zu verdeutlichen, für den er keine ihm völlig genügende Formel zu finden weiss. Letzteres ist übrigens keineswegs überraschend, da es sich um einen wissenschaftlich stichhaltigen und für die Handhabung geeigneten Kraftbegriff überhaupt handelt.

18. In der Schrift Della scienza meccanica finden wir eine schulmässige Definition des Moments. Auch bezieht sich Galilei ausdrücklich auf diese alte Abhandlung, welche er einst und zwar nur für seine Schüler aufgesetzt habe, an der vorher erwähnten Stelle der Discorsi[1]). In jener nicht dialogischen, kurzen Darstellung der Statik heisst es in der Erläuterung der Vorbegriffe[2]): „Es ist also das Moment jener Andrang (impeto), herunterzugehen, der sich aus der Schwere, der Lage und Anderem zusammensetzt, wovon eine solche Neigung (propensione) verursacht werden kann.“ Dieser Begriffsbestimmung haftet noch etwas von der gewöhnlichen Rücksicht auf die statischen Momente an. Indessen geht sie doch auf eine ganz allgemeine Fassung aus, indem sie die Kraft, wie sie im Augenblick und vor der ferneren, aus ihr hervorgehenden Bewegung gleichsam punktuell existirt, aufgefasst wissen will. Für uns bleibt die Frage, ob ein solcher von der Zeitausdehnung wesentlich absehender Begriff in dieser Hinsicht ganz streng genommen werden solle, hier gleichgültig. Galilei versucht es, die Ursache mit der Wirkung einheitlich zusammenzufassen, indem er unter dem Moment ebensowohl die Fähigkeit (virtù, talento) als die thatsächliche Wirkung (efficacia, energia) versteht. Er will darin augenscheinlich keine blosse Bestrebung und keinen blossen Grund von Möglichkeiten, sondern eine elementare Wirkungsgrösse vorgestellt haben, und die letztere wird jedenfalls irgend eine, wenn auch noch so kleine zeitliche Ausdehnung haben müssen. Doch wollen wir uns mit dieser fundamentalen Schwierigkeit, welche sich durch die ganze Mechanik bis auf den heutigen Tag fortgepflanzt hat, nicht blos gelegentlich an dieser Stelle abfinden. Hier muss nur gleich von vornherein darauf aufmerksam gemacht werden, dass die Doppeldefinitionen

---

[1]) Ibid. S. 175.

[2]) Della scienza meccanica, Bd. XI der angef. Ausg. S. 90.

der Kraft, nämlich als Ursache der Bewegung oder aber nur des Bestrebens zur Bewegung, nicht erst von heute sind, sondern mit ihrer Zweiseitigkeit schon im Galileischen Begriff des Moments liegen. Nur hat Galilei das vor den Neuern voraus, dass er weit entschiedener auf die Einheit sieht und sich mehr derjenigen Vorstellungsart zuwendet, in welcher die der Bewegungserscheinung vorangehende Ursache zu ihrem Recht gelangt und ein gemeinschaftlicher Kraftbegriff für Dynamik und Statik ins Auge gefasst wird.

Es versteht sich von selbst, dass man, wenn man will, alle Galileischen Vorstellungen über das Moment auch, der lateinischen Ableitung des Worts entsprechend, „als Kraft zur Bewegung (momentum, movimentum)“ fassen kann. Aber nicht eine solche mehr oder minder beliebige Vorstellungsart, sondern die quantitative Beziehung, welche der Begriff des Moments jederzeit zu der möglichen oder wirklichen Geschwindigkeit hat, bleibt das schliesslich Entscheidende und Kennzeichnende.

19. Wie vorher angeführt, haben gleiche Gewichte ihre Momente im Verhältniss der Geschwindigkeiten, und es setzt sich überhaupt das Moment aus „Schwere, Lage und Anderem“, was eine bestimmte Neigung (Richtung) hervorbringt, derartig zusammen, dass alle diese Umstände und Vorbedingungen des Verhaltens des bewegenden Antriebs als in der Vorstellung des besondern Moments bereits vereinigt gedacht werden. Man sieht nun leicht, wie diese Zusammensetzung aus verschiedenen Bestandtheilen für die Einfachheit, die ein Grundbegriff haben muss, keineswegs günstig sei. Indessen beschränkt sich dieser Uebelstand bei Galilei sehr erheblich dadurch, dass überall die grösste Sorgfalt auf die Sonderung jener Bestandtheile verwendet und daher thatsächlich mit einfachen Begriffen operirt wird. Auch die Vorstellung vom Moment selbst enthält wesentlich nur das, was an ihr thatsächlich niemals fehlt, und dies ist die Rücksicht auf eine Geschwindigkeit, sei die letztere nun als Quantität vorhanden oder sei sie Null. In diesem letzten Fall kann nur erst die zu ertheilende Geschwindigkeit das Maass des Moments abgeben. Galilei drückt sich alsdann so aus, dass er die einfache Schwere ohne weiteren Zusatz als Moment nimmt, während wir gegenwärtig gewohnt sind, dieses Moment in zwei, ja, wenn man will, in drei Factoren aufzulösen, indem wir es als Product einer blossen, zunächst ohne Schwere gedachten Masse und der Be-

schleunigung auffassen und diese Beschleunigung selbst für ein beliebig kleines, aber constantes Element der Zeit angeben. Hiedurch tritt zu der für die Zeiteinheit (Secunde) ausgedrückten Beschleunigung oder, mit andern Worten, zu der in dieser Zeiteinheit erzeugten Geschwindigkeitsgrösse noch ein elementarer Factor, der die in dem beliebig vorausgesetzten Zeittheilchen erzeugte Geschwindigkeitsgrösse angiebt. Die Formel $P = mg$, welche in der heutigen Mechanik üblich ist und das Gewicht P als ein Product aus der ohne Kraftaffection gedachten Masse m und der Affection der in einer Secunde die Geschwindigkeit g hervorbringenden, auf der Erde wirksamen Schwerkraft vorstellt, enthält freilich nicht das beliebig kleine Zeitelement. Dieser Umstand ist aber im Allgemeinen ganz gleichgültig, da die Secunde selbst dafür gelten kann, und es übrigens ja auch frei steht, noch ein dt auf beiden Seiten der Gleichung hinzuzufügen. Für Galileis Vorstellungsart und den Momentbegriff ist dagegen die Zurückführung auf ein ohne Grenzen beliebig klein wählbares Zeittheilchen wesentlich, da nur auf diese Weise die Angabe des Moments mit seiner Bedeutung für einen beliebigen Punkt und für den Fall des Gleichgewichts gehörig möglich wird. Ueberhaupt ist ja, wie wir gesehen haben, die Galileische Vorstellung stets punktuell und soll ausserdem den wirklichen Eindruck der Kraft repräsentiren. Um beiden Erfordernissen zu genügen, dürfen wir uns daher nicht darauf beschränken, die Proportionalitäten, wie in der angeführten Formel geschieht, ganz im Allgemeinen auszudrücken, sondern haben die augenblickliche, wenn auch etwa, wie im Fall des Gleichgewichts behinderte und daher nur eventuelle dynamische Wirkung in Anschlag zu bringen.

Viel einfacher stellt sich die Messung der Momente als dynamischer Grössen dann, wenn eine bestimmte Geschwindigkeit thatsächlich vorliegt. Wie schon gesagt, bestimmt Galilei die Verhältnisse der Momente in diesem Fall, unter Voraussetzung gleicher Gewichte, ganz einfach nach den bezüglichen Geschwindigkeiten. Ein Moment ist ihm also das Doppelte eines andern, wenn es das gleiche absolute Gewicht in doppelt geschwinder Bewegung repräsentirt. Wir erinnern gleich an dieser Stelle daran, dass später eine solche Messung, die unmittelbar an die Geschwindigkeit anknüpft, der Gegenstand einer vorwiegend metaphysischen Streitigkeit zwischen Leibniz und, wie man gewöhnlich sagt, den Cartesianern, eigentlich aber zwischen ihm

und allen Gegnern seiner metaphysischen Vorstellungsart wurde. Unter den letzteren hatten die Anhänger Newtons die meiste Bedeutung, und vorläufig sei hier gleich zu Gunsten Galileis bemerkt, dass die ursprünglichen Grundvorstellungen sich in der Hauptsache bewährt und sogar, wenn man diesen Ausdruck zulassen will, als metaphysisch vollkommen stichhaltig erwiesen haben.

Galilei hat den Stoss, wie wir später sehen werden, nur unvollständig behandelt, wenn er auch in demjenigen, was er darüber aufstellte, weit zutreffender dachte als Cartesius. Bisweilen sind sogar seine einschlagenden Vorstellungen classisch, und dies gilt namentlich von seiner Idee, dass der Stoss als aus elementaren Momenten zusammengesetzt zu betrachten sei. In dem Zusammenhang, den wir an dieser Stelle vor Augen haben, können wir jedoch jene Zergliederung des Stosses noch zur Seite lassen und uns auf die Bemerkung beschränken, dass bei Galilei jedes Moment selbst eigentlich als ein elementarer Stoss concipirt ist, wobei natürlich von der unmittelbaren Berührung irgend welcher Massen ganz abgesehen wird. Jeder elementare Antrieb, der eine gewisse Geschwindigkeit hervorbringt, möge er sie bereits selbst haben und blos übertragen, oder aber dieselbe ursprünglich erzeugen und auf diese Weise einer Masse mittheilen, wird als ein dem Stosse ähnlicher, momentaner Impuls gedacht, und auf der Summirung solcher Antriebe beruht die ganze speculative Seite in der Theorie der Fallgesetze und in derjenigen der Kraftentwicklung überhaupt. Es ist daher von der grössten Wichtigkeit, dass die Momente nach Maassgabe der vorhandenen oder zu erzeugenden Geschwindigkeiten veranschlagt werden.

20. Die Geschwindigkeit kann in gleichförmiger, ganz unveränderlicher Weise an einer Masse als Thatsache gegeben sein. Alsdann bewegt sich der Körper in jedem noch so kleinen Zeittheilchen durch einen stets gleichen Raum, und man betrachtet diese gleichförmige Bewegung als rückwärts und vorwärts ins Unbestimmte ausgedehnt. Weder eine Ursache noch eine Wirkung kommt in diesem Fall in Frage, sondern die ohne bestimmte Zeitgrenzen gedachte Bewegung ist der unmittelbare Gegenstand der Untersuchung. Eine solche veränderungslose, sich selbst gleich fortbestehende Geschwindigkeit oder Beharrungsbewegung kann nun aber auch als irgend einmal entstanden und dem entsprechend auch als irgend einmal vernichtet oder wenigstens in etwas Anderes

als Bewegung umgewandelt angesehen werden. In beiden Fällen wird es sich um eine Summation resp. Subtraction von Geschwindigkeitselementen handeln. Man wird die bestimmte Quantität Geschwindigkeit als eine Grösse denken, die durch ein Wachsen von Null an durch fortwährende Hinzufügungen gleicher Elemente erzeugt worden ist. Ebenso wird man die Geschwindigkeitsgrösse, die einer Masse anhaftet und sich durch irgend einen Vorgang verliert, als nach und nach durch den Abzug gleicher Geschwindigkeitsbestandtheile verloren gehend und sich bis auf Null gleichsam erschöpfend denken. Woher die Geschwindigkeiten kommen und wohin sie gehen, interessirt hiebei erst in zweiter Linie. Völlig gleichgültig bleibt aber zunächst die weitere Frage, wie die elementare Geschwindigkeit selbst aus etwas entstehen oder in etwas übergehen möge, was nicht Geschwindigkeit ist.

Galileis grosses Verdienst besteht in der Begründung einer von vornherein richtigen Vorstellung über die Erzeugung der Geschwindigkeiten als das Wesen der Kraftwirkung auf frei bewegliche Körper. Jede Geschwindigkeit, mit der sich eine Masse bewegt, gilt Galilei als eine solche, die entweder durch Summation elementarer Geschwindigkeiten nachweisbar entstanden ist, oder die man sich wenigstens in Ermangelung eines Nachweises in irgend einer Art so entstanden denken kann. Hieraus folgt, dass man jede bestimmte Geschwindigkeit auch wiederum in einer entsprechenden Weise zerlegt und gleichsam thatsächlich aufgelöst denken kann. Jedoch ist es vorwiegend die erstere Vorstellung, von der Galilei in der Construction der Fallgesetze Gebrauch gemacht hat. Sie grade ist es auch, die sich ganz im Allgemeinen nicht entbehren lässt, wenn die Entwicklung einer Kraft irgend welcher Art exact gekennzeichnet werden soll.

Setzte man an die Stelle der Geschwindigkeiten, welche in irgend einer Zeit erzeugt werden, von vornherein die bis zum Ende dieser Zeit durchlaufenen Räume, so würde man das Einfache mit etwas Zusammengesetztem vertauschen. Man würde ausserdem Verwirrung veranlassen, die Eleganz und schöne Einfachheit der Vorstellungsart preisgeben und sogar die blosse Erscheinungsform der veränderlichen Zustände des bewegten Körpers mit dem Bleibenden und der Hauptsache verwechseln. Da es nun aber so nahe liegt, einen wirklich durchlaufenen Raum als Anknüpfungspunkt für die Beurtheilung der Kraftwirkung zu

wählen, so müssen wir annehmen, dass Galilei durch einen besondern Grund bestimmt worden sei, die nach Maassgabe des Verfliessens der Zeit sich gleichmässig häufenden Geschwindigkeiten als unmittelbares Ergebniss der Kraftwirkung und als Grundlage aller übrigen Betrachtungen zur Geltung zu bringen.

Dieser Grund kann unseres Erachtens zunächst nichts Anderes gewesen sein, als die Bemerkung der entscheidenden Rolle, welche die Geschwindigkeiten seiner Anschauungsweise gemäss bereits in der Statik spielten. Sie waren dort gradezu den Wirkungselementen äquivalent, und die Momente im Galileischen Sinne des Worts setzten sich, wie wir gesehen haben, bei gleichen Massen nach Geschwindigkeitselementen zusammen. Die Momentengrösse konnte hienach durch Masse und Geschwindigkeit derartig bestimmt werden, dass die geringere Geschwindigkeit durch mehr Masse und umgekehrt die geringere Masse durch grössere Geschwindigkeit ausgeglichen und aufgewogen wurde.

Unter dieser Voraussetzung war es sehr natürlich, auch auf der neuen Bahn eigentlich dynamischer Untersuchungen die Geschwindigkeit für das Merkmal des Kraftelements zu nehmen und unter den verschiedenen Erscheinungsformen der Wirkung einer Kraft die am Ende irgend einer Zeit gewonnene Geschwindigkeit als am meisten charakteristisch hervorzuheben. In der That ist mit dieser Geschwindigkeit allerdings auch ein Raum zur Grundlage genommen; aber es ist dies nicht derjenige, welcher gleichsam im Rücken der Kraftwirkung als durchmessen in Frage kommt, sondern derjenige, welchen der Körper völlig gleichmässig und ohne Aufhören durchlaufen würde, wenn die Kraft nicht mehr weiter auf ihn wirkte. Von den allmälig aufgehäuften Geschwindigkeiten ist nichts verloren gegangen, und alle Geschwindigkeitselemente finden sich in der schliesslichen Geschwindigkeit repräsentirt. Ferner ist die Geschwindigkeit etwas, was von der Zeitdauer, während welcher sie sich in der Bewegung bethätigt, völlig unabhängig ist. Die Geschwindigkeit kann niemals durch die Angabe einer blossen Raumdurchmessung ersetzt werden, weil sie, wie das Gewicht, eine Eigenschaft vertritt, die zu jeder Zeit, also in dem Raum ohne Grenzen vorhanden ist. Bezieht man dagegen einen mit einer gewissen Geschwindigkeit durchlaufenen Raum noch ausserdem auf die entsprechende Zeitdauer, so benutzt man das eine Mal die Zeiteinheit zur Verhält-

nissbestimmung zwischen Zeit und Raum, d. h. zur Angabe der Geschwindigkeit, und das andere Mal zur Abgrenzung der Dauer des Zustandes, in welchem die Geschwindigkeit oder die verschiedenen Geschwindigkeiten sich bethätigten. Man hat im letztern Fall die Vorstellung von einer begrenzten Kraftwirkung vor Augen, während man in dem andern Fall die grenzenlos beharrliche Geschwindigkeit als Vertreter der ganzen, in ihr gleichsam niedergelegten Bewegungsgrösse vorstellt.

21. Wenn die Erzeugung der Geschwindigkeiten die Kraftwirkung kennzeichnet, so versteht sich von selbst, dass die einmal erzeugten Geschwindigkeiten als an sich, d. h. abgesehen von irgend welcher äussern Störung, ohne Grenzen fortbestehend gedacht werden müssen. Jedoch ist dieses Grundgesetz der Mechanik eine Naturthatsache, deren Feststellung nicht ohne Weiteres möglich war. Die Trägheit der Materie in Rücksicht auf den Zustand der Ruhe leuchtet ein. Jene zweite Seite des Trägheitsgesetzes aber, derzufolge der Bewegungszustand nach Richtung und Geschwindigkeit beharrt, ist so wenig ein selbstverständliches Axiom, dass sie vielmehr allen gewohnheitsmässigen Vorstellungen zuwiderläuft. Die gradlinige Fortsetzung der Bewegung mit derselben Geschwindigkeit ins Unbestimmte ist ein Vorgang, dessen Paradoxie seine Entdeckung lange hindern musste. Da nun von der Einsicht in denselben jeder Schritt in der Dynamik abhängt, so haben wir in der Galileischen Beharrung und in der Anwendung dieses Begriffs auf die Erklärung und Construction der zusammengesetzten Erscheinungen einen ähnlichen Grundpfeiler der Wissenschaft anzuerkennen, wie in der Vorstellung von der Erzeugung der Geschwindigkeiten. Erst aus beiden Ideen zusammengenommen lassen sich die Phänomene der Kraftwirkung erklären und construiren und sind von Galilei insbesondere die Fallgesetze und deren Combinationen entwickelt worden.

Eine Gelegenheit, das Beharrungsprincip, welches sonst stillschweigend überall zu Grunde liegt, auch in der unverkennbarsten Weise auszusprechen und hervorzuheben, bietet sich Galilei bei der Behandlung der parabolischen Wurfbewegung. Dieser Gegenstand macht das Thema des vierten Tages der Discorsi aus, und es ist bezeichnend, dass gleich in den ersten lateinisch gehaltenen Entwicklungen das „Fortdauernde“ und „Unzerstörliche“ der gleichförmigen Bewegung (in einer horizontalen Ebene) als leitende

Grundvorstellung formulirt[1]) wird. Uebrigens ist bemerkenswerth, dass die Beharrung der gleichförmigen Bewegung nicht mit der Fortdauer der Ruhe in ein einziges Princip der Trägheit zusammengefasst wird, — ein Umstand, der durchaus nicht als Nachtheil zu betrachten ist. Die später angenommene Vereinigung der beiden Ideen[2]) hat in ihrer gewöhnlichen Fassung den Charakter einer Verbindung von zwei ungleichartigen Bestandtheilen, denen in der That Nichts als die höchst allgemeine logische oder, wenn man will, metaphysische Vorstellung von dem Mangel einer Veränderungsursache des in der Zeit unverändert fortbestehenden Zustandes gemeinsam ist. Der Vorzug, welcher der spätern Vorstellungsart des Trägheitsgesetzes etwa zugeschrieben werden möchte, wird aber ausserdem jedenfalls dadurch wieder aufgewogen, dass die metaphysische Erklärungsart des Princips die Beharrung der Bewegung nicht zu verbürgen vermag. Das Beharrungsprincip ist, wie schon gesagt, eine Naturthatsache, die in ihrer Einfachheit durch Zergliederung der Verfahrungsarten der Natur in den zusammengesetzten Hergängen nachgewiesen und herausgehoben sein will, aber nicht, wenigstens nicht gänzlich, als eine Denknothwendigkeit angesehen werden darf. Es spricht daher zu Gunsten der Galileischen Methode, dass jene spätere, unhaltbare Auffassungsart des Beharrungsprincips in ihr keine Stütze findet. Nichtsdestoweniger fehlt es in der Galileischen Methode nicht an dem speculativen Bestandtheil, wie wir sogleich sehen werden, wenn wir die Entstehungsart der Hauptergebnisse der neuen Forschungsrichtung untersuchen.

Drittes Capitel.

Entstehungsart der Galileischen Hauptergebnisse und Gestaltung der verschiedenen Principien.

22. Man hat die Frage aufgeworfen, ob Galilei zu seinen dynamischen Resultaten, namentlich also zu den Fallgesetzen, zuerst auf empirischem Wege gelangt sei und hinterher seine Speculationen nach Maassgabe der so erworbenen Einsichten ein-

---

[1]) Bd. XIII der angef. Werke, S. 222.

[2]) Vergl. jedoch im sechsten (posthumen) Tag die Stelle S. 323 über die Erhaltung der Ruhe und der Geschwindigkeit.

gerichtet, oder aber sich zuerst die abstracten Bewegungsschemata als wahrscheinliche Formen, nach denen auch die Natur verfahren müsse, construirt und dann erst die dafür sprechenden Erfahrungsindicien aufgesucht habe. Die Beantwortung dieser für die principielle Entwicklung der Wissenschaft sehr erheblichen Frage gestaltet sich nicht ganz so einfach, als es bei einer ersten Erwägung den Anschein hat. Allerdings sind die letzten endgültig beweisenden Experimente auf der schiefen Ebene von Galilei erst auf Grund von Voraussetzungen gemacht worden, die bereits alles zu Erweisende dem Gedanken nach vollständig enthielten. Allein es handelt sich auch gar nicht um dieses spätere Stadium der Entwicklung und Feststellung der neuen Einsichten, sondern um deren ursprünglichste Hervorbringung. In dieser letztern Beziehung lässt sich nun wiederum nicht in Abrede stellen, dass die ersten Anregungen zur Conception irgend einer Bewegungsart von den Thatsachen der Natur selbst ausgehen müssen, und dass die völlige Loslösung des Denkens zur freien, selbständigen Gestaltung der Vorstellungen erst ein zweiter Vorgang sein könne. Die Alten waren bekanntlich in dieser, dem Spiel verwandten Verfahrungsart und in der Behandlung spontan erzeugter Gebilde nicht nur heimisch gewesen, sondern auch mehr als zuträglich befangen geblieben, so dass ihnen die aprioristische Methode als die natürlichste und fast als die ausschliesslich maassgebende erschienen war. Grade aber Galilei sowie sein genialer Vorgänger Leonardo da Vinci befanden sich mit ihrem Verhalten und ihren Tendenzen im schroffsten Gegensatz zu der antiken Art und Weise, soweit nämlich die letztere über das Gebiet blosser Mathematik in dasjenige der Naturthatsachen fälschlich übertragen wurde. Die Aristotelische Naturphilosophie war zur Zeit Galileis der Repräsentant der unhaltbarsten Vorstellungs- und Verfahrungsarten, und wir dürfen daher voraussetzen, dass der entschiedenste und mächtigste Gegner der bei Aristoteles vorherrschenden Denkweise die letztere nicht selbst zum Leitfaden seiner eignen Nachforschungen gemacht habe.

Nach den vorhandenen Aeusserungen Galileis lässt sich über die innerliche gedankliche Entstehung seiner dynamischen Grundeinsichten nur soviel feststellen, dass er sich auf blosse Beobachtungen hin entschlossen habe, die Vorstellung einer gleichförmig beschleunigten Bewegung mathematisch auszubilden und dann auf Grund dieser Initiative des blossen Gedankens experimentelle

Bestätigungen zu suchen. Von welcher Art jedoch die ersten, so zu sagen rohen und unbestimmten Beobachtungen gewesen seien, welche die Veranlassung zu den ideellen Constructionen und der experimentellen Verfolgung der Sache gegeben hatten, lässt sich nach dem Stande der Quellen nicht ausmachen. Eine gewisse, wenn auch geringfügige Tradition hat auch hier ihre Rolle gespielt, und es mag besonders die falsche Meinung, dass die Geschwindigkeiten wie die Räume wachsen, Einiges dazu beigetragen haben, Galilei zum näheren Nachdenken über die Form und Grösse der Fallbewegung zu veranlassen.

Auch ist nicht zu übersehen, dass die Stetigkeitsvorstellung in Galileis Denken einen rein mathematischen Charakter hatte und in dieser Gestalt geeignet war, seine Aufmerksamkeit auf die Art und Weise zu lenken, in welcher die Natur bei den verschiedensten Gelegenheiten die Geschwindigkeitsgrössen durch allmälige Steigerungen hervorbringt. Hier scheinen sogar die Bewegungen der Thiere für Galilei einen Anknüpfungspunkt abgegeben zu haben. So heisst es im Eingang des 2. Buchs (3. Tag) in den Discorsi [1]: „Schliesslich hat uns zur Erforschung der natürlich beschleunigten Bewegung, gleichsam an der Hand, die Beachtung der Einrichtung und Gewohnheit der Natur selbst in allen ihren übrigen Werken hingeleitet, in denen sie sich der ersten, einfachsten und leichtesten Mittel zu bedienen pflegt; denn Niemand, meine ich, wird glauben, dass das Schwimmen oder Fliegen auf eine einfachere oder leichtere Weise bewerkstelligt werden könne, als grade auf diejenige, welche die Fische und Vögel aus natürlichem Instinct anwenden."

Bald darauf [2]) wird nun der einfache Weg näher gekennzeichnet und die einfache Summation der Geschwindigkeiten nach Verhältniss der verfliessenden Zeitelemente zur Grundvorstellung gemacht. Schon vorher hatte der Autor ausdrücklich bemerkt, dass er auch sofort hätte von der Fiction der gleichförmig veränderlichen Bewegung ausgehen können. Für das Weitere, was in diesem Zusammenhang bei Galilei in Frage kommt, können wir auf unsere Erörterung seiner Vorstellung von der elementaren Erzeugung der Geschwindigkeiten zurückverweisen. Bezüglich der Hauptsache, die wir hier festzustellen haben, ist jedoch nach dem Angeführten klar, dass der Entdecker der Fallgesetze ziemlich

---

1) Bd. XIII der angef. Ausg. S. 154. 2) Ibid. S. 155.

schnell von einigen Andeutungen der Beobachtung zur speculativen Initiative übergegangen sei, und dass die Vorzüglichkeit seines Verfahrens besonders darin bestanden habe, sofort die einfachsten Processe, die sich denken lassen, zum Ausgangspunkt seiner Schematisirungen zu machen. Die Naturthatsache, auf die er sich stützte, war das Wachsen der Geschwindigkeiten. Die Speculation sagte ihm, dass dieses Wachsen stetig erfolgen müsse, und da er von der Statik her gewohnt war, in der Geschwindigkeit das Indicium der Kraft zu sehen, so betrachtete er auch in der Fallbewegung die Geschwindigkeitselemente als die elementaren Aeusserungen der Kraft. Die Zeit in ihrer Gleichmässigkeit erschien ihm aber als diejenige Form der Hinzufügung von Element zu Element, in welcher auch die einfachsten Theilbethätigungen einer Kraft vor sich gehen müssten. Auf diese Weise gelangte er zu jener Vorstellung, wonach die Wirkung der Kraft in der Zeit durch die aufeinanderfolgende, den Zeittheilen proportionale Hervorbringung von Geschwindigkeiten repräsentirt wird. Die Definition der gleichförmig veränderlichen Bewegung war hienach nur noch eine blosse Sache der Formulirung. Im Wesentlichen war der Hergang, dessen so zu sagen nur phoronomische Erscheinung das den Zeiten quadratisch proportionale Durchlaufen der Räume ist, bereits durch die Hinweisung auf die Erzeugungsform der Geschwindigkeiten charakterisirt. Ja diese Vorstellungsart ist weit eingehender, als diejenige, welche die thatsächlich durchlaufenen Räume zum sofortigen Ausgangspunkt macht. Auch ist sie wissenschaftlicher, indem sie das Einfache bemerken lässt, aus welchem die zusammengesetzte Erscheinung erst ein weiteres Ergebniss ist.

23. Mit Recht hat auch Lagrange das Genie Galileis weniger in glücklichen Beobachtungen als in der Kraft der Zergliederung und Entwirrung der sich unserm Geist in sehr verwickelter Gestalt darstellenden Naturthatsachen gesucht. Eine in dieser Beziehung von den Schriftstellern bereits mehrfach angeführte Stelle der Analytischen Mechanik[1]) mag auch hier noch einmal einen Platz finden, da falsche Ideen über das Wesen echter Induction am besten durch die richtige Würdigung classischer Beispiele widerlegt werden. Ein solches würde aber Galilei nicht sein, wenn bei diesem Forscher jene Kraft des sichtenden Gedankens gemangelt hätte, ohne welche sich die trägen Thatsachen schwerlich von

[1]) Ausg. von 1811, Bd. I, zweite Abth. Sect. I, Eingang.

selbst zu wirklich bedeutenden Erweiterungen des Wissens umgestalten. Lagrange stellt den astronomischen Entdeckungen die dynamischen Theorien gegenüber, indem er sagt: „Die Entdeckungen der Jupiterstrabanten, der Venusphasen, der Sonnenflecke u. s. w. erforderten nur Teleskope und Fleiss; aber es bedurfte eines ausserordentlichen Geistes (génie extraordinaire), um die Gesetze der Natur in Erscheinungen zu entwirren, die man stets vor Augen gehabt hatte, deren Erklärung aber nichtsdestoweniger den Nachforschungen der Philosophen immer entgangen war.“

Die inductive Speculation ist mithin das Auszeichnende in der Verfahrungsart Galileis gewesen. Sie bestand in dem mathematisch richtigen Denken in solchen Formen, die natürlich sind und aus diesem Grunde auch von vornherein die Bürgschaft in sich tragen, dass ihnen in der Natur Etwas entsprechen müsse. Indessen würde die fragliche Methode noch sehr unvollkommen gekennzeichnet bleiben, wenn man nicht den wichtigsten Bestandtheil derselben noch besonders hervorhöbe. Die Fallgesetze wären auch nicht einmal annähernd festgestellt worden, wenn nicht von vornherein der Gedanke maassgebend geworden wäre, fernerhin alle Vorstellungen in Rücksicht auf die Verhältnisse der in ihnen vorkommenden Grössen näher zu bestimmen und sich nicht mit unbestimmten gleichsam schweifenden Ideen zu begnügen. Ja selbst die blos hypothetische Einführung von Quantitäten hätte keine wahrhafte Anknüpfung an die Natur zu ergeben vermocht und würde im Kreise des blossen Denkens verblieben sein. Erst die bestimmte Messung der Grössenverhältnisse in den Erscheinungen konnte aus dem Cirkel blosser Speculation hinausführen und die Brücke zu den Wirklichkeiten der Natur schlagen. Ueber formale Verhältnisse der Grössen, z. B. über beschleunigtes Zunehmen oder die zusammengesetzte Proportionalität in den Fallräumen hätte man ohne Entscheidung speculiren und streiten können, falls auf die Verbindung des Gedankens mit der Wirklichkeit durch die Ermittlung der Beschleunigung oder des Fallraums der ersten Secunde kein Werth gelegt worden wäre. Sogar das Experiment, welches etwa blos die Verhältnisse bestätigt, nicht aber die absoluten Grössen erwiesen hätte, würde in einem gewissen Sinne noch eine Unvollkommenheit gewesen sein. Erst die Aufnahme des rein Zufälligen oder vielmehr Thatsächlichen in den Gedanken und in die Rechnung konnte die ganze Tragweite der Speculation entwickeln, und diese Seite der Methode,

welche auf der Erheblichkeit der absoluten, in der Natur vorkommenden Grössen beruht, war allein im Stande, eine Dynamik der Natur hervorzubringen und in die wirklichen Hergänge einzudringen.

Alle absoluten Grössenbestimmungen, die sich auf die einfachsten Elemente der Erscheinungen beziehen, sind auch eine Art von Principien; denn sie können durch nichts Anderes ersetzt und aus nichts Anderem erschlossen oder gewonnen werden. Sie sind so gut principielle Thatsachen, wie die Nothwendigkeiten des Denkens, und wenn man sie nicht gleich den Axiomen ausgeworfen oder sonst im System nach Verhältniss ihrer Bedeutung gehörig ausgezeichnet hat, so rührt dies von der einseitig formalen Tradition her, die ihre Vorstellungen über die Beschaffenheit und die nothwendigen Elemente eines schlüssigen Systems dem Vorbild der reinen Mathematik entlehnte oder, was noch schlimmer war, die gewöhnliche logische Form der vorherrschend blos speculativ behandelten andern Disciplinen zur Richtschnur nahm. Nun kann aber eine Wissensgruppe, die Erfahrungselemente einschliesst, in Rücksicht auf die letzteren nur dann eine strenge Form gewinnen, wenn sie die Natur des Empirischen in ihrer Reinheit unangetastet lässt und dasselbe auch in der logischen Verfassung des Wissensstoffes gehörig würdigt. Eine solche Würdigung bleibt aber unmöglich, solange die absoluten Grössenbestimmungen nicht einen ähnlichen Rang, wie die Axiome, zu behaupten vermögen.

Galilei war sich übrigens selbst sehr deutlich des Unterschiedes bewusst, durch welchen er sich seinen Vorgängern gegenüber auszeichnete. Im Eingang zum dritten Tag der Discorsi spricht er sich über die früheren Arbeiten und Bücher im Allgemeinen und zwar dahin aus, dass in ihnen wenig beobachtet oder bewiesen sei. „Einiges von geringerer Bedeutung wird angemerkt, wie z. B., dass die natürliche Bewegung der herabfallenden schweren Körper fortwährend beschleunigt werde. Nach welchem Verhältniss aber die Beschleunigung geschehe, ist bis jetzt nicht kundgegeben worden; denn Niemand hat, soviel ich weiss, bewiesen, dass die von dem Beweglichen aus der Ruhelage in gleichen Zeiten durchlaufenen Räume dasjenige Verhältniss unter sich einhalten, welches die von der Einheit an aufeinanderfolgenden ungraden Zahlen haben. Auch hat man wohl beobachtet, dass die Geschosse oder geworfenen Körper irgend eine krumme Linie beschreiben; dass dieselbe jedoch eine Parabel

sei, hat Niemand kundgethan. Die Richtigkeit dieser Sätze und vieles andere Wissenswerthe wird von mir bewiesen werden, und es wird, was, wie ich glaube, höher anzuschlagen ist, der Zugang zu einer höchst umfassenden und vorzüglichen Wissenschaft erschlossen werden, für welche diese unsere Arbeiten die Elemente bilden müssen, und in welcher tiefer dringende Geister das Verborgenere und Entlegenere bemeistern werden."

24. Wohl nur höchst selten mag es einem bahnbrechenden Forscher gelungen sein, in so wenigen und einfachen Worten die Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft seines Gegenstandes gleich treffend zusammenzufassen. Die Aufmerksamkeit auf die mathematische Form, die Grössenverhältnisse und die absoluten Grössen war das neue Princip, welches in der Anwendung auf die Eigenschaften des freien Falles und der Wurfbewegung die Elemente einer neuen Wissensgattung ergab, die später unter den Händen Newtons zu einer Erklärung des Weltmechanismus oder wenigstens einer wesentlichen Seite desselben wurde. Hier ist also genau angegeben, was früher mangelte, und es ist ebenso richtig vorausgesehen, dass die neuen Grundlagen eine ausserordentliche Tragweite haben würden.

Dem Wesen der Sache muss auch die innere Entstehungsart derselben in dem ersten Schöpfer ihrer Elemente entsprechen. Der Antheil der Naturphilosophie im echten Sinne dieses Worts und ihrer in der That speculativen Voraussetzungen darf daher bei einem Galilei nicht nur nicht geleugnet, sondern muss auch noch besonders hervorgehoben werden, um den weiten Abstand bemerklich zu machen, der zwischen den Verfahrungsarten, auf welche sich die rationelle Mechanik und die Erforschung des Weltmechanismus gegründet hat, und denjenigen Manipulationen besteht, die von einem Bacon empfohlen worden sind. Wir werden in einem besondern Capitel die Einflüsse der Philosophie und hiemit auch zugleich die besondere Gestaltung des eben erwähnten hochwichtigen Unterschiedes behandeln. Hier sei nur noch darauf hingewiesen, dass Galilei in seiner Hauptentdeckung weit mehr auf der Tragweite der Speculation fusste, als Newton in der seinigen. Die Fallgesetze wurden erst rationell vollständig schematisirt und dann erst empirisch festgestellt. Dagegen bildeten bei Newton die Keplerschen Gesetze die Grundlage, und es war nicht viel mehr als eine blosse Zergliederung ihres Inhalts nothwendig, um eine Vorstellung von den elementaren Verhältnissen

der kosmischen Bewegungskräfte, namentlich von der umgekehrt quadratischen Wirkung und schliesslich auch von der Allgemeinheit der Gravitation zu gewinnen.

Wenn aber auch im Geiste Galileis die Entwicklung aus den einfachsten Anschauungen und Principien vorherrschte, so soll hiemit nicht gesagt sein, dass diese Principien bei ihm auch stets sofort als solche abgesondert, formulirt und in der Weise der späteren Zeiten nach allen Richtungen gehandhabt wurden. Eines der lehrreichsten Beispiele für diesen Sachverhalt ist das unentbehrliche Princip der Kräftezusammensetzung. Galilei wendet gewisse sehr erhebliche Seiten dieses Princips bei vielen Gelegenheiten, namentlich aber bei dem Nachweise an, dass die aus der Wirkung der Schwerkraft und einer horizontalen Geschwindigkeit entstehende Bahn eine Parabel sei. Dieser Beweis ist eine reine Sache der mathematischen Consequenz, sobald die Zusammensetzung der Kräfte principiell festgestellt ist.

Man erinnere sich (Nr. 17—19) der principiellen Rolle, welche der Begriff des Moments als Synonym der Kraft in Galileis Anschauungsweise spielt, und man wird nicht überrascht sein, auf einen Satz über die Zusammensetzung der Momente oder Antriebe zu treffen. Im vierten Tag der Discorsi, d. h. in der Abhandlung der parabolischen Wurfbewegung, wird das Princip der Kräftezusammensetzung an zwei Stellen für den Fall entwickelt, dass die Richtungen der Kräfte aufeinander rechtwinklig stehen. In der einen Stelle[1]) wird gesagt, dass die Momente (oder Impetus) von zwei gleichförmigen Bewegungen, von denen die eine horizontal, die andere vertical ist, ein Moment ergeben, welches ihnen beiden in der Potenz (d. h. im Quadrat) gleich sei. Der Beweis wird so geführt, dass die Zusammensetzung der Bewegungen in der Diagonale des Rechtecks, welches die Grössen der Seitenmomente, d. h. die ihnen entsprechenden Geschwindigkeiten bilden, vorausgesetzt und nun aus der Grösse der Diagonale auf das in ihr bethätigte Gesammtmoment zurückgeschlossen wird. Es ist also nicht die Zusammensetzung rein phoronomischer Bewegungen oder vielmehr blosser Bewegungserscheinungen, was in dem fraglichen Princip die Hauptsache bildet; sondern es handelt sich um die Bestimmung der Zusammensetzung von eigentlichen Kräftegrössen, d. h. der Grössen derjenigen Ursachen, welche als Momente

[1]) Discorsi etc. Bd. XIII der angef. Ausg. S. 234.

oder Impetus dem Durchlaufen der Räume zu Grunde liegen und diesen blossen Phänomenen stets gleichsam vorangehen. Da wir noch mehrfach die verschiedenen Phasen zu berühren haben werden, in denen das Princip der Zusammensetzung oder Zerlegung der Kräfte im Entwicklungsgange der Mechanik erscheint, so ist es zweckmässig, gleich von vornherein in aller Strenge den grossen Unterschied zu beachten, der zwischen den Vorstellungen über die Zusammensetzung blosser Bewegungserscheinungen und denjenigen über die unmittelbare Kräftezusammensetzung besteht. Die Ideen der ersteren Art gehören der reinen Mathematik an und erfordern nur die rein intellectuale Combination von zwei Bewegungsvorstellungen. Sie sind ganz und gar phoronomisch, so dass Begriffe von materiellen Kräften, ja von realen Ursachen überhaupt gar nicht hineinspielen. Aus diesem Grunde ist es jederzeit leicht gewesen, das Zusammensetzungsprincip blosser Bewegungserscheinungen klar zu machen, und ein gewisses Maass von Vorstellungen über derartige Zusammensetzungen hat sogar in der höheren Geometrie der Alten und namentlich bei Archimedes eine Rolle gespielt.

Der für die Mechanik wichtige Schritt besteht aber grade in der Feststellung des Princips für die unmittelbaren Kräfte selbst und zwar dergestalt, dass hiedurch auch die Zusammensetzung in den Gleichgewichtsverhältnissen miteingeschlossen wird. In der statischen Anwendung des Zusammensetzungsprincips zeigt sich recht deutlich, dass die Zusammensetzung der Bewegungen ein blosses Hülfsmittel und blosses Erkenntnissprincip der eigentlichen Kräftezusammensetzung, für sich selbst aber und nach dem Rangverhältniss der Realitäten nur die secundäre Erscheinung eines allgemeineren Grundsatzes ist.

25. An der zweiten Stelle[1]) finden wir eine mehr populäre Erläuterung des Inhalts der ersten, indem aus den horizontalen und verticalen Seitenmomenten 3 und 4 der resultirende Impetus 5 nach Maassgabe des Pythagoreischen Satzes entwickelt wird. Es ist jedoch in Rücksicht auf die ganze Darstellung zu bemerken, dass Galilei begreiflicherweise nirgend ohne die ganz allgemein gefasste, d. h. noch nicht näher durch die Beachtung der Richtungsverschiedenheiten bestimmte Idee der Kräftezusammensetzung zu operiren vermag. Auch die Vereinigung der Theilelemente

[1]) Ibid. S. 243.

derselben Kraft nach derselben Richtung ist bereits eine eigentliche Kräftezusammensetzung, und nur die moderne Gewohnheit, die uns stets an das sogenannte Parallelogramm der Kräfte ohne Weiteres als an ein fundamentales Princip oder wohl gar als an ein Axiom denken lässt, veranlasst vielfach die Vernachlässigung der ganz primitiven Vorstellungen über Addition oder Subtraction von Kräften in derselben Richtung. Dennoch sind es grade diese einfachsten Vorstellungen, durch welche überhaupt erst ein klarer Begriff von der Grösse einer Kraft möglich wird. Eine Kraft als Grösse denken, heisst bereits, sie als eine Zusammensetzung von Theilkräften vorstellen. Es ist daher sehr natürlich und begreiflich, dass Galilei, der überall das Bewusstsein der letzten Principien steigerte und in der eminentesten Weise exact zu gestalten verstand, auch angemessene Grundvorstellungen über die allereinfachste Zusammensetzungsart der Kräfte hegte. Nur mit Hülfe dieser Grundvorstellungen konnte er das Gesetz der Fallräume ableiten, und sogar schon seine primitive Idee von der Erzeugung der Geschwindigkeiten (vgl. Nr. 19—20) schloss eine Art der Zusammensetzung von Elementarkräften ein, zumal die Geschwindigkeit ihm ja stets als unmittelbares Maass des Moments galt.

Nichtsdestoweniger ist es grade die Kräftezusammensetzung selbst, in welcher sich die Grenzen der Galileischen Vorstellungsart recht entschieden bemerken lassen. Sowohl in der Statik als in dem neugeschaffenen Gebiet der Dynamik ist die Vorstellung von der reducirten oder relativen Wirkung einer Kraft in Bezug auf eine andere, nicht ihr selbst in ihrer freien Bethätigung angehörige Richtung am wenigsten sicher ausgebildet. Gegenwärtig ist dieser Fall sehr leicht auf eine einfache Zerlegung der Kraft zurückzuführen, so dass für die in Frage kommende, fest vorgeschriebene Wirkungsrichtung nur die Projection der Kraft auf diese Richtung in Anschlag kommt. Nun operirte freilich auch Galilei thatsächlich richtig, wenn es sich um derartige, theils statische, theils dynamische relative Kraftbethätigungen handelte. Indessen war ihm dieser Gesichtspunkt der unmittelbaren einfachen Reducirung, namentlich in den dynamischen Anwendungen auf die Accelerationen keineswegs geläufig, wie man besonders daran sehen kann, dass er ihn in einer Hauptfrage, die er erst nach der Herausgabe der Discorsi zu erledigen vermochte, nur nach vielen vergeblichen Nachforschungen verwerthen lernte. Diese

Frage betraf den Beweis des als unbewiesenes Princip gebrauchten Satzes, dass die auf der schiefen Ebene und in der Verticale bis zum Horizont oder überhaupt bis zum gleichen Niveau gefallenen Körper auch jeder nach seiner Richtung dieselbe Geschwindigkeit erlangt haben werden. Dieser Satz war von grosser Erheblichkeit für die Vergleichung des freien Falles mit demjenigen auf der schiefen Ebene, sowie für die Vergleichungen des Fallens auf verschieden geneigten Ebenen. Er eignete sich wenig, als unbewiesenes Princip zu dienen, und nur der Mangel eines Beweises und die grossen Schwierigkeiten, welche sich der Auffindung der einfachen Gründe seiner Wahrheit so sehr entgegenstellten, haben ihm diese eigenthümliche Rolle zugetheilt. Uebrigens ist ein derartiger Gebrauch eigentlicher Sätze in der Form unbewiesener Principien in der Entwicklungsgeschichte der Mechanik keine Seltenheit; einer der berühmtesten Fälle dieser Gattung wird uns in Huyghens Auflösung des Problems vom Oscillationscentrum begegnen.

26. Die Behandlung der eben erwähnten Schwierigkeit ist für die Handhabung der Principien bei Galilei von so grosser Wichtigkeit und wirft ein so entschiedenes Licht auf sein dynamisches und statisches Denken, dass wir diesen Fall genauer darstellen und erörtern müssen.

Der betreffende Satz lautet bei Galilei wörtlich[1]: „Die Geschwindigkeitsgrade eines Bewegten, welches mit natürlicher Bewegung auf beliebig geneigten Ebenen herabsteigt, sind beim Anlangen auf der Horizontalen immer gleich, wenn die Hindernisse entfernt worden.“ Jedoch wurde er bereits zusammen mit der Definition der gleichförmig beschleunigten Bewegung als Postulat[2]) hingestellt, während sich der Beweis desselben an der erst erwähnten, in der Leydener Ausgabe von 1638 noch nicht vorhandenen, später eingeschobenen Stelle[3]) vorfindet. Dort wird nun, indem AB die schiefe Ebene, AC die Verticale d. h. auch zugleich die Höhe derselben über dem Horizont bezeichnet, folgender Gang eingeschlagen. Der Ausgangspunkt des ganzen Beweises ist die Vorstellung, dass der Impetus in der Verticalen zu demjenigen auf der schiefen Ebene sich verhalte, wie die Länge der letzteren zu deren Höhe. Aus diesem Grunde wird zur Ermittlung desselben nach Richtung der schiefen Ebene auf der letzteren ein Stück AD so abgetragen, dass es die dritte

---

[1]) Ibid. 3. Tag, S. 177. [2]) Ibid. S. 163. [3]) Ibid. S. 178.

Proportionale zu der Länge und der Höhe bildet. Ein solcher Abschnitt ergiebt sich natürlich durch Fällung eines Loths von dem Fusspunkt der Verticalen auf die schiefe Ebene, was jedoch hier nur nebensächlich von uns zur Erläuterung hinzugefügt wird. Da „die Momente sich wie die Räume verhalten", so repräsentirt AD das Stück, welches in derselben Zeit auf der schiefen Ebene durchlaufen wird, in welcher die ganze Verticale AC im freien Fall durchmessen wird.

Halten wir hier einen Augenblick ein. Die Momente der Schwere eines von A längs AB und eines eben solchen längs AC fallenden Körpers verhalten sich wie AC zu AB, weil die Schwerkraft, deren freie Richtung in AC fällt, auf der schiefen Ebene AB nur zum Theil zur Geltung gelangt, nämlich insofern sie auch als längs AB wirksam gedacht werden kann. Sie kann aber in der Richtung AB nur mit demjenigen Theil wirksam sein, der ihre Projection auf dieser festen Richtung vorstellt. Dem Durchlaufen von AC entspricht daher in derselben Zeit die Zurücklegung der Strecke AD. Nach einer uns heut geläufigeren, aber weniger natürlichen und weniger einfachen Vorstellungsweise, kann auf der schiefen Ebene AB nur diejenige Kraft längs derselben zur Bewegung dienen, welche sich als Componente ergiebt, wenn man die freie Schwerkraft in einen auf die schiefe Ebene normal wirkenden Druck und einen freien, dynamisch wirkenden Bestandtheil zerlegt. Wir wollen hier diese verschiedenen Vorstellungsarten noch nicht weiter prüfen, sondern erinnern nur an dieselben, um den Stützpunkt des Galileischen Beweises recht deutlich hervortreten zu lassen. Offenbar war für Galilei die Vorstellung von dem Verhältniss der Momente, welche die Schwerkraft in den beiden Richtungen ausübt, axiomatischer Natur, und er ersetzte daher in dem hier fraglichen Beweise ein complicirteres Princip durch ein einfacheres. Dennoch hat diese Vorstellung von dem Verhältniss der Momente auf der schiefen Ebene und in der freien Richtung, so geläufig sie auch der statischen Betrachtungsart schon damals war, für die dynamische Anwendung etwas Unbefriedigendes. Man verlangt unwillkürlich nach noch grösserer Deutlichkeit und näherer Begründung, und diese Forderung muss sich noch steigern, wenn man bei genauerem Zusehen bemerkt, dass auch für das rein statische Verhältniss die Reducirung der Kraft nach einer gegebenen Richtung die Rolle eines blossen Postulats gespielt habe. Hievon jedoch später bei der Behandlung



der statischen Ideen Galileis. Folgen wir nunmehr, nach Beleuchtung des Ausgangspunkts, dem ferneren Gange des Beweises.

Die Geschwindigkeiten in C und D verhalten sich ebenfalls wie die ursprünglichen Momente; denn diese Momente haben sich nach beiden Linien während derselben Zeit und zwar der Zeit proportional summirt. Die Momente sind ja wesentlich die Elementargeschwindigkeiten, und die Geschwindigkeiten erzeugen sich wie die Zeit. Da man nun das Verhältniss der Geschwindigkeit in D zu derjenigen im Fusspunkte der Verticalen C kennt, so ist nur noch ein gleiches Verhältniss zwischen B und D nachzuweisen. Die Geschwindigkeiten in B und D müssen sich aber wie die Zeiten verhalten, während deren sie erzeugt worden sind. Diese Zeiten sind aber wiederum diejenigen, in denen die Räume AB und AD durchlaufen werden. Jene Proportionalität der Geschwindigkeiten und der Zeiten folgt aus der Definition der gleichförmig beschleunigten Bewegung. Aus der weiteren Theorie dieser Bewegung steht aber bei Galilei schon fest, dass jene Zeiten, deren Verhältniss gesucht werden soll, sich wie die Quadratwurzeln der durchmessenen Räume AB und AD verhalten. Es wird daher nur die mittlere Proportionale zwischen AB und AD zu nehmen sein. Sie ist nach der Construction durch die Linie AC bereits repräsentirt, und das Verhältniss von AB zu dieser mittleren Proportionale AC wird das gesuchte der Zeiten und mithin der Geschwindigkeiten in B und D sein. Die Geschwindigkeiten in C und B haben sich also als in gleichem Verhältniss zu der Geschwindigkeit in D stehend erwiesen und sind mithin selbst gleich.

Dieser Beweis hat für die neuere Anschauungsweise manches Ungewohnte, weil er noch mehrfach den Umweg geometrischer Schlüsse einschlägt, wo wir die Verhältnisse unmittelbar analytisch bestimmen und uns nicht erst durch dritte und mittlere Proportionalen zu helfen brauchen. Indessen ist grade die rein mechanische Schlussweise in diesem Beweis ein schönes Beispiel für die Einfachheit und Präcision der principiellen Grundvorstellungen Galileis. Die Momente oder Impetus, die Geschwindigkeiten und deren Erzeugung nach Verhältniss der Zeit, die Proportionen der Zeiten, — dies Alles tritt deutlich hervor, so dass man einen Einblick in die Handhabung der Begriffe gewinnt. Nur ein einziger Punkt verbleibt in einem gewissen Maass von Schatten; dies ist, wie schon erwähnt, die dynamische Annahme, dass die Verhältnisse der Momente bei dem Anfang der Bewegung und mithin

auch in jedem ferneren Punkte derselben, insofern sie in diesem letzteren als neue elementare Antriebe der Schwerkraft gedacht werden, im Verhältniss der Länge zur Höhe der schiefen Ebene stehen. Wären diese Momente rein im Sinne der Statik verstanden, so würde dieser Ausgangspunkt bereits etwas begründeter sein. So aber, wie sie in dem erwähnten Beweis vorkommen, schliessen sie zugleich die dynamische Idee ein, dass der Gesammtwirkung der freien Schwerkraft in der Fallbewegung AC für dieselbe Zeit ein schiefer Fallraum AD entspreche; denn die Räume, hiess es, verhielten sich wie die Momente.

Nun hat diese Anwendung der Vorstellung von dem Verhältniss der Momente allerdings kein Bedenken mehr, sobald die statische Grundvorstellung gesichert und die Uebertragung dieser Vorstellung in das Gebiet der Bewegung völlig gerechtfertigt ist. Es handelt sich also um die Aufsuchung der Grundlage der statischen Vorstellung von der Richtungsreduction der Kräfte und dann um die Methode, durch welche die statischen Wahrheiten in der Dynamik anwendbar werden. Wir haben daher, ehe wir der Galileischen Dynamik weiter folgen, einen Punkt aus der Statik zur Erörterung zu bringen.

27. In der Statik Galileis spielt das Gesetz der schiefen Theilwirkung einer Kraft, welche in ihrer ursprünglichen, eignen und freien Richtung zu wirken verhindert ist, thatsächlich die Rolle eines Axioms. Man kann sich hievon durch die Betrachtung der Erläuterung überzeugen, die[1]) dem Princip hinzugefügt wird, dass gleiche Gewichte den Punkt des Gleichgewichts in der Mitte ihrer Verbindungslinie haben. Es wird nämlich zu dieser axiomatischen Annahme, die mit derjenigen des Archimedes übereinstimmt, in der Form einer nebensächlichen Bemerkung der hochwichtige Umstand hinzugefügt, dass man bei der Messung der Abstände der Gewichte, um deren Wirkung zu erhalten, immer die perpendiculären Abstände von den Richtungslinien der Schwerkraft zu nehmen habe. Hienach wird die so reducirte statische Wirkung für den Fall postulirt, dass die gleichen Hebelarme einen Winkel bilden, oder vielmehr nur für den Fall, dass der eine der Hebelarme aus der Horizontalen verschoben gedacht wird, während der andere in seiner horizontalen Lage verbleibt. Eben diese letztere Vorstellung, sammt der Idee von der nach Maassgabe des

---

[1]) Della scienza meccanica, Bd. XI, S. 91—92 der angef. Ausg.

perpendiculären Abstandes reducirten Kraftwirkung, dient denn auch später zum Beweis des statischen Verhältnisses an der schiefen Ebene. Das Fundament dieses Beweises, durch welchen die schiefe Ebene auf den Hebel zurückgeführt werden soll, ist mithin jenes Postulat von der Messung der Abstände oder, mit andern Worten, von der Bestimmung jener Theilwirkung, die von einer Kraft in einem Winkel gegen ihre freie Richtung ausgeübt wird. Man untersuche jeden Bestandtheil des Beweises, den Galilei in seiner kleinen Statik[1]) von dem Gleichgewicht an der schiefen Ebene giebt, und man wird es bestätigt finden, dass hier, wie überall sonst bei derselben Frage, grade die Hauptsache als blosses Postulat stillschweigend zu Grunde liegt. Es würde daher eine Illusion sein, einen derartigen Beweis für genügend zu halten.

In der That geht Galilei an der fraglichen Stelle von der Betrachtung eines gleicharmigen Hebels aus. Den einen Arm desselben lässt er sich aus der horizontalen Lage durch Drehung in verschieden geneigte Stellungen senken, während der andere Arm seine horizontale Position beibehält. Die Momente am gedrehten Arm ändern sich nun nach Maassgabe des perpendiculären Abstandes von derjenigen Richtungslinie der Schwerkraft, welche durch den Unterstützungs- und Drehpunkt des Hebels geht. Natürlich sind ursprünglich gleiche Beschwerungen vorausgesetzt. Auf den verschiedenen Punkten der Kreisbahn aber, welche von dem Endpunkt des gleichsam gedrehten Hebelarms beschrieben wird, haben die angebrachten Gewichte nur die nach Maassgabe der Abstände reducirten Wirkungen. Da nun die geneigten Positionen des Hebelarms nichts weiter leisten, als dass sie die Richtung vorschreiben, in welcher die Schwerkraft jedesmal wirksam werden kann, so lassen sie sich durch die als fest gedachte Kreisbahn selbst ersetzen, und man hat es nunmehr einerseits mit der freien verticalen Wirkung und andererseits mit einer schiefen Wirkung auf irgend einem Punkte der Kreisbahn zu thun. Beide Wirkungen würden durch Vermittlung des Hebels einander das Gleichgewicht halten, sobald die Bedingungen nach Maassgabe des perpendiculären Abstandes erfüllt wären, d. h. sobald das schief wirkende Gewicht im Verhältniss seines geringeren Abstandes grösser genommen wäre. Nun ist aber die Vermittlung des Hebels gleichgültig, wenn man nur Alles bestehen lässt, was er leistet, um die Richtung und

---

[1]) Della scienza meccanica, ibid. S. 116—118.

gegenseitige Einwirkung der Kräfte vorzuschreiben. Diese Leistung bleibt aber in äquivalenter Weise bestehen, wenn man ganz von dem Hebel absieht und sich einen Punkt auf der festen Kreisbahn mit jenem Punkt in Verbindung denkt, der unter der ursprünglichen Voraussetzung den Endpunkt des festen Hebelarms bildete, jetzt aber als längs einer verticalen Ebene in der Richtung der Schwerkraft niedergezogen gedacht wird. Die Tangente in irgend einem bestimmten Punkte der festen Kreisbahn repräsentirt alsdann die schiefe Ebene und zwar ganz exact, insofern bei der Bestimmung des Gleichgewichts nur ein einziger Punkt in Frage kommt. Die schiefe Ebene bildet nämlich für einen solchen strengen Punkt das genaue Aequivalent der Wirkung der festen Kreisbahn. Diese Kreisbahn schrieb eben nur die feste Wirkungsrichtung für den jedesmal in Frage kommenden Punkt vor. Das Weitere ist nun reine Sache der Geometrie, indem sich durch ein paar Ueberlegungen sofort der Satz ergiebt, dass sich die Wirkung der verticalen Kraft längs der schiefen Ebene im Verhältniss der Länge zur Höhe reducirt.

Dies ist der Gang des Galileischen Beweises, und man kann nicht verkennen, dass er für seinen Gegenstand zu complicirt sei. Die feste Kreisbahn ist offenbar nicht das Einfache, wovon man erst zur schiefen Ebene überzugehen hätte, sondern umgekehrt eignet sich die schiefe Ebene weit eher zum Ausgangspunkt für die Erörterung des Gleichgewichts und der Bewegung auf krummen Oberflächen oder krummlinigen Bahnen. Uebrigens liesse sich aber im Galileischen Beweise die Einschaltung der festen Kreisbahn ganz wohl entbehren und sofort an jedem fraglichen Punkt eine schiefe Ebene einführen. Ein solches Verfahren würde aber den Hauptübelstand doch niemals beseitigen können. Dieser entscheidende Mangel besteht nicht nur, wie schon angedeutet, darin, dass die Reduction der Wirkung nach einer bestimmten Richtung ursprünglich postulirt wurde, sondern noch weit mehr in dem Umstande, dass, streng genommen, das ganze Gesetz des Gleichgewichts auf der schiefen Ebene wesentlich nichts weiter als die Regel jener Wirkungsreduction für eine vorgeschriebene Richtung enthält. Der Satz von der schiefen Ebene ist seinem erheblichen Inhalt nach nichts als jenes Postulat selbst, und der Beweis ist mithin eine reine Täuschung, insofern er wesentlich nichts mehr producirt, als die hauptsächlichste Voraussetzung, auf die er sich stützt.

28. Aus den vorangehenden Artikeln hat sich das Verhältniss ergeben, in welchem Galileis Dynamik zu seiner Statik stand. Es hat sich gezeigt, dass die Theorie der Bewegung auf der schiefen Ebene auf die Statik zurückführte und in dieser Beziehung mit Schwierigkeiten zu kämpfen hatte. Es ist ferner deutlich geworden, dass der erst spät und auf einem Umwege gehobene Mangel des vollständigen Beweises der dynamischen Theorie ein ungelöstes Gegenstück in der Statik hatte. Auch ist hiemit zugleich sichtbar geworden, welchen Antheil die exacte Begründung der statischen Verhältnisse für diejenigen Aufgaben der Dynamik in Anspruch nehmen könne, in denen es sich nicht mehr um völlig freie Bewegungen und deren freie Combinationen handelt. Galileis grösste Leistung liegt auf dem Felde der freien Bewegungen, und die völlig systematische Combination derselben mit den in Gestalt beliebiger fester Schranken vorgeschriebenen Bedingungen gehört erst einer späteren Zeit an. Ja diese letztere Aufgabe ist noch heute, wenn auch materiell gelöst, so doch formell, d. h. in Rücksicht auf das Zutreffende der Vorstellungsart der Kräftecombinationen, noch nicht vollständig abgethan, wie wir dies in der Kritik der späteren Methoden und namentlich in derjenigen der seit Varignon gewöhnlichen Auffassung der Kräftezusammensetzung nachweisen werden. An dieser Stelle haben wir jedoch, nach Erledigung der erörterten Berührungspunkte mit der Statik, jetzt zur Dynamik und zu dem Zusammenhang ihrer Hauptergebnisse und Methoden zurückzukehren.

Um jedoch für die späteren Betrachtungen gleich hier den Grund zu legen, knüpfen wir an die bisher erörterten Berührungspunkte der Statik und Dynamik noch eine allgemeine Bemerkung, deren Tragweite bis in die gegenwärtige Verfassung der mechanischen Lehren hineinreicht und geeignet ist, eine freiere Anschauung von dem gegenseitigen Verhalten der Kräfte herbeizuführen.

Ueberall, wo der Action eine Reaction entspricht oder, mit andern Worten, wo nicht der Begriff einer einzelnen freien Kraft, sondern das Zusammenwirken von mindestens zwei Kräften in Frage kommt, die in ihrem Sinne nicht vollständig übereinstimmen und sich daher nicht einfach addiren, — da wird auch neben dem Bewegungsresultat oder neben der nach Aussen verfügbaren, gleichsam freien statischen Combinationswirkung noch ein anderer, so zu sagen innerer Vorgang bestehen, vermöge dessen sich die beiden

Kräfte zu einem Theil ins Gleichgewicht setzen. Auf diese Weise können Kräfte gar nicht in gegenseitige Beziehung und Wechselwirkung treten, ohne sich mindestens zu gewissen Theilen in das Verhältniss des Gleichgewichts zu setzen. Abgesehen von zwei äussersten Fällen, die in der stetigen Reihe der verschiedenen Beziehungen als zwei gleichsam punktuell vereinzelte Gestaltungen dastehen, wird jedes Zusammen von Kräften in seinem Ergebniss aus einem Bewegungsresultat und aus einem statischen Aufhebungsresultat gemischt sein. Dies zeigt bei näherer Betrachtung auch die fundamentale Combinationsform des Kräfteparallelogramms. Hier sind die aus den Ecken auf die Diagonale gefällten gleichen und entgegengesetzten Lothe die Repräsentanten der gegenseitig an den beiden Seitenkräften aufgehobenen und, im strengen Sinne des Worts, im Gleichgewicht befindlichen Theilwirkungen. Recht deutlich wird diese gegenseitige Aufhebung in dem vereinzelten Fall, in welchem die Kräfte gleich und dem Sinne nach völlig entgegengesetzt sind, oder wenn man die Abnahme des freien Bewegungseffects erwägt, wie sie für gleiche Kräfte bei der Annäherung ihres Winkels an zwei Rechte, in unbeschränkter Convergenz gegen Null eintritt. In diesem äussersten Fall heben die Kräfte sich nicht blos zum Theil sondern ganz auf, und diese Thatsache ist ja auch der Charakter desjenigen beharrlichen Verhältnisses, welches wir kurzweg als Gleichgewicht bezeichnen, und bei welchem wir keinen Rest eines freien Bewegungseffects voraussetzen, welcher von den in Betracht gezogenen Kräften selbst herrührte. Jede Bewegung eines solchen im Gleichgewicht befindlichen Kräftesystems wird vielmehr als von äussern Kräften herstammend vorgestellt. Der andere extreme Ausnahmefall ist derjenige, in welchem sich freie Kräfte, die völlig in demselben Sinne wirken, einfach addiren. Hier ist lauter Bewegungseffect und gar kein Aufhebungseffect vorhanden; aber es besteht auch, was wohl zu beachten ist, gar keine Wechselwirkung. Der Winkel, den die Kräfte sonst bilden, ist Null, d. h. nicht vorhanden, und hiemit ist auch die gegenseitige Beziehung aufgehoben. Doch wie man diese Verhältnisse auch vorstellen möge, der Satz von der Mischung der Bewegung und des Gleichgewichts bleibt derartig die allgemeine Regel, dass man unter dieselbe auch die äussersten Fälle in einem gewissen Sinne subsumiren kann, indem man das eine Mal den Bewegungsbestandtheil, das andere Mal den im Gleichgewicht befindlichen Bestandtheil gleich Null setzt. Mit

dieser logisch genauen Anschauungsweise haben wir einen Leitfaden gewonnen, um alle künftigen Beziehungen der Statik und Dynamik in ihrem wahren Lichte erscheinen zu lassen und auf ihre letzten innersten Gründe zurückzuführen. Nach dieser Betrachtungsart, die keine willkürliche Auffassung, sondern ein nothwendiges Ergebniss des zerlegenden Denkens ist, sind alle Wechselwirkungen der Kräfte in erster Linie partielle Gleichgewichtsverhältnisse, und alle Bewegungserscheinungen kennzeichnen sich ebenfalls der Regel nach als partielle Kräftebethätigungen auf der Grundlage eines gleichsam gebundenen partiellen Gleichgewichts. Hieraus erklärt sich denn auch mit einem Schlage, wie die Dynamik nur auf der Unterlage der erweiterten statischen Erkenntnisse hat fortschreiten können, und wie umgekehrt die Hauptprincipien der Statik auf gewisse Bewegungsvorstellungen, namentlich auf die virtuellen oder blos möglichen Bewegungen zurückgeführt werden mussten. Streng genommen kann man also ebensowenig sagen, dass die Dynamik ganz auf die Statik, als umgekehrt, dass die Statik auf die Dynamik als auf die Sphäre ihrer ersten Principien hinweise. In Wahrheit bilden beide Seiten der Mechanik ein einheitliches System, welches nur darin eine Doppelheit zeigt, dass die Aufhebungseffecte den Bewegungseffecten heterogen sind.

Fernerhin werden wir überall da, wo die Beziehung der Statik zur Dynamik in Frage kommt, auf die eben dargelegte Bemerkung zurückverweisen. Was aber speciell die Vorstellungsart Galileis anbetrifft, so steht es nach dem Bisherigen fest, dass der Begründer der modernen Dynamik vorwiegend nur die freien Kräftewirkungen ins Auge gefasst und die Combinationen solcher Wirkungen mit Gleichgewichtsbeziehungen fast nur für die schiefe Ebene und auch in diesem Fall nur unter grossen Hemmungen zu behandeln vermocht hat.

29. Schon die Theorie des Pendels, in welcher Galilei zwar den ersten entscheidenden Schritt, aber vornehmlich nur in empirischer Weise that, ist ein Zeugniss dafür, mit welchen Hemmungen die Anwendung der für freie Kräftewirkungen festgestellten dynamischen Gesetze auf statisch näher bestimmte Combinationen zu kämpfen hatte. In derartigen Fällen häuften sich auch sofort die rein mathematischen Hindernisse der Durchführung an sich richtiger Gedanken, und wir dürfen uns daher nicht wundern, dass die Theorie des Pendels erst unter den Händen von Huyghens

ihre vollkommenere Gestalt erhielt. Nichtsdestoweniger war auch schon der einfache Satz Galileis, dass „die Längen sich umgekehrt wie die Quadrate der Anzahlen der in derselben Zeit erfolgenden Schwingungen verhalten“ [1]), von bahnbrechender Bedeutung. Er wird im Zusammenhang der angegebenen Stelle als das Ergebniss wiederholter Experimente eingeführt; aber es ist nicht zu vergessen, dass Galilei grade durch die gelegentliche Beobachtung der pendulirenden Bewegungen herabhängender Leuchter zu seinen dynamischen Speculationen angeregt worden sein soll. Auch sein Irrthum [2]), demzufolge der Fall durch den Kreisbogen nicht etwa blos schneller als derjenige durch die Sehne, sondern, was nur bei der Cykloide zutrifft, der schnellste sein soll, zeugt wenigstens von dem Versuch, für das Pendel eine strengere mathematische Theorie aufzufinden. Von der allgemeinen Form der Pendelbewegung ist in einer sehr anschaulichen Weise schon in dem berühmten astronomischen Dialog die Rede. Dort wird die Gleichheit der Geschwindigkeiten für die correspondirenden Punkte von gleicher Erhebung, sowie die höchste Steigerung im tiefsten Punkt, ferner die Abnahme der Geschwindigkeit auf Null für den höchsten Punkt in den exactesten Ausdrücken beschrieben und noch ausserdem der hochwichtige Satz hervorgehoben [3]), dass die im tiefsten Punkt erlangte Geschwindigkeit einen Impetus repräsentire, der grade zur Erhebung auf diejenige Höhe, von welcher das Pendel gefallen war, ausreichend sei. Es wird dann weiter ausgeführt, wie ein Körper, der gegen den als schwer gedachten Mittelpunkt der Erde fiele und sich von dort aus gleichsam in einer Durchbohrung frei weiter bewegen könnte, ein unbeschränktes Hin und Her von Schwingungen ausführen müsste, indem er durch den Fall grade diejenige Geschwindigkeit erlangte, welche ihn zum Aufsteigen oder vielmehr weitern Hinausgehen bis an den andern Oberflächenpunkt der Erde befähigte. Die allgemeine Grundform dieser Vorstellung ist richtig, obwohl Galilei in seiner besondern Voraussetzung einen nebensächlichen Fehler beging, da der Fall durch einen graden Canal, der durch den Mittelpunkt der Erde führt, nicht so betrachtet werden kann, als wenn die Schwerkraft vom Mittelpunkt aus in constanter Weise wirkte. Indessen ist

---

[1]) Discorsi e dimostrazioni matematiche, Bd. XIII der Werke, 1. Tag, S. 99.

[2]) Ibid. 3. Tag, S. 217 im Scholium zur 36. Proposition.

[3]) Dialogo intorno ai due massimi sistemi etc. Bd. I der angef. Ausg. 2. Tag, S. 250.

die Berichtigung, dass nämlich die Schwerkraft im Innern der Erde der einfachen Entfernung vom Mittelpunkt proportional abnimmt, für den Hauptpunkt unerheblich; denn die oscillatorische Bewegung bleibt nichtsdestoweniger in ihrer allgemeinen Form bestehen, wenn auch die Geschwindigkeiten in den einzelnen Punkten der Bahn sich in ihrer absoluten Grösse verändert finden.

Aus dem Vorangehenden ersieht man, dass Galilei jene entscheidende dynamische Grundvorstellung, die noch heute das Fundament des mechanischen Denkens bildet, in einer sehr allgemeinen Weise aufgefasst hatte, und dass er bereits jenen Principien nahekam, welche später durch die Arbeiten von Huyghens die Gestalt von Vorstellungen über die Erhaltung der Kraft annahmen. Die Idee, dass die Geschwindigkeit, die ein frei fallender Körper erlangt, dieselbe sei, vermöge deren er zu seiner ursprünglichen Höhe aufsteigen kann, ist sicherlich zuerst durch Reflexionen über das Pendel entstanden. Grade sie ist es aber, die zum maassgebenden Typus für die Vorstellungen von der Erhaltung der Kraft wurde. Denn in der That hat Huyghens, wie wir später sehen werden, nichts weiter gethan, als jene Idee von einem einzelnen fallenden und aufsteigenden Körper auf den Schwerpunkt eines Systems von Körpern übertragen.

30. Der Grund, aus welchem die Pendeltheorie erst später eine vollkommenere Gestalt gewann, ist schon für das einfache Pendel sicherlich die Schwierigkeit der genaueren mathematischen Behandlung gewesen. Noch heute bedürfen wir der Approximationen, um dieses scheinbar so einfache Problem durch wirkliche Rechnung zu bemeistern und die Schwingungsweite zu bestimmen, innerhalb deren das oben angegebene einfache Galileische Verhältniss zwischen den Längen und den umgekehrt correspondirenden Quadraten der Schwingungszahlen ohne erfahrungsmässig merklichen Fehler zutreffen muss. Jener Umstand kann uns nun einen Fingerzeig geben, wo wir die mathematischen Grenzen der Galileischen Dynamik zu suchen haben. Er kann uns aber auch andererseits bemerklich machen, mit welchen einfachen geometrischen Mitteln die am meisten fundamentalen Vorstellungen der Dynamik ursprünglich durchgeführt und angewendet wurden. Wo wir heute sofort von Integralen reden, bediente sich Galilei sehr einfacher geometrischer Constructionen oder ganz elementarer arithmetischer Vorstellungen. Dennoch leistete er für die Hauptsache genau dasselbe, was später in einer weniger elementaren

Form einen oft weit weniger deutlichen Ausdruck fand. Da nun überdies jene ersten mathematischen Grundvorstellungen von der stetigen Summation der Krafttheilchen nebst den zugehörigen einfachsten Resultaten den Typus für alles Weitere bilden, so müssen wir uns bei ihnen einen Augenblick aufhalten. Hiebei werden wir ausserdem noch den Vortheil haben, den Antheil des rein Mathematischen an der Hervorbringung mechanischer Einsichten von vornherein mit leichterer Mühe bestimmen zu können, als wenn wir diese principielle Unterscheidung erst bei den mehr verwickelten Aufgaben wollten eintreten lassen.

Schon im Dialog über die Weltsysteme und nicht erst in der rein mechanischen Hauptschrift der Discorsi findet sich die mathematische Begründung der Fallgesetze. Für die Darstellung des vom Anfang der Bewegung an durchlaufenen Gesammtfallraums ist die Darstellung der Wirkungen der in jedem Punkt vorhanden gewesenen und nach Maassgabe des Zeitverlaufs erzeugten Geschwindigkeiten von entscheidender Bedeutung. Diese Darstellung wird nun[1]) in der strengsten Weise dadurch möglich gemacht, dass die Zeiten durch die wachsenden Theile einer Linie und die den Zeitpunkten entsprechenden Geschwindigkeiten durch eine unbegrenzte Anzahl senkrechter Linien repräsentirt werden. Auf diese Weise ergiebt sich ein Dreieck, welches durch seine Fläche die Summe aller Geschwindigkeiten ausdrückt. Durch Ergänzung zum Rechteck wird von Galilei sofort der Satz gewonnen, dass die Bewegung mit der zuletzt erlangten Geschwindigkeit in derselben Zeit den doppelten Raum ergeben haben würde. Dieser heute ganz triviale Satz beruht auf der Ueberlegung, dass jede Geschwindigkeitswirkung einen elementaren, durch die entsprechende Linie repräsentirten Raum ergiebt, indem des Beharrungsgesetzes wegen jede ursprüngliche Geschwindigkeit durch die ganze Zeitdauer hindurch fortwirkt. Es ist sehr leicht, das weitere Gesetz, dass die Fallräume wie die Quadrate der Zeiten wachsen, hieraus abzuleiten[2]), denn sie wachsen, wie ja auch die geometrische Vorstellungsart zeigt, im zusammengesetzten Verhältniss der Zeiten und der Geschwindigkeiten. Da aber die Geschwindigkeiten selbst wie die Zeiten zunehmen, so ist dies Verhältniss eben kein anderes als das quadratische in Beziehung auf die Zeit.

Was man sonst noch unter dem Namen der Fallgesetze an

---

[1]) Dialogo, ibid. S. 252. [2]) Discorsi, 3. Tag, S. 169.

verschiedenen Beziehungen in Frage bringt, ist nichts als der Inbegriff rein mathematischer Consequenzen jener ersten Grundvorstellung. Die Summation der stetigen Wirkungen einer mit der Zeit zunehmenden Geschwindigkeit, — das ist der Angelpunkt der ganzen Aufgabe, und seine Erledigung ist, abgesehen von absoluten Grössenbestimmungen, die vollständige Auflösung des Grundproblems der Dynamik und des wesentlichen Gehalts in der Theorie der Fallgesetze. Was hat aber, soweit es sich um mathematische Operationen handelt, zu jener Lösung geführt? Offenbar nichts Anderes, als die geometrische Veranschaulichung des Hergangs, durch welchen eine Grösse nicht blos nach Maassgabe einfacher Hinzufügungen, sondern im zusammengesetzten Verhältniss zunimmt. Bringen wir diese Art der Zunahme auf einen analytischen Ausdruck, so erhalten wir das halbe Quadrat der veränderlichen einfachen Grösse als Summe der verschiedenen Hinzufügungen, die vom Nullwerth an bis zu irgend einem beliebigen Werth gerechnet werden. Mit andern Worten ist dies das Integral zu dem Product aus der Geschwindigkeit und dem Element der Zeit. Hiebei darf uns der Umstand nicht stören, dass in der geometrischen Vorstellungsart Galileis sofort das Product der Zeit mit der Geschwindigkeit eingeführt wird und beide Grössen als um ihre bezüglichen Elemente wachsend vorgestellt werden. Wir werden in der späteren Entwicklung der Mechanik noch mehrfach an dieses letztere Product erinnert werden; jedoch ist es, sobald es sich um die blosse Proportionalität zur Zeit oder zur Geschwindigkeit handelt, jenen andern Producten völlig äquivalent, in denen das Quadrat der Zeit oder das der Geschwindigkeit figurirt. Man kann daher mit dem entschiedensten Recht sagen, dass Galilei in seinem Dreieck der Fallräume sofort ein, wenn auch sehr einfaches Integral der Geschwindigkeiten oder, genauer gesagt, der Geschwindigkeitswirkungen zur Darstellung gebracht habe.

Sehen wir ebenso von der modernen Form des analytischen Ausdrucks wie von der geometrischen Vorstellungsart ab und lassen wir den für beide Gestaltungen maassgebenden Gedankengehalt hervortreten, so gelangen wir zu einer Stufe der Abstraction, die uns künftig für das Verständniss der principiellen Fragen, besonders aber für die Betrachtung der Kräftewirkung im Stoss von grossem Nutzen sein kann. Das Problem der Bestimmung des Fallraums reducirt sich, sobald der dynamische Gedanke von

der stetigen und der Zeit proportionalen Erzeugung der Geschwindigkeiten einmal gefasst ist, auf die ganz abstracte Frage, was aus einer Grösse werde, die derartig wächst, dass die zuwachsenden Elemente stets sofort der Grund eines neuen Wachsens werden. In dem hier erheblichen Fall findet erstens ein einfaches Wachsen der Räume durch die bereits bestehenden Geschwindigkeiten statt, und ausserdem liefert jedes neu hinzugetretene Element für alle weitere Zeit seinen Beitrag zur Vergrösserung. Auch kann man für die Sache noch einen andern sehr einfachen Ausdruck finden, indem man sagt, dass sich die Grössen der Räume erzeugen, indem die Geschwindigkeiten beharrlich mit dem Verlauf der Zeit die Räume gleichsam hervorbringen, selbst aber erst nach Maassgabe der Zeit entstehen und zur Wirksamkeit gelangen.

Wie man aber auch für diese erste Grundvorstellung die Rechenschaftsablegung gestalten möge, man wird stets, wenn man den ferneren Thatsachen der geschichtlichen Entwicklung gerecht werden will, grosses Gewicht darauf legen müssen, dass die Vorstellung von der stetigen Summation der zunehmenden Geschwindigkeiten diejenige Anschauungsweise sei, durch welche sich die späteren Ideen über die Wirkung der Kräfte am natürlichsten begründen lassen. Wir haben früher gesehen, dass für Galilei die Geschwindigkeit oder das Moment der eigentliche Repräsentant der Kraft ist. Nun darf aber schon im Hinblick auf die Fallräume die Geschwindigkeit nicht mit einer Geschwindigkeitswirkung verwechselt werden. Die Geschwindigkeitswirkung wird entweder zeitlich unbeschränkt oder in Beziehung auf eine bestimmte, wenn auch noch so kleine oder unbeschränkt kleine Dauer gedacht. In dem einen wie in dem andern Fall gehört zur nähern Bestimmung einer solchen Wirkung die Angabe der Zeit, während welcher man dieselbe vollzogen denkt. Man muss also die Geschwindigkeit als wirksam denken, und ihr nicht etwa blos die Bedeutung eines augenblicklichen, gleichsam punktuellen Verhältnisses beilegen, wenn man den Sinn der Grössen verstehen will, die den Quadraten oder vielmehr halben Quadraten der Geschwindigkeiten entsprechen. Die Geschwindigkeiten selbst summiren sich nur einfach, während sich ihre Wirkungen aus dem zusammensetzen, was vermöge des Trägheitsgesetzes und des jedesmal neu hinzukommenden Elements erfolgt.

31. In der vollendetsten Gestalt finden sich die zwei Grund-

gesetze des freien Falles in den Discorsi[1]) dargestellt. Dort wird der Satz von der quadratischen Zunahme der Fallräume auf denjenigen zurückgeführt, welcher den Fallraum durch eine gleichförmige Bewegung mit der halben Endgeschwindigkeit entstehen lässt. Die Endgeschwindigkeiten selbst verhalten sich nun wie die Zeiten; die den halben Endgeschwindigkeiten jedesmal entsprechenden Räume verhalten sich aber ebenfalls wie die Zeiten, während deren diese gleichförmigen Geschwindigkeiten als wirksam fingirt werden. Es ist mithin das Verhältniss der Zeiten in doppelter Beziehung oder zweimal maassgebend, d. h. mit andern Worten, die Räume wachsen nach dem Quadrat der Zeit. Von Galilei wird im Verlauf der angeführten Stelle noch ausdrücklich hinzugefügt, dass man auch die Quadrate der Geschwindigkeiten anstatt der Zeiten als Maass des Wachsens der Fallräume wählen könne. Auch an einer andern Stelle[2]) heisst es wörtlich: „die durchlaufenen Räume stehen im quadratischen Verhältniss der Zeiten und folglich der Geschwindigkeitsgrade (e conseguentemente de' gradi di velocità)." Derartige, gelegentlich wiederholte Aussprüche sind für den Anfang jener Vorstellungsart wichtig, in welcher das Quadrat der Geschwindigkeit als Maass der Kräftewirkung eine Rolle zu spielen beginnt. Man wird sich bezüglich der späteren Entstehung dieser Anschauungsweise jedoch stets zu erinnern haben, dass bei Galilei das maassgebende Product ursprünglich immer das der Zeit und der halben Geschwindigkeit gewesen war, in welchem dann entweder an Stelle der Geschwindigkeit die ihr proportionale Zeit oder an Stelle der Zeit die ihr proportionale Geschwindigkeit substituirt werden konnte, ohne das Verhältniss selbst zu ändern.

Die weitere Ausführung der dynamischen Principien durch Galilei bietet, abgesehen von dem, was wir bereits in Rücksicht auf die schiefe Ebene und auf die Bewegungszusammensetzung in der Wurflinie erwähnt haben, kein besonderes, d. h. für die Gestaltung der mechanischen Grundsätze erhebliches Interesse. Jedoch muss noch der Satz hervorgehoben werden, dass sich die Fallzeit auf der schiefen Ebene zu derjenigen in der Verticalen wie die Länge der schiefen Ebene zu ihrer Höhe verhalte[3]) — ein Satz, dessen Beweis noch durch das Axiom von den gleichen Niveaugeschwindigkeiten geführt werden musste. Die Geschwindig-

---

1) Ibid. S. 166—68. 2) Ibid. S. 177. 3) Ibid. S. 179.

keiten sind nach dieser unbewiesenen Voraussetzung jedesmal in den zwei Punkten gleich, welche auf derselben Horizontallinie liegen. Sie entsprechen einander überall Punkt für Punkt, so dass für die verticale wie für die schiefe Bahn dieselben Geschwindigkeitsgrade aufeinanderfolgen. Da nun aber die Räume ungeachtet der gleichen Geschwindigkeiten verschieden sind, so müssen in demselben Verhältniss die Zeiten verschieden sein, in denen diese Räume durchmessen wurden. Dieser Schluss Galileis ist insofern merkwürdig, als er deutlich macht, wie die längere Wirksamkeit der nämlichen Geschwindigkeiten auf der schiefen Ebene eine ganz andere Form des Fallens hervorbringt.

Die Beschreibung der Versuche auf der schiefen Ebene[1], durch deren Anstellung erst der vollständige Erfahrungsbeweis für die Form und die Verhältnisse der Fallbewegung geführt werden konnte, ist sicherlich das wichtigste Bestandstück der Theorie, soweit dieselbe auf Thatsachen und nicht blos auf Speculationen über die mögliche Gestaltung einer gleichförmig beschleunigten Bewegung beruht. Die verschieden geneigten Lagen der Versuchsrinne, die glatte Auslegung der letztern und die Messung der Zeit durch eine Wasservorrichtung sind Umstände, die für den Experimentator jener Zeit, der die Galileischen Versuche etwa controliren wollte, grosse Bedeutung haben mussten, gegenwärtig aber nur erwähnt zu werden brauchen, zumal wo es sich nur um die Erörterung der Principien handelt.

Die verschiedenen Sätze vom Fall auf der schiefen Ebene sind nichts als geometrische Anwendungen und Verallgemeinerungen des oben angeführten Fundamentalprincips, welches selbst wiederum das Ergebniss der Combination der Vorstellung vom statischen Verhältniss und der allgemeinen Theorie der gleichförmig beschleunigten Bewegung ist. Grade der Beweis, zu welchem Galilei erst ganz zuletzt gelangte, ist, wie wir in Nr. 26 gesehen haben, ein Zeugniss dafür, dass die Berufung auf das Gleichgewichtsverhältniss an der schiefen Ebene und die Einführung desselben in die Dynamik nicht zu umgehen war. Das vorher erwähnte, als Axiom gebrauchte Gesetz von den gleichen Niveaugeschwindigkeiten erscheint in der neuen Fassung ja grade als Consequenz jener statischen Reduction der Schwerkraft.

---

[1]) Ibid. S. 172.

Was die Wurfbewegung anbetrifft, die im vierten Tage der Discorsi abgehandelt ist, so beruht ihre Theorie auf dem Zusammensetzungsprincip der Bewegungen und der Momente oder Kräfte, welches von uns in Nr. 25 im Sinne Galileis dargestellt wurde. Gleich der erste Satz[1]) spricht aus, dass sich ein Körper, der eine horizontale gleichförmige Bewegung erhalten habe und dabei der Schwere ohne Hindernisse unterworfen sei, in einer Halbparabel bewege. Unter Voraussetzung des Trägheitsprincips und der für die sich rechtwinklig schneidenden Bewegungsantriebe festgestellten Zusammensetzungsregel ist alles Uebrige blosse Sache der geometrischen Charakteristik der Bahnlinie und hängt nicht weiter von specifisch mechanischen Ueberlegungen ab.

Die Theorie der Wurfbewegung ist der erste Fall, in welchem die einfachen dynamischen Gesetze nicht, wie auf der schiefen Ebene, mit statischen Grundsätzen, sondern wiederum mit Bewegungsgesetzen in Verbindung treten. Diese Unterscheidung ist für die weitere geschichtliche Entwicklung nicht unwichtig. Die eine Reihe der Fortschritte, als deren Hauptträger zunächst Huyghens in Frage kommt, betrifft die Combinationen der statischen Verhältnisse mit den rein dynamischen Gesetzen. Das Hauptproblem ist in dieser Richtung die Theorie des zusammengesetzten Pendels. Eine zweite Reihe von Fortschritten bezieht sich auf die freie Bewegung der Körper und findet ihre Ausbildung auf Veranlassung der erfahrungsmässigen kosmischen Vorgänge. Sie wird wesentlich durch Newton vollzogen, der jene von Galilei behandelte Art der Combination mit einer Trägheitsbewegung verallgemeinerte und so eine universelle Theorie der krummlinigen Bewegungen und der sie erzeugenden Kräfte aufstellte. Es ist jedoch bemerkenswerth, dass die neuen Wendungen sich von denen Galileis weit weniger entfernen, als der Schritt, den der Begründer der Dynamik selbst gethan hatte, und der ihn in beiden Richtungen über die einfache Betrachtung des freien Falles bereits hinausgeführt hatte. Der Fall auf der schiefen Ebene und die parabolische Wurfbewegung sind mithin als zwei typische Verzweigungen des ursprünglichen Stammes der Dynamik zu betrachten. Wir werden daher bei der Verfolgung der weitern Entwicklung der Theorien unser Augenmerk zunächst

[1]) Ibid. S. 222.

auf den Zustand der statischen Principien zu richten haben, wie er theils durch Galilei selbst, theils durch dessen ältere oder jüngere Zeitgenossen repräsentirt wurde.

Viertes Capitel.

Die statischen Principien im Zeitalter Galileis.

32. Um die moderne Entwicklung der schon durch die Alten und namentlich durch Archimedes begründeten Statik in ihren principiellen Ansätzen zu verstehen, müssen wir mit einem älteren Zeitgenossen des Schöpfers der Dynamik, mit Simon Stevin (gest. 1633) beginnen. Wir würden diesen niederländischen Mathematiker und Techniker sogar einen Vorgänger Galileis nennen können, wenn nicht die damalige, verhältnissmässige Isolirtheit der Forschungen es durchaus verböte, Erscheinungen und Theorien miteinander in Beziehung zu setzen, die offenbar ohne gegenseitige Berührung entstanden sind und auf diese Weise auch eine Zeit lang fortbestanden haben.

Ausser Stevinus, der, abgesehen von Galilei, zu allererst die statischen Fortschritte des fraglichen Zeitalters repräsentirt, wird als jüngerer Zeitgenosse des Begründers der Dynamik auch Cartesius (1596—1650), obwohl derselbe für die positive Mechanik nicht einmal die Bedeutung seines gegnerischen Zeit- und Landsgenossen Roberval (1602—75) für sich hat, dennoch aber, wie schon Nr. 13 bemerkt, fast nur als Belag für die schädlichen Rückwirkungen der metaphysischen Speculation in Frage kommen. Auch den grossen Mathematiker Fermat werden wir gelegentlich schon hier einzuführen haben, wenngleich es sich bei ihm nur um einzelne Bemerkungen und Wendungen von mechanischer Bedeutung handelt. Obwohl Fermat noch als jüngerer Zeitgenosse Galileis betrachtet werden kann und seine Thätigkeit nicht weit über die erste Hälfte des 17. Jahrhunderts (1608—65) hinausreicht, so wird sein Hauptgedanke doch erst nach beinahe einem Jahrhundert unter dem Namen des Princips der geringsten Wirkung für die Mechanik von allgemeinerem Interesse. Auch Pascal (1623—62) wird berücksichtigt werden müssen, wo es sich um die Principien der Statik der Flüssigkeiten und namentlich

um die betreffende Anwendung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten handelt.

33. Stevinus hat in seiner gesammten Behandlungsart einige Aehnlichkeit mit den Alten, indem er streng gegliederte Beweise giebt, aber die Entstehungsgründe der Beziehungen wenig hervortreten lässt. Die holländischen Schriften desselben können hier nicht citirt werden; dagegen lässt sich auf eine französische Uebersetzung seiner Werke durch Girard verweisen, die 1634 zu Leyden in einem Foliobande erschien und auch die Statik enthält. Nebenbei bemerkt, legte Stevin sehr viel Werth auf die Sprache, und der Umstand, dass er in einer lateinisch schreibenden Zeit, gleich Galilei die lebende Volkssprache vorzog, zeugt für die Energie seiner Bestrebungen. Auch ist die Zuverlässigkeit und Eigenthümlichkeit seiner statischen Darstellungen so gross und so entschieden ausgeprägt, dass man ihm, soweit es sich um die vor und neben Galilei ausgebildete Statik handelt, den ersten Platz anweisen muss. Hier haben wir es jedoch mit dem zu thun, was er in Hinsicht auf die allgemeinen statischen Principien an völlig eigenthümlichen Zügen bietet. Sehen wir noch von der Hydrostatik ab, so ist die Wendung, durch welche Stevin zur Einsicht in das Gleichgewicht an der schiefen Ebene gelangte, noch heute von mehr als blos historischem Interesse.

Er betrachtet[1]) ein in seiner horizontalen Basis unterstütztes, mit seiner Ebene vertical aufrechtstehendes Dreieck, über welches er sich längs der beiden Seiten und über dieselben überhängend eine geschlossene Kette von kugelförmigen Gewichten angebracht denkt. In dem besondern Arrangement der Stevinschen Figur und Voraussetzung befinden sich auf der einen Seite 4, auf der andern Seite 2 Kugeln, und 8 hängen frei unterhalb der Basis des Dreiecks. Dieser letztere untere Theil der Kugelverbindung oder Kette muss für sich allein im Gleichgewicht sein, da sich die Kugeln frei gegeneinander in einer bestimmten Lage formiren können, ganz als wenn die Kette an den beiden Enden der Grundlinie des Dreiecks ohne Rücksicht auf ihre oberen Theile befestigt wäre. Sind nun die Kugeln gleich vertheilt, so dass bei jeder Verschiebung auf den beiden Seiten des Dreiecks die dem Längenverhältniss der Seiten entsprechenden Anzahlen von Kugeln zu

---

[1]) Simon Stevin, Oeuvres mathématiques, übersetzt von Girard, Leyden 1634, Abtheilung Statik, S. 448, Theorem XI.

liegen kommen müssen, so kann eine Drehung der Kette gar keine Veränderung in dem gegenseitigen Arrangement hervorbringen. Auf jeder Seite des Dreiecks wird stets eine der Länge dieser Seite proportionale Anzahl von Gewichten belegen bleiben, und nur die einzelnen Kugeln werden nicht individuell bei jeder Lage dieselben sein können. Der untere frei hängende Theil wird ebenfalls dieselbe Anzahl von Kugeln beibehalten. Nimmt man also an, die den beiden Seiten entsprechenden und auf denselben liegenden Kugelgruppen wären nicht im Gleichgewicht, so heisst dies soviel, dass nach der Seite des Uebergewichts die Kette in Bewegung gerathen muss. Da nun aber, wie erläutert, alle Verhältnisse bei der Verschiebung und Drehung sich gleich bleiben, so würde derselbe Grund der Bewegung immer bestehen bleiben und es „würde diese Bewegung kein Ende haben, was absurd ist“ (ce mouvement n'aurait aucune fin, ce qui est absurde). Es muss daher die Voraussetzung falsch und mithin ihr Gegentheil d. h. das Bestehen des Gleichgewichts zwischen den nach Verhältniss der Längen beschwerten Seiten richtig sein.

Wie man sieht, ist die Wendung höchst charakteristisch und zeugt von Erfindungskraft. Indessen hat sie für uns gegenwärtig auch noch den Vortheil, an eine vielleicht zu verallgemeinernde indirecte Beweismethode zu erinnern, die sich auf die Unmöglichkeit der perpetuirlichen Bewegung gründet. Eine solche Unmöglichkeit ist bei Stevin ein ursprüngliches Princip oder Axiom und hat grade in dieser Eigenschaft auch für die Aufgabe dieser Schrift ein erhebliches Interesse. Doch wird es erst dann Zeit sein, auf dieses Princip zurückzukommen, wenn wir die allerneusten Vorstellungen über die Erschöpfung jeder Kraft in ihrer Wirkung und über die hiedurch bewerkstelligte Erhaltung derselben Kraftgrösse zu untersuchen haben.

Drei Kräfte an einem Punkt sind im Gleichgewicht, wenn sie nach Richtung, Sinn, Ordnung und Grösse den drei Seiten eines Dreiecks entsprechen. Dieser Satz ist nichts weiter, als eine andere Form oder Anschauungsweise der Idee, welche man gewöhnlich durch das Parallelogramm der Kräfte darstellt; denn eines der Dreiecke, in welche das Parallelogramm durch die resultirende Bewegungsdiagonale getheilt wird, ist stets ein solches Repräsentationsdreieck der drei Kräfte, welche sich im Gleichgewicht befinden, sobald man die Bewegungsresultante im entgegengesetzten Sinne nimmt.

Der eben ausgesprochene Satz findet sich bei Stevin nicht in völliger Allgemeinheit, aber wohl eine Annäherung an denselben, indem der Fall ins Auge gefasst wird, wo zwei der Kräfte einen rechten Winkel bilden. Derartige Andeutungen sind jedoch keineswegs so erheblich, als man bisweilen angenommen hat. Bis zu dem Bewusstsein eines ganz allgemeinen Princips der Kräftezusammensetzung ist von den Arbeiten Stevins, die man in ihrer ersten Form bereits in das Jahr 1605 setzen kann, noch ein sehr weiter Schritt, indem dieses Princip in genügender Allgemeinheit und mit entschiedenen Anwendungen auf die Gleichgewichtsverhältnisse an den Maschinen erst in zwei Schriften vom Jahre 1687 vorgeführt wurde. Wir werden daher auf das allgemeine Princip der Zusammensetzung der Kräfte erst wieder einzugehen haben, wenn wir die Epoche jener beiden Schriften, nämlich der Newtonschen „Principien" und des Varignonschen „Projects einer neuen Mechanik" behandeln. Hier war nur zu erwähnen, wie man die Stevinschen Vorstellungen bisweilen mit der spätern Theorie in Beziehung gesetzt und angenommen habe, dass der angeführte, aber nicht hinreichend allgemein ausgeführte Satz die Grundlage des spätern Princips der Zusammensetzung der Kräfte geworden sei.

In der That bedarf es dieser Ansicht nicht, um Stevins Elemente der Statik als eine ausgezeichnete Leistung erscheinen zu lassen. Die Art, wie der Ingenieur und Mathematiker des Prinzen Moritz von Oranien das uralte Problem der schiefen Ebene behandelte, an welchem sich das Alterthum vergebens versucht hatte, würde schon allein ein hinreichendes Zeugniss für seinen Geist sein und das Gepräge des letzteren unverkennbar machen. Indessen werden wir auch noch bei der Erörterung der hydrostatischen Principien andere Züge seines statischen Denkens kennen lernen.

34. Vergleichen wir die Art, wie Stevin zu dem Satz von dem Gleichgewicht an der schiefen Ebene gelangt, mit dem entsprechenden Beweise Galileis, so finden wir bei dem letztern sowohl den Satz selbst in einer einfachern Gestalt eingeführt, als auch den Versuch gemacht, die Wahrheit desselben auf das Hebelprincip zurückzuführen. Was zunächst die Fassung des Beweisgegenstandes selbst anbetrifft, so legte sich Stevin, wie wir gesehen haben, sofort die Aufgabe vor, das Gleichgewichtsverhältniss an einer Verbindung von zwei schiefen Ebenen zu

bestimmen. Nachdem er dies in völliger Allgemeinheit gefunden hatte, brauchte er die eine Ebene nur vertical zu machen, um das Verhältniss der Höhe zur Länge als maassgebend zu erkennen. Galilei nimmt dagegen von vornherein seinen Ausgangspunkt von der einfacheren Voraussetzung einer einzigen schiefen Ebene und sucht sogar, wie wir aus einer Stelle seiner kleinen Schrift Della scienza meccanica[1]) sehen, diesen Fall noch erst in besondern Gestaltungen zu erfassen. Er findet nämlich den Grund, dass Pappus (im 8. Buch seiner Collectionen) ohne Erfolg versucht habe, das Kräfteverhältniss auf der schiefen Ebene zu bestimmen, in dem Cardinalirrthum des Alexandrinischen Mathematikers, dass auf der horizontalen Ebene ein bestimmtes Maass von Kraft zur Hervorbringung der Bewegung erforderlich sein müsse. Indem er nun selbst jede beliebige, wenn auch noch so kleine Kraft als genügend voraussetzt, sobald man nur von den zufälligen Hindernissen absieht, gewinnt er für die horizontale Ebene den Grenzwerth Null und hiemit das eine Extrem der stetigen Reihe von Verhältnissen, in denen für die verschiedenen Neigungen die Kraft zum Gewicht stehen muss. Die andere Grenze ergiebt sich ihm alsdann für die streng vertical gestellte Ebene, in welcher das ganze Gewicht ohne jeden Abzug gehoben und mithin die volle Wirkung der Schwerkraft überwunden werden muss. Die Vermehrung in der Wirksamkeit der Schwere ist also von der stetigen Zunahme der Erhebung abhängig, oder sie ist, wie wir heute sagen würden, eine Function dieser Erhebung d. h. des betreffenden Winkels und zwar eine solche Function, welche sich stetig zwischen den Grenzen Null und Eins bewegt. Drückte sich Galilei auch nicht in dieser Weise aus, so zeigt doch die angeführte Stelle, dass er in dieser Art gedacht und in seinen ursprünglichen Ueberlegungen sowohl das Princip der Stetigkeit als auch die Fingerzeige benutzt habe, welche in der Erwägung der beiden äussersten Grenzfälle dargeboten wurden. Der weitere Beweis, den er mit Hülfe des Hebelprincips führt, und den wir schon in Nr. 27 auseinandergesetzt haben, lässt noch die Spuren des ersten Ausgangspunkts erkennen. Es entspricht nämlich die successive Neigung des Hebelarms und die Herbeiziehung des festen Kreises dem Bestreben, die Gesammtheit aller möglichen

---

[1]) Bd. XI der angef. Ausg. der Werke, S. 115.

Neigungen der Ebene im Auge zu behalten und übersichtlich zur Anschauung zu bringen.

Wir würden auf die Thatsache, dass Galilei das Problem der schiefen Ebene unter Anlehnung an das Stetigkeitsprincip behandelt hat, nicht so grosses Gewicht legen, wenn dieser Umstand nicht einerseits in einem bemerkenswerthen Contrast zur allgemeinen Darstellungsweise Stevins stände und nicht andererseits auch historisch als ein sehr früher Belag der Handhabung der Stetigkeitsconsequenzen constatirt werden müsste. Stevin führt seine Sätze und Beweise in der festen, ja man könnte sagen starren Gestalt vor, welche sich schliesslich als das am meisten zwingende Ueberführungsmittel ergeben hat, während Galilei meist den Gedankenprocess selbst zur Darstellung bringt und in stetiger, gleichsam geschmeidiger Entwicklung die naturgemässesten Erkenntnissgründe in ihrem sich fast unwillkürlich gestaltenden Zusammenhang auftreten lässt. Stevins Beweis des Gesetzes der schiefen Ebene ist im höchsten Grade original; aber Galileis Auseinandersetzung ist ungeachtet der illusorischen Natur ihres Hauptpunktes doch weit lehrreicher. Obwohl sie, wie wir früher gesehen haben, den entscheidenden Umstand postulirt und daher nur scheinbar beweist, so bietet sie doch in ihrer Entwicklung mehr Anregung zur Erfassung der Natur des Gegenstandes, als die sinnreiche, aber unmotivirt hervortretende Wendung des niederländischen Mathematikers.

Man muss nun fragen, ob denn Stevin in der That den fraglichen Satz strenger bewiesen habe als Galilei. Der erstere galt bis in das letzte Jahrhundert als Entdecker des Princips der schiefen Ebene, und es wäre für den jüngeren italienischen Zeitgenossen nicht günstig, wenn derselbe in einem so wesentlichen Punkte nicht einmal die Schärfe seines Vorgängers erreicht hätte. Ja diese Beziehung müsste noch ein bedenklicheres Aussehen erhalten, sobald man sich erinnert, dass es schon einem Leonardo da Vinci gelungen war, sogar über die Zeit der Bewegung auf der schiefen Ebene Richtiges festzustellen.

In der That will der Stevinsche Beweis nicht blos als sinnreiches Kunstmittel, sondern auch in der Schlüssigkeit seiner Theile und ganz besonders in der Gestaltung seiner stillschweigenden Voraussetzungen untersucht sein. Die Annahme, dass der freie Theil der Kette für sich allein im Gleichgewicht sein müsse, ist nicht geeignet, als Axiom zu dienen, sondern erfordert selbst noch

eine Begründung. So richtig sie an sich ist, so leuchtet sie doch nicht von selbst ohne Weiteres ein. Man fragt sich unwillkürlich nach dem Warum. Wo aber ein solches Bedürfniss des Denkens vorhanden ist, sich eine Vorstellung noch erst nach Gründen zu zerlegen, da ist dieser Umstand ein untrügliches Zeichen, dass man es mit keiner völlig einfachen und daher axiomatisch brauchbaren Wahrheit zu thun habe. Ausserdem ist das Stevinsche Arrangement zu verwickelt, um als Ideal eines Beweises gelten zu können. Namentlich ist die Voraussetzung, dass sich bei der Bewegung die Theile der Kette oder Kugelgruppe immer wieder in die analoge Position begeben, an die Combination mehrerer, nicht grade einfacher Vorstellungen gebunden, die sich noch obenein um so weniger leicht vollziehen lassen, als es sich um Schlüsse in Rücksicht auf einen mechanisch unmöglichen Sachverhalt handelt. Diese indirecte Natur des Beweises, durch welche er die Form einer Hinführung auf das Absurde annimmt, eignet sich nur für Fälle, in denen man die mechanischen Unmöglichkeiten a priori zu handhaben vermag. Dies ist aber nur ausführbar, wenn es sich nicht um den eigentlich mechanischen, sondern nur um den mathematischen Inhalt der grade fraglichen Beziehungen handelt. Für das specifisch Mechanische, welches auf Erfahrungsprincipien und nicht auf blossen Denk- und Vorstellungsgesetzen beruht, sind daher derartige Wendungen unzutreffend, indem sie Allerlei voraussetzen, was wohl den Gewohnheiten der Anschauung entsprechen mag, aus diesem Grunde aber noch keineswegs zu Hülfe genommen werden darf.

Hienach ist also sowohl bei Galilei als Stevin kein befriedigender Beweis des Princips der schiefen Ebene anzutreffen, sondern wir haben es in beiden Fällen nur mit einem Nachweise oder mit einer Art Erläuterung des Gesetzes zu thun. Die Reduction einer Kraft auf eine feste Richtung, d. h. die Bestimmung der Wirksamkeit nach dieser vorgeschriebenen Richtung ist, wie wir Nr. 25 und 27 erörtert haben, der Fundamentalpunkt, dessen Erledigung mit dem Beweise des Princips der schiefen Ebene gleichbedeutend ist. Dieser Kern der Sache ist nun aber weder durch Galilei noch durch die ältere Wendung Stevins dargelegt worden. In dem einen Fall kam sogar zu der stillschweigenden Postulirung der Hauptsache noch die Verwicklung, welche durch die Anlehnung an das Hebelprincip entstehen musste. Wie es logisch unhaltbar sei, das Princip der schiefen Ebene auf den

Hebel zurückführen zu wollen, werden wir jedoch erst vollständig einsehen, wenn wir uns mit der Natur und den Schwierigkeiten eines völlig stichhaltigen Beweises des Hebelgesetzes vertraut gemacht haben.

35. Der Satz vom Hebel ist das Fundament der antiken Statik und vorherrschend auch der Ausgangspunkt der ersten neuern Bestrebungen in dieser Wissenschaft. Der Vorgang des Archimedes wurde in dieser Beziehung fast überall maassgebend. Auch wo man nebenher noch andere Stützpunkte einführte, entzog man sich dennoch nicht einer völlig selbständigen Behandlung des Hebelgesetzes. Das letztere spielte daher seine fundamentale Rolle nicht etwa nur, wie sehr natürlich, neben dem Satz von der schiefen Ebene, sondern auch neben dem von Galilei in allen Richtungen zur Geltung gebrachten Princip der virtuellen Geschwindigkeiten. Begreiflicherweise konnten auch die Anfänge einer Einsicht in das Zusammensetzungsprincip der Kräfte dem selbständigen Charakter des Hebelprincips keinen Eintrag thun, da ja noch bis auf den heutigen Tag das Verhalten paralleler Kräfte als eine dem Zusammensetzungsprincip nicht unmittelbar unterzuordnende Beziehung stehengeblieben ist. Ja man hat sich sogar im Laufe des gegenwärtigen Jahrhunderts, namentlich im Anschluss an den Poinsotschen Begriff der Kräftepaare mehr und mehr genöthigt gesehen, eine eigenthümliche und in der That interessante Doppelheit der Principien vorauszusetzen. Die oft gemachte Bemerkung, dass die Fälle, in denen das Hebelgesetz die leichteste Auskunft ergiebt, für das Zusammensetzungsprincip grade die schwierigsten sind, hat einen tiefern logischen Grund, dessen Darlegung jedoch erst bei der Behandlung der neuern Gestaltungen eines Systems der Mechanik am Orte sein wird. Hier beschränken wir uns zunächst auf eine Auseinandersetzung der Rolle, welche das Hebelgesetz und dessen Beweise an sich selbst als isolirte Ausgangspunkte der Statik gespielt haben.

Im Allgemeinen lehnte man sich im Eingange der neuern Zeit an die Archimedische Ueberlieferung an und erlaubte sich nur, wie namentlich Stevin und Galilei thaten, verhältnissmässig sehr wenig abweichende Wendungen, ja eigentlich nur untergeordnete, zur Veranschaulichung dienende Modificationen. Wir werden daher den Gedankengang des Archimedes zunächst genauer darlegen müssen, um uns zu einer Prüfung der modernen Expositionsart in den Stand zu setzen.

Schon Nr. 4 hatten wir anzuführen, dass Archimedes das Gleichgewicht des gleicharmigen, mit gleichen Gewichten beschwerten Hebels postulirt. Er thut dies, indem er an der Spitze des ersten Buchs de aequiponderantibus (über das Gleichgewicht der Ebenen) die Fundamentalvoraussetzung einführt: „Gleich schwere Grössen in gleichen Entfernungen wirkend sind im Gleichgewicht.“ Der vierte Satz ist seiner Form als Lehrsatz ungeachtet wesentlich nur eine Umschreibung jener Grundvoraussetzung. Da er jedoch den Hauptsatz vom Hebel vorbereitet, so muss er bei der Kritik des letzteren beachtet werden. Er lautet: „Wenn zwei gleich schwere Grössen nicht einerlei Schwerpunkt haben, so liegt der Mittelpunkt der Schwere einer aus diesen beiden zusammengesetzten Grösse in der Mitte derjenigen graden Linie, welche die Schwerpunkte beider Grössen verbindet.“ Mit diesem Satze ergiebt sich zugleich die Bestimmung des Schwerpunkts für eine beliebige Anzahl gleich schwerer und auf derselben graden Linie in gleichen Abständen geordneter Grössen. Es wird derselbe stets in der Mitte der beiden äussersten Gewichte, d. h. in der Mitte der ganzen Länge liegen. Diese letztere Vorstellung ist nun grade diejenige, von welcher bei dem Beweise des sechsten Satzes, der das allgemeine Hebelgesetz formulirt, ein entscheidender Gebrauch gemacht wird. Allerdings sei der Genauigkeit wegen bemerkt, dass im sechsten Satz das allgemeine Hebelgesetz nur für commensurable Beziehungen der Hebelarme resp. Gewichte erwiesen wird, um alsdann vermittelst der Exhaustionsvorstellung eine Uebertragung auf den Fall von Incommensurabilitäten zu erfahren. Diese rein mathematische Wendung hat jedoch kein specifisch mechanisches Interesse, und wir sind heute gewohnt, uns kurzweg an Stelle besonderer Manipulationen auf das Stetigkeitsprincip oder aber specieller auf die logische Nothwendigkeit zu berufen, dass die Möglichkeit einer unbeschränkten Annäherung an eine Grenze auch für diese Grenze selbst die entsprechenden Thatsachen und Eigenschaften mit sich bringe, die in Rücksicht auf die von ihr unbeschränkt wenig verschiedenen Grössen statthaben. Aus diesem Grunde haben wir nicht nöthig, besonders auf den Fall einzugehen, in welchem die Hebelarme und mithin auch die Gewichte kein gemeinschaftliches Maass haben.

Erinnern wir uns des Sinnes, in welchem man gewöhnlich von einem allgemeinen Hebelgesetz redet. Eine unveränderliche,

d. h. undehnbare und unbiegsame, starre Linie, die man eine mechanisch mathematische nennen könnte, ist in irgend einem ihrer Punkte unterstützt oder, mit andern Worten, in einer rechtwinkligen Richtung zurückgehalten. In der Ebene, welche die Linie mit dieser Richtung bildet, und parallel mit dieser Richtung, aber im entgegengesetzten Sinne greifen an zwei beliebigen Punkten Kräfte von einer solchen Grösse an, dass sie sich zueinander umgekehrt wie ihre Entfernungen vom Unterstützungspunkt verhalten. In diesem Fall ist das System im Gleichgewicht, d. h. die beiden Kräfte bringen keine Drehung hervor. Welchen Druck oder welche Spannung der Drehpunkt erleide, ist eine Frage für sich, die man zwar gewöhnlich als durch das Hebelgesetz mitbeantwortet ansieht, die aber nur dann keine Schwierigkeiten darbietet, wenn man von vornherein von dem Begriff des Schwerpunkts und von den Gesetzen seiner Ermittlung ausgeht.

In der That geben die Archimedischen Entwicklungen zu weit weniger Bedenken Anlass, sobald man erkennt, dass der syrakusische Mathematiker stets Schwere und Schwerpunkte speciell vor Augen hat. Erstens nimmt er den Hebel in seiner natürlichen Gestalt, indem er nicht überhaupt Kräfte, sondern die verticale Schwere an ihm wirken lässt. Zweitens ist seine Ermittlung der Beziehungen des Unterstützungspunkts nichts weiter als eine Herleitung des Schwerpunkts getrennter und auf einer horizontalen Linie belegener Gewichte. Der erstere dieser beiden Umstände hat ihm allerdings von Seiten Fermats[1] den Einwand zugezogen, dass er es bei seinem Hebel nicht mit genau parallelen Kräften, sondern mit solchen Bewegungsantrieben zu thun habe, die nach dem Mittelpunkt der Erde convergiren. Da man aber die Archimedische Anlehnung an die Verhältnisse der Schwere nur so zu verstehen hat, dass im Hinblick auf dieselben gewisse Beziehungen formirt werden, so entscheidet diese letztere Formation selbst und nicht die ganz specielle und nebensächliche Beschaffenheit des Vorbildes. Anders würde sich allerdings die Sache verhalten, wenn Archimedes irgend etwas aus der Convergenz und nicht vielmehr Alles aus dem vorausgesetzten Parallelismus bewiesen hätte.

Der Gedankengang in dem fraglichen Beweise und dessen erwähnten Vorbereitungen klärt sich völlig auf, sobald man bemerkt, dass er nichts als eine Abfolge von Sätzen über die Lage

[1]) Fermat, Varia opera mathematica, Tolosae 1679, S. 142.

der Schwerpunkte zwischen Gewichten auf einer und derselben Horizontallinie und zwar zunächst zwischen lauter gleichen Gewichten enthält. Die Fundamentalvoraussetzung postulirt den Schwerpunkt zwischen zwei gleichen Gewichten als in der Mitte liegend. Der erwähnte vierte Satz giebt eine genauere Fassung dieser Idee, indem die Schwerpunkte der Gewichte selbst als die Grenzen des Abstandes genommen werden, und er führt auf diese Weise auch zugleich zur Bestimmung des gemeinsamen Schwerpunkts einer ganzen Reihe. Setzt man nun eine beliebige Reihe gleich schwerer, in gleichen Abständen geordneter Gewichte auf einer horizontalen Linie voraus, so liegt der Schwerpunkt dieses ganzen Systems in der Mitte der durch die beiden äussersten Gewichte begrenzten Linie. Nun theile man die ganze Gewichtreihe beliebig in zwei Gruppen und ermittle für beide die jedesmal zugehörigen Schwerpunkte. Jede der beiden Gruppen kann nun durch symmetrische Verschiebung um ihren Schwerpunkt beliebig verändert werden; ja man kann die Gewichte im Schwerpunkt jeder Gruppe vollständig zusammenschieben. Alsdann erhalten wir an Stelle der beiden, aus gleich vertheilten und gleichen Gewichten bestehenden Reihen zwei Gewichte, die in den beiden Schwerpunkten angreifen und sich ihrer Grösse nach wie die Ausdehnungen verhalten, welche die in ihnen vereinigten Partialgewichte ursprünglich auf der beschwerten Linie einnahmen.

Um nicht in nebensächliche Weiterungen zu gerathen, ist es zweckmässig, ursprünglich eine grade Anzahl von Gewichten vorauszusetzen. Alsdann ist die Anzahl der auf der Linie gebildeten Abschnitte ungrade, und der Hauptschwerpunkt, d. h. derjenige der ganzen Reihe fällt in die Mitte des mittleren Abschnitts. Die Gruppentheilung wird man ebenfalls am bequemsten so vornehmen, dass jede Gruppe eine grade Anzahl von Gewichten und mithin eine ungrade Anzahl von Abschnitten repräsentirt. Alsdann wird der Schwerpunkt jeder Gruppe in die Mitte ihres mittleren Abschnitts fallen, und es werden dort alle Gewichte derselben zu vereinigen sein. Stillschweigende Voraussetzung ist hiebei, dass in der Wirksamkeit der Gewichte auf das ganze System dadurch nichts verändert werde, dass man dieselben in ihrem Schwerpunkt vereinigt. Die Frage nach der gegenseitigen Lage der drei Schwerpunkte, nämlich des Gesammtschwerpunkts, welcher unterstützt oder in welchem die Linie als aufgehängt

gedacht wird, und der beiden Gruppenschwerpunkte ist nun eine rein geometrische, führt aber, wie man sogleich sehen wird, erst zu dem eigentlichen Ausdruck des Hebelgesetzes. Eine Linie ist zunächst in ihrer ganzen Länge halbirt, alsdann beliebig in zwei Theile zerlegt, und jeder derselben halbirt. Die beiden letzteren Halbirungspunkte werden nun vom ersteren solche Abstände haben, die den Linientheilen, welche von ihnen halbirt wurden, umgekehrt proportional sind. Dies ist ein rein geometrischer Satz. Man sieht aber, dass durch denselben auch sofort festgestellt wird, wie die Abstände sich nun umgekehrt wie die an ihren Endpunkten angreifenden Gewichte verhalten; denn diese Gewichte verhielten sich ja, wie ihre ursprüngliche Vertheilung anschaulich zeigte, wie die Ausdehnungen, auf denen sie sich ausbreiteten. Die um Eins grössere Anzahl der Gewichte, verglichen mit den Abschnittszahlen, darf nicht stören, da dieser Umstand beiderseitig statthat und daher die Proportionalität unberührt lässt.

36. Die gegebene Entwicklung zeigt, wie die Gewichte, welche man am Hebel so arrangiren will, dass sie einander aufwiegen, in solchen Abständen angebracht werden müssen, die ihren eignen Grössen umgekehrt proportional sind. Archimedes hat nun freilich den Kern seines Beweises nicht in solcher Absonderung hervorgehoben, wie wir dies gethan haben. Ja es könnte scheinen, als wenn er sogar in einer gewissen Beziehung den umgekehrten Weg eingeschlagen hätte. Indessen zeigt sich bei näherer Betrachtung, dass alle andern Umstände seiner Darlegung nur nebensächlich sind, und dass die directe Herleitung des Hauptsatzes in der That wesentlich die Form hat, in welcher wir sie vorher entwickelt haben. Archimedes geht nämlich von dem Beweisthema, d. h. von dem bereits formulirten Satze aus und muss daher die gegebenen Gewichte erst in gleiche Theile zerlegen. Diese Theilgewichte werden alsdann um die Schwerpunkte der Gesammtgewichte in den zu beiden Seiten gleichen Abständen auf dem Hebel selbst und dessen Verlängerungen so geordnet, dass sie die um den Unterstützungspunkt zu beiden Seiten gleich vertheilte Reihe bilden. Die Möglichkeit dieses Arrangements beruht geometrisch auf dem Umstande, dass sich der Voraussetzung gemäss, die Gewichte umgekehrt wie ihre Abstände vom Unterstützungspunkt verhalten. Die Anordnung ist nun auf diese Weise gegeben und es bleibt nur zu beweisen,

dass wirklich Gleichgewicht statthabe. Dieser Beweis wird von Archimedes eben nur dadurch geführt, dass er zeigt, wie das ganze System in der fraglichen Vertheilung offenbar schon nach der Fundamentalvoraussetzung und nach dem oben erwähnten vierten Satz im Gleichgewicht ist, und wie das ursprüngliche System, von dem als von dem Beweisgegenstand ausgegangen wurde, für jenes Arrangement substituirt werden kann. In dieser Substitution liegt der Nerv des Beweises, und wir haben uns daher oben besonders bemüht, diesen Punkt hervortreten zu lassen.

Zur Veranschaulichung sei noch bemerkt, dass in der fraglichen Vertheilung jeder Hebelarm um den andern verlängert werden muss, so dass sich die ganze Hebellänge verdoppelt. Nimmt man z. B. im Anschluss an Archimedes ein möglichst einfaches Verhältniss, also den Fall, dass der eine Hebelarm doppelt so lang ist als der andere, so erhält man drei Abschnitte und mit den Verlängerungen sechs, so dass man das grössere Gewicht in vier, das kleinere in zwei Theile zerlegen muss. Man bringt alsdann diese verschiedenen Theilgewichte in den Mitten der Abschnitte an. Auf diese Weise ist die gleichmässige Vertheilung auf den sechs Abschnitten bewerkstelligt, und der Unterstützungspunkt liegt in der Mitte, so dass er die beiden mittleren Abschnitte von einander trennt und die beiden nächsten Gewichte in der Entfernung eines halben Abschnitts liegen hat.

Die Classicität, welche der Archimedische Hebelbeweis erlangt hat, ist bis jetzt jederzeit von irgend welchen Bemängelungen getrübt gewesen. Man hat sich bis in die neuste Zeit nicht überzeugen können, dass dieser Beweis völlig stichhaltig und ohne Lücke sei. Das Hauptbedenken betrifft, wie schon angedeutet, grade den am meisten entscheidenden Umstand, nämlich die Substitution der getrennten und der verbundenen Gewichte. Am wenigsten aber will es ohne Weiteres einleuchten, dass eine solche Substitution auch dann zulässig sei, wenn die vertheilten Gewichte, die zu einer Gruppe gehören, mit ihrer einen Hälfte auf die andere Seite des Unterstützungspunkts hinübergreifen. Grade in diesem Fall sieht man recht deutlich, wie es darauf ankommt, die besondern Gewichtsgruppen zunächst ganz ohne Rücksicht auf den Hebel zu betrachten, grade als wenn es keinen Unterstützungspunkt gäbe, und als wenn die Hebellinie eben nur die Lage und Ordnung zu bestimmen und die Verbindung der übrigens freien Gruppe zu einem Ganzen zu repräsentiren hätte.

Es macht sich also unverkennbar die stillschweigende Voraussetzung geltend, dass die Wirksamkeit von Gewichten dieselbe bleibt, wenn sie in ihrem Schwerpunkt vereinigt oder um ihn so gruppirt gedacht werden, dass er unverändert bleibt. Bliebe der Angriffspunkt in dem einen wie in dem andern Fall derselbe, und zertheilte er sich nicht vielmehr in eine Reihe von Angriffspunkten, so würde die Formveränderung der Gewichte nicht die mindeste Schwierigkeit machen; denn die Voraussetzung, dass ein Gewicht mit seiner ganzen Schwere im Aufhängungspunkte wirkt, liegt schon in der Fundamentalvorstellung, die sich Archimedes von der Grösse der Schwere und überhaupt von der Wirksamkeit eines Gewichts sowie von deren Maass gemacht haben muss. In dieser Beziehung wäre also nichts einzuwenden, wenigstens solange man nicht auf die Natur der Schwerkraft in moderner Weise eingehen und etwa den Einfluss der Gestalt der Körper erörtern will. Derartiges wäre aber hier um so weniger angebracht, als ja das Hebelproblem mit einer besondern Kraftgattung gar nichts zu schaffen hat, sondern überhaupt nur Bewegungsantriebe oder Kräftewirkungen in einer angenommenen Richtung an den betreffenden Angriffspunkten voraussetzt.

Nach Alledem besteht das Hauptergebniss der Darstellung und Prüfung des Archimedischen Beweises in der Erkenntniss, dass der mathematische Bestandtheil desselben völlig schlüssig und zugleich als eine höchst sinnreiche Combination zu betrachten ist, während das rein mechanische Element in demselben noch viel zu wünschen übrig lässt. Ausser der berechtigten Voraussetzung des Gleichgewichts gleicher Grössen am gleicharmigen Hebel spielt noch ein weniger klares Substitutionsprincip eine entscheidende Rolle. Vermöge des letzteren, welches nicht einmal ausdrücklich postulirt wird, sondern stillschweigend zu Grunde liegt, müsste es möglich sein, in allen Combinationen an die Stelle einer Gruppe von Gewichten die im Schwerpunkt vereinigte Masse derselben zu setzen. Diese Idee ist aber an sich nicht klar genug, um als unbewiesenes Vehikel einer Ableitung des Hebelgesetzes zu dienen.

Da bis jetzt alle Versuche, den Archimedischen Beweis strenger zu gestalten, keinen erheblichen Erfolg gehabt haben, so liegt die Vermuthung nahe, dass die ganze fragliche Art und Weise des Ableitens für die Mechanik als für eine auf specifisch empirischen Axiomen ruhende Wissenschaft ungeeignet sei. In

der That kann man von den Verbindungen und Trennungen der Gewichte und von der Möglichkeit der erwähnten Substitution keine rein apriorische Vorstellung haben. Jede Synthese des blossen Gedankens trifft daher bei jedem Schritt auf Schwierigkeiten. Sie muss nach etwas fragen, was durch die rein mathematische Vorstellung nicht ausgemacht werden kann, und was in dem wirklich benutzten empirischen Fundamentalaxiom weder enthalten ist, noch mit Hülfe desselben gefolgert werden kann. Die Voraussetzung, dass gleiche Gewichte in gleichen Abständen im Gleichgewicht sind, besagt nichts über die Ersetzung zweier Gewichte oder gar einer Gruppe von Gewichten durch ein drittes und zwar noch dazu unter Vertauschung der mehreren Angriffspunkte mit einem einzigen oder umgekehrt eines einzigen Angriffspunktes mit mehreren. Offenbar würde es nicht einmal hinreichen, nachzuweisen, dass die verschiedenen Gewichte mit der Summe ihrer parallelen Zugkräfte einem festen Hinderniss gegenüber dieselbe Wirkung üben, als die im Schwerpunkt vereinigten Gewichte. Die Hebellinie ist nämlich ein drehbares System, und hier complicirt sich die Wirkung der Theilgewichte augenscheinlich so sehr, dass die erwähnten Bedenken gegen die erläuterten Substitutionen unter allen Umständen bestehen bleiben. Die Lösung der unter Andern auch von Huyghens[1]) anerkannten Schwierigkeiten des Archimedischen Beweises wird daher aller Wahrscheinlichkeit nach, d. h. wenn unsere Ansicht von der Natur der Verkettung mechanischer Wahrheiten richtig ist, nicht in einer Verbesserung der antiken Demonstration, sondern in der Ersetzung derselben durch eine moderne Beweisart zu suchen sein. Die letztere wird natürlich auf Bewegungen zurückgreifen und dem Sinn entsprechen müssen, in welchem das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten nach seinem axiomatischen Bestandtheil verwendet worden ist oder noch in verschiedenen Richtungen verwendet werden kann.

37. Da wir uns durch den übrigens so strengen und sinnreichen Archimedischen Beweis des Hebelgesetzes von den Schwierigkeiten überzeugt haben, mit welchen die gedankliche Verkettung specifisch mechanischer Thatsachen und Beziehungen verbunden ist, so dürften schon hier einige Bemerkungen über die Voraussetzungen der Möglichkeit völlig befriedigender mechanischer Schlussfolgerungen für das Verständniss der ferneren

[1]) Demonstratio aequilibrii bilancis in den Opera varia.

geschichtlichen Entwicklung von Nutzen sein. Soll eine ernstliche Deduction statthaben, so sind empirische Axiome unumgänglich; denn aus blosser Mathematik, ohne Hinzunahme von etwas Anderem, kann stets wiederum nur rein Mathematisches, niemals aber etwas specifisch Mechanisches entwickelt werden. Letzte Principien oder Axiome sind nur das Ergebniss der Zerlegung complicirter Beziehungen, und die allgemeine Gattung der letztern ist auch für die Natur der erstern entscheidend. Es muss eine gewisse Gleichartigkeit zwischen den Wahrheiten und den ihnen zu Grunde liegenden Axiomen bestehen.

Ein zweiter sehr erheblicher Punkt für die strenge Gestaltung des Systems der Mechanik ist die Fassung der Ausgangsbegriffe. Je abstracter dieselben gehalten werden können, um so leichter wird man sie vollständig beherrschen. Nun ist es aber durchaus nothwendig, dass die mechanischen Begriffe, aus denen man schliessen will, nichts enthalten, was nicht vollkommen durchsichtig wäre. Man muss daher die erfahrungsmässigen Bestandtheile so gestalten, dass sie eine dem Verstande wenigstens formal vollkommen begreifliche Vorstellung repräsentiren. So ist z. B. die Idee von einem Bewegungsantrieb oder von einer bewegenden Ursache, die auf einen Punkt wirkt, formell ganz deutlich, sobald dabei nichts gedacht wird, als die Voraussetzung, dass ein Grund existire, vermöge dessen eine bestimmte Bewegungserscheinung erfolgen soll. Dieses Soll kann gleichsam durch eine Satzung des Gedankens angenommen und mit einem solchen Begriff wie mit einer rein mathematischen Vorstellung operirt werden. Hiebei bleibt freilich die Gestaltung der Ursache im besondern Fall ausser Frage, und die Art, wie solche Ursachen bestehen bleiben, also etwa das Naturgesetz der Beharrung, gehört in das Gebiet der materiellen und empirischen Fundamente. Dagegen lässt sich mit den in die erwähnte Form gebrachten Grundbegriffen ein in sich geschlossenes und keiner empirischen Stütze bedürftiges System aufführen. Jedes erfahrungsmässige Grundgesetz braucht nämlich nur als blosse Voraussetzung zu figuriren, mit der der Verstand als mit einer blossen Möglichkeit arbeitet. Durch diese Wendung wird die strengste Schlüssigkeit für alle Beziehungen zulässig, und man sieht schon einigermaassen voraus, auf welchem Wege man das Ideal eines logisch unanfechtbaren Systems der Mechanik zu suchen habe.

Dies vorausgeschickt, wird man keinen Augenblick Anstand nehmen dürfen, zu behaupten, dass der Archimedische Begriff vom Hebel nicht abstract genug gefasst sei. Um streng zu deduciren, müssen wir wissen, wie wir uns zwei Gewichte und deren Wirkungen verbunden zu denken haben. Wir müssen ferner wissen, wie sich die Kraft oder Wirkung vermöge der materiellen Verbindungslinie mittheile oder wenigstens mittheilen solle. Wir brauchen in dieser Beziehung mindestens eine Voraussetzung, wenn wir auch nicht nöthig haben, uns in diesem Fall um die besondere Art zu kümmern, auf welche sich in der Natur thatsächlich die Kraftbeziehungen in einer Hebelstange durch diese oder jene Spannungen vermitteln. Es ist mithin wenigstens der Begriff einer in den gegenseitigen Beziehungen ihrer Theile unveränderlichen Linie unumgänglich, und es muss für diese Linie auch noch die Eigenschaft vorausgesetzt werden, dass in ihr jeder Bewegungsantrieb, der in irgend einem Punkte statthat, alle andern Punkte, wenn auch nach einer erst zu ermittelnden Beziehung, ergreift. Wenn nun an dieser Linie drei Kräfte rechtwinklig und nicht alle in gleichem Sinne angreifen, so lässt sich über das Verhalten der Linie je nach den Maassverhältnissen der Kräfte etwas ausmachen, indem man die Bewegungsantriebe nach der Grösse der jedem solchen Antrieb möglichen Bewegungswirkung combinirt.

Es ist hier nicht unsere Sache, schon jetzt ein Beispiel auszuführen, welches in seiner allseitigen Erörterung sogar auf die Poinsotschen Kräftepaare hinleiten würde. Unser Gesichtspunkt war eben nur darauf gerichtet, bereits an dieser Stelle die Wichtigkeit einer lückenlosen Berücksichtigung aller Ausgangsbegriffe bemerken zu lassen und zugleich darauf hinzuweisen, wie auch in dieser Beziehung nicht blos der Archimedische Hebelbeweis, sondern auch das demselben zu Grunde gelegte Postulat eine ungenügende Fassung erhalten habe. Schon allein aus diesen Gründen und ganz abgesehen von der Verbindung und Trennung der Gewichte, würde daher die antike Analyse des Hebelgesetzes zu weitern Anforderungen Anlass geben.

38. Die äusserlichen Umgestaltungen, welche Stevin und Galilei mit dem Archimedischen Hebelbeweis vorgenommen haben, dienen einerseits zur Veranschaulichung, lassen aber andererseits die Schwächen der rein mechanischen Schlussfolgerungen noch mehr hervortreten. Die fraglichen Modificationen bestanden

wesentlich darin, dass die vertheilte Gewichtsreihe durch zwei parallelepipedische Balken ersetzt wurde, und dass die beiden Gewichte von vornherein durch die verticale Aufhängung dieser Balken repräsentirt werden konnten. Giebt man diesen Balken eine solche Länge, dass sie, in der Mitte ihrer Längenausdehnung aufgehängt, auf der Verlängerung des Hebelarms jedesmal um den andern Hebelarm hinausreichen, so repräsentiren sie die doppelten Längen derjenigen Hebelarme, an denen sie nicht aufgehängt sind, und erfüllen die ganze Ausdehnung der Hebellinie und ihrer Verlängerungen in einer analogen Weise, wie die Archimedischen Gewichte. Der Unterschied besteht nur darin, dass wir es in diesem Fall mit einer stetigen, ununterbrochenen und in sich zusammenhängenden Masse zu thun haben. Die Mitte der Gesammtausdehnung der beiden horizontal aufgehängten und so vereinigten Balken ist nun der Unterstützungspunkt, und der ganze Hebelbeweis reducirt sich hienach auf die Vorstellung, dass sich der verticalen Aufhängung die horizontale Anbringung substituiren lasse.

Bei Galilei finden sich zwei im Wesentlichen gleiche Darstellungen des Hebelbeweises, nämlich die ältere in der posthumen Schrift Della scienza meccanica[1]) und die der Abfassung nach neuere in dem mechanischen Hauptwerk der Discorsi[2]). An der letzteren Stelle wird eine völlig directe Herleitung des Hebelgesetzes gegeben. Es wird ein Prisma an seinen beiden Enden an einer gleich langen, horizontalen Linie aufgehängt, und die letztere, d. h. das ganze System dann wieder in der Mitte durch Befestigung von oben her im Gleichgewicht gehalten. Hiebei liegt die auch von Galilei formulirte Archimedische Voraussetzung zu Grunde, dass gleiche Gewichte in Rücksicht auf den in der Mitte liegenden Schwerpunkt im Gleichgewicht sind, „indem nicht mehr Grund vorhanden sei, nach der einen als nach der andern Seite zu neigen[3]).“ Das Prisma wird nun ferner beliebig, aber ungleich getheilt, und zur Erhaltung des Gleichgewichts an der Durchschneidungsstelle mit der Aufhängungslinie durch einen Faden verbunden. Jeder der ungleichen Theile wird demnächst nur in seiner Mitte aufgehängt und an seinen Enden durch Lösung der Verbindungen frei gelassen. Hiemit ist das gesuchte

[1]) Bd. XI der angef. Ausg. der Werke, S. 92 fg.
[2]) Ibid. Bd. XIII, 2. Tag, S. 113. [3]) Ibid. Bd. XI, S. 91.

Verhältniss am Hebel fertig construirt; denn die Entfernungen der beiden neuen Aufhängungspunkte vom mittleren Aufhängungspunkt der Linie sind halb so lang als das jedesmal an der andern Seite hängende Prisma. Die Beschwerungen verhalten sich mithin in dem so construirten Zustande des Gleichgewichts der Anbringungslinie umgekehrt wie ihre Entfernungen vom Unterstützungspunkt.

Die Bedenken, die sich unwillkürlich auch gegen diese Galileische Wendung in analoger Weise wie gegen die Archimedische Beweisart einstellen, bedürfen wohl kaum einer besondern Erläuterung. Dagegen haftet der Galileischen Nachweisung noch eine ihr eigenthümliche Schwierigkeit an. Es zeigt sich nämlich bei ihr am allerdeutlichsten, wie die Vertauschung der Anbringungsarten das Entscheidende und eigentlich Beweisende sei oder vielmehr sein solle. Das getheilte Prisma muss offenbar an der Durchschnittsstelle zweifach d. h. wenigstens durch einen Faden mit zwei Verzweigungen unterstützt werden. Um die später vorzunehmende Freimachung jedes Prismastücks an seinen beiden Enden in ihrer Wirkung klar vorzustellen, ist es sogar nöthig, zwei getrennte Fäden vorauszusetzen, welche an der Durchschnittsstelle die Unterstützung der beiden völlig getrennten Theile bewerkstelligen. Nun dürfte es wohl einleuchten, dass die Verfolgung der Veränderungen, welche die Umgestaltungen und Einschiebungen von Angriffs- und Wirkungspunkten mit sich bringen, keinen Hebelbeweis ergeben kann, weil zur Beurtheilung dieser speciellen Modificationen der Satz vom Hebel schon selbst vorausgesetzt werden müsste. Es ist durchaus nicht axiomatisch klar, dass die beiden Prismenstücke in ihrer Wirkung auf die Anbringungslinie dasselbe leisten müssen, was das ganze Prisma wirkte. Ebensowenig ist es selbstverständlich, dass die Freimachung an den Enden und die Aufhängung in der Mitte für jedes Stück ohne Folgen auf die gesammten Gleichgewichtsbeziehungen bleiben. Sehen wir also näher zu, so finden wir, dass auch bei Galilei die Vertauschbarkeit der Wirkungen aus dem Schwerpunkt und aus andern Anbringungspunkten eine unzulässige Rolle spielt und sogar in seinem Arrangement noch sichtbarer hervortritt, als bei Archimedes. Dennoch ist aber anzuerkennen, dass wenigstens die Anbringungsart des Gesammtprisma nicht eine solche ist, bei welcher jeder Theil desselben als an der festen Anbringungslinie angreifend gedacht werden

müsste. Eine solche Vorstellung würde erst die Analogie mit den Archimedischen Gewichten vervollständigen, indem an die Stelle einer discreten Reihe von Angriffspunkten eine stetige Linie träte. Diese Gestaltung, welche die Schlüsse noch complicirter und den Sachverhalt noch dunkler gemacht haben würde, ist jedoch in der Galileischen Darstellung glücklich vermieden worden.

Erinnern wir uns des mathematischen und des rein mechanischen Elements im Beweise des Hebelgesetzes, so ist die Tragweite des ersteren und die Anziehungskraft, welche die Archimedische Fassung desselben auf die Späteren ausgeübt hat, ganz unverkennbar. Auch Galilei hat dieses mathematische Element benutzt; aber auch er hat diesen Rahmen begreiflicherweise nicht mit befriedigenden mechanischen Vorstellungen auszufüllen vermocht. Wie wir schon früher angedeutet haben, sehen wir in diesem Umstande keinen individuellen Mangel der besondern Behandlung, sondern die Folge einer allgemeinen Nothwendigkeit. Es ist ganz unmöglich, die statischen Grundverhältnisse und mithin auch das Hebelgesetz ohne Zurückgreifen auf die Bewegungsantriebe begreiflich zu machen. Galilei selbst bezeugt dies unabsichtlich, indem er das axiomatische Hebelprincip mit der oben angeführten Erläuterung versieht, dass kein Grund vorhanden sei, warum die gleichen Gewichte in Beziehung auf den in der Mitte liegenden Schwerpunkt eher nach der einen als nach der andern Seite aus ihrer vorausgesetzten Lage treten sollten.

39. Der Satz vom Hebel gilt in Galileis Darstellung als ein völlig selbständiger Ausgangspunkt der Mechanik. Nichtsdestoweniger wird auch er, ganz wie die andern einfacheren Grundverhältnisse der Statik, aus dem Gesichtspunkt der virtuellen Geschwindigkeiten erläutert. Ja sogar werden die virtuellen d. h. blos möglichen Bewegungsverhältnisse in den statischen Combinationen sichtlich als tiefere Erkenntnissgründe zur Geltung gebracht. Ein derartiges Bestreben, welches die Tragweite des später kurzweg als Princip der virtuellen Geschwindigkeiten bezeichneten Hauptsatzes möglichst auszudehnen sucht, ist nun offenbar ein Zeugniss für die Strenge und Natürlichkeit der Galileischen Denkweise.

Wenn an der Unternehmung von Lagrange, die ganze Mechanik auf das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten zurückzuführen,

auch nur ein erheblicher Bestandtheil haltbar bleibt, so hat Galilei den meisten Anspruch darauf, als der ursprünglichste und entscheidendste Begründer dieser Auffassungsart des innern Zusammenhangs der Erscheinungen zu gelten. Von den früheren Spuren des virtuellen Princips bei Leonardo da Vinci und Guido Ubaldi haben wir Nr. 10 und 12 bereits geredet. Bei Galilei findet sich dieses Princip, wenn auch nicht dem Namen, so doch der Sache nach in allen Richtungen verwerthet. Es wird in der ganzen Schrift Della scienza meccanica für die verschiedenen einfachen Potenzen und ausserdem noch besonders in den hydrostatischen Untersuchungen der Abhandlung über die schwimmenden Körper (Discorso intorno alle cose che stanno in su l'acqua etc.), übrigens aber auch sonst vielfach zur Anwendung gebracht. Ja man kann sagen, dass die Benutzung dieses erst verhältnissmässig sehr spät zu vollerer Anerkennung gelangten und berühmt gewordenen Princips einen besondern Charakterzug der natürlichen Vorstellungsarten Galileis ausgemacht habe.

Gegenwärtig formulirt man das fragliche Princip gewöhnlich in einer Weise, welche dasselbe als einen ziemlich complicirten, im Hinblick auf mannichfaltige Voraussetzungen ausgedrückten Lehrsatz erscheinen lässt. In dieser Gestalt ist es natürlich nichts weniger als ein Axiom, indem es eingestandenermaassen einen mehr oder minder weitläufigen Beweis erfordert. Um einen solchen zusammengesetzten Lehrsatz handelte es sich nun bei dem ersten Auftreten der weiter greifenden Anwendungen des noch technisch unbenannten Princips keineswegs. Es war vielmehr nur das wirklich Principielle und Axiomatische, was in dieser Beziehung gleichsam zum Durchbruch kam.

In der letzteren fundamentalen Gestalt, d. h. seinem axiomatischen Kerne nach, steht das Princip in der innigsten Beziehung zu den Galileischen Vorstellungen von der Rolle der Geschwindigkeit in der Grössenbestimmung der Kräfte. Die virtuelle, d. h. die mögliche Geschwindigkeit oder, mit andern Worten, diejenige Geschwindigkeit, mit welcher die Bewegung im Falle der Störung des Gleichgewichts nach Maassgabe der festen und der veränderlichen Verhältnisse des Systems erfolgen würde, ist jener hochwichtige Begriff, der uns erlaubt, die statischen Beziehungen als Grenzen und mithin auch als Consequenzen von Bewegungsrelationen zu behandeln. Vermöge dieser Vorstellungsart werden die ruhenden und verborgenen Verhältnisse der Statik genöthigt,

in sichtbaren Proportionen hervorzutreten und in den Dimensionen der möglichen Bewegungen und ihrer relativen Geschwindigkeiten das zu offenbaren, was im Ruhezustande nicht unmittelbar anschaulich sein konnte. Insbesondere wird der ganze Inbegriff der Elemente der mechanischen Vorrichtung oder des Systems von Verbindungen, an welchem man die Kräfte anbringt, einzig und allein dadurch in seiner die Relationen vorzeichnenden Wirkung verständlich, dass man die Bewegungen feststellt, die er den Angriffspunkten der Kräfte in jedem, also auch im Fall des Gleichgewichts zu machen erlauben würde. Die Verhältnisse dieser möglichen Bewegungen, bezogen auf dasselbe Zeitelement, also die relativen Geschwindigkeiten repräsentiren, abgesehen von allen angebrachten Kräften, die statische Wirkung des Systems der Verbindungen selbst und gleichsam die innern Kräftedeterminationen des blossen Arrangements.

Dennoch würde es aber ein Fehler sein, wenn man den wesentlichen Gehalt des virtuellen Princips an die Voraussetzung knüpfen wollte, dass ein festes System beharrlicher und veränderlicher Verbindungselemente zu Grunde liege. Allerdings ist das Vorhandensein eines solchen Systems der Ausgangspunkt für die Auffindungen und Bestätigungen des Princips gewesen. Indessen beweist schon die heutige allgemeine Anwendung des Princips, dass die herkömmliche Fassung des Begriffs eines Systems von Verbindungen für die Anwendung jenes Grundsatzes keine Schranke bilde. Für drei Kräfte, die auf einen Punkt wirken, bildet dieser Punkt die Verbindung und in einem weitern Sinne des Worts das System oder wenigstens das Element, welches die Kräfte wirklich in gegenseitige Beziehung setzt und daher zu einem System vereinigt. In diesem ausgedehnten Sinne giebt es gar keine Kräftecombinationen und daher auch gar keine statische Fragen, bei denen nicht irgend eine Systemverbindung vorausgesetzt würde. Schon aus diesem Gesichtspunkt würde also das virtuelle Princip so weit reichen als die Mechanik selbst.

Wir haben auf den Charakter der Allgemeinheit, welcher mit dem virtuellen Princip verbunden ist, schon hier mit einigen Ueberlegungen eingehen müssen, um die Vorstellungen Galileis in ihrem vollen Umfang und ihrer ganzen Bedeutung sichtbar machen zu können. Es wird jetzt darauf ankommen, im Einzelnen Sinn und Art nachzuweisen, in welchen das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten zunächst bei Galilei seine Anwendung findet.

40. Am einfachsten gestaltet sich das virtuelle Princip am Hebel. Es ist bemerkenswerth, dass Galilei sogar den einfachen Fall des gleicharmigen mit gleichen Gewichten beschwerten Hebels durch die Berufung auf die möglichen Bewegungen begreiflicher zu machen sucht. In der vorher erwähnten Schrift über die schwimmenden Körper[1]), in welcher er eine andere und mehr unmittelbare Methode als Archimedes befolgen will, führt er die Waage als erstes Beispiel für das Princip an, dass gleiche Gewichte bei gleichen Geschwindigkeiten gleiche Momente oder Wirkungen repräsentiren. Die schon früher erwähnte Idee, dass kein Grund vorhanden sei, eher nach der einen als nach der andern Seite und mithin nach irgend einer Seite auszuweichen, wird hier sogar noch auf die Gleichheit der möglichen Bewegungen und Geschwindigkeiten an den Endpunkten der Waage zurückgeführt. Auf diese Weise findet sich das Princip erläutert: „Gleiche absolute mit gleicher Geschwindigkeit bewegte Gewichte haben gleiche Kräfte und Momente in ihrem Wirken“ [2]). Hieran schliesst sich alsdann als zweites Princip, dass bei ungleichen Geschwindigkeiten diese letztern für das Verhältniss der Kräfte maassgebend sind, und der ungleicharmige Hebel bietet hier das Hauptbeispiel. Die absoluten Gewichte bilden, wie wir schon Nr. 19 bemerkt haben, einfache Momente, und die möglichen Geschwindigkeiten treten daher mit ihren Verhältnisszahlen als Factoren hinzu. Die am ungleicharmigen Hebel von den beiden Hebelarmen gleichzeitig beschreibbaren Bogenelemente verhalten sich wie die Hebelarme selbst, und da auf diese Weise das Geschwindigkeitsverhältniss der möglichen Bewegungen den Hebelarmen proportional bestimmt ist, so müssen die einfachen Momente der Gewichte dieses Verhältniss durch eine umgekehrte Proportionalität ausgleichen. Nur wenn Letzteres geschieht, kann Gleichgewicht vorhanden sein; denn die Momente, die auf beiden Seiten gleich sein müssen, setzen sich aus der einfachen Schwere und den möglichen Geschwindigkeiten zusammen. Hiebei ist zu bemerken, dass es für die Beurtheilung des Gleichgewichts gar nicht auf die Kenntniss der absoluten Geschwindigkeiten, sondern nur auf die der Geschwindigkeitsverhältnisse ankommt. Wird nämlich der Hebel ganz abstract gedacht, und ersetzt man etwa die Gewichte durch Federn von verschiedenen Spannungen, so

[1]) Bd. XII der angef. Ausg. S. 15. [2]) Ibid. S. 14.

bleibt die absolute Geschwindigkeit, mit welcher die angreifenden Kräfte bei Störung des Gleichgewichts oder für sich allein in freier Wirksamkeit zu agiren vermöchten, für die Bestimmung der virtuellen Beziehungen vollkommen gleichgültig.

Wenn sich schon der gleicharmige mit gleichen Gewichten beschwerte Hebel durch das virtuelle Princip noch weiter erklären lässt, so liegt hierin ein wichtiges Anerkenntniss, dass jenes Princip eine grössere Vertiefung der Einsichten erlaube als jedes andere, und dass es logisch nicht zulässig sei, den Satz vom gleicharmigen und gleichbeschwerten Hebel noch ferner als wirkliches Axiom geltend zu machen. Was sich noch weiter zerlegen und begründen lässt, kann selbst nicht Axiom sein. Es muss also in Uebereinstimmung mit dem Verfahren, welches Galilei schon in jener hydrostatischen Abhandlung von 1612 mit vollem Bewusstsein des Gegensatzes zu Archimedes beobachtete, dasjenige Princip als das fundamentalste angesehen werden, welches am unmittelbarsten aus dem blossen Begriff der Kraft und ihres Maasses folgt. Dieses Princip beschränkt sich nun freilich auf die Forderung, dass Kräfte, um im Gleichgewicht zu sein, eine Summe gleich Null ergeben müssen. Hiebei kommt, wie man sieht, nicht nur ihre absolute Grösse, sondern auch ihr Sinn oder überhaupt ihre Richtungsverschiedenheit in Frage. Um daher das virtuelle Princip allgemein anwenden zu können, ist es nicht genug, wie im Fall der parallelen Kräfte am Hebel, die Folgen des direct entgegengesetzten Sinnes der Kräftewirkung oder der virtuellen Bewegung zu kennen, sondern man muss auch die Consequenzen der Combination der andern mannichfaltigen Richtungsverschiedenheiten anzugeben vermögen. An dem vorausgesetzten Hebel entspricht der Drehung des einen Arms in dem einen Sinn eine grade entgegengesetzte Drehung des andern Arms, und die zugehörigen Tangenten der beiden möglichen Bewegungen sind so zu ziehen, dass sie miteinander einen Winkel von zwei Rechten bilden. Diese Anschauungsweise zeigt nun recht deutlich, dass der Fall der grade entgegengesetzten Richtung der Kräfte nur eine besondere Gestaltung der im Allgemeinen möglichen, alle Lagen umfassenden Richtungsverschiedenheiten derselben ist. Hieraus folgt, wie das virtuelle Princip ohne Verbindung mit andern Principien kein Ergebniss zu liefern vermöge, und wie namentlich das Reductionsprincip einer Kraft auf eine bestimmte Richtung, hiemit aber auch das Parallelogramm der

Kräfte als unentbehrliches Hülfsmittel erscheint. Mindestens würde es, um das virtuelle Princip zu einem ausreichenden Mittel der Deduction zu machen, erforderlich sein, ihm von vornherein eine solche Ausdehnung zu geben, dass es nicht blos über die Wirkung der virtuellen Geschwindigkeiten, sondern auch über diejenige der virtuellen Richtungen der Wirksamkeit der Kräfte klare und axiomatisch brauchbare Festsetzungen trifft. Von der Erfüllung dieser Forderung findet sich nun aber weder bei Galilei noch sonst eine deutliche Spur, wenn man nicht etwa die Zurückführung des Gesetzes der schiefen Ebene auf das virtuelle Princip dafür gelten lassen will, oder aber die neuere complicirtere Fassung dieses Princips als Zeugniss für die Berücksichtigung der axiomatischen Rolle der Richtungsverschiedenheiten ansieht. In beiden Fällen fehlt aber sehr viel daran, dass sich die unwillkürliche Berücksichtigung oder Einschaltung des Einflusses der Richtungsverschiedenheiten zu einem eigentlichen Princip der Richtungsreductionen gestaltet hätte und als solches ausdrücklich hingestellt worden wäre.

41. In der eigentlich statischen Schrift Galileis, die freilich posthum ist und eine sehr frühe Bearbeitung der überlieferten Kenntnisse repräsentirt, spielt das virtuelle Princip, obwohl es in den verschiedensten Richtungen zur Anwendung gelangt, doch nur die zweite Rolle. So z. B. wird die Erläuterung des Hebelgesetzes dort nur als eine zweite, ebenfalls mögliche Art und Weise der Erörterung unter der Ueberschrift „alcuni avvertimenti circa le cose dette," also unter der Rubrik von ausführenden Bemerkungen beigebracht[1]), und die Wichtigkeit dieser neuen Auffassungsart wird hier keineswegs so betont, wie in der Schrift über die schwimmenden Körper. Hienach können wir annehmen, dass Galileis eigne Neigungen sich auf das virtuelle Princip als auf das klarste und zugleich gründlichste Erklärungsmittel richteten, aber durch die Macht der Tradition und vielleicht auch durch einige Schwierigkeiten der logisch strengen Durchführung gehindert wurden, die eindringendere und naturgemässere Begründungsart überall und an erster Stelle zur Geltung zu bringen. Das eigne erfindende Denken Galileis ist dagegen schwerlich einem andern Leitfaden gefolgt, als demjenigen, welchen in der Statik das virtuelle Princip unwillkürlich jedem sich selbst-

[1]) Della scienza meccanica, Bd. XI der angef. Ausg. S. 95.

ständig bewegenden Geist an die Hand giebt. Das sicherste Kennzeichen für diese Bedeutung des fraglichen Princips ist die Thatsache, dass es unmittelbar aus einem richtigen Begriff der Kraftgrösse folgt, und dass es wesentlich auf der Idee beruht, derzufolge in den beiden Factoren der Kraft, nämlich Masse und Geschwindigkeit, der eine den andern zum Theil zu ersetzen vermöge. Auf diese Compensation ist sogar ausdrücklich in der zuletzt angeführten Stelle hingewiesen.

Gewöhnlich formulirt man heute das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten in der Art, dass man nicht die möglichen Bewegungen und Geschwindigkeiten selbst, sondern die rechtwinkligen Projectionen derselben auf die freie Richtung der angreifenden Kräfte zur Vergleichung bringt. So berechtigt diese Fassung ist, solange man nur auf das Ergebniss sieht, so wenig entspricht sie doch einem natürlichen Gedankengang. Im Fall des Gleichgewichts auf der schiefen Ebene zeigt es sich recht deutlich, wie die natürliche Vorstellungsart zu gestalten sei. Hier ist es die Kraft der vertical ziehenden Schwere, welche sich an der vorgeschriebenen schiefen Richtung des möglichen, d. h. virtuellen Weges gleichsam bricht und nach Maassgabe derselben reducirt. Ihre Wirksamkeit ist längs der schiefen Richtung durch ihr Product mit dem Cosinus des Winkels beider Richtungen, oder für eine gegebene verticale Strecke durch die entsprechende Cosinuslinie auf der Ebene selbst repräsentirt. Nach der Regel des virtuellen Princips wird nun die Geschwindigkeit auf der schiefen Ebene zum Gegenstand der Reduction gemacht, indem man ihre Grösse auf die verticale Richtung durch Hinzufügung eben jenes Cosinusfactors zurückführt, d. h. diejenige Geschwindigkeit bestimmt, welche längs der verticalen Richtung als Projectionsgeschwindigkeit vorhanden ist. Diese letztere Projectionsgeschwindigkeit ist nun keineswegs die im Sinne des Systems mögliche, sondern eine rein ideelle und formale Conception, der keine an die wirkliche Möglichkeit anknüpfende und eventuellen Hergängen bei der Störung des Gleichgewichts nachgebildete Vorstellung entspricht. Denkt man sich das Gewicht auf der schiefen Ebene mit dem vertical herabhängenden Gewicht durch einen über eine Rolle gleitenden Faden verbunden, so sind die möglichen Bewegungen und Geschwindigkeiten der beiden Angriffspunkte der Kräfte, d. h. der Gewichte, einander vollkommen gleich. Auch kann die Richtungsverschiedenheit der beiden Ge-

schwindigkeiten insofern nicht von Erheblichkeit auf die Mittheilung der gegenseitigen Kräftebeziehungen und Spannungen sein, als ja der über die Rolle gehende Faden jeden Zug, den er erfährt, vollständig und unverändert in die andere Richtung fortpflanzt. Sehr deutlich wird der hier fragliche Sachverhalt, wenn man sich auf der schiefen Ebene an Stelle des Gewichts eine den Endpunkt des Fadens spannende Feder von gleicher Wirkung angebracht denkt. In diesem Fall kann von Reduction der virtuellen Geschwindigkeiten gar nicht mehr die Rede sein. Ob die Ebene horizontal, beliebig schief oder selbst vertical ist, bleibt für die Wirkung der Feder gleichgültig. Will man daher die virtuelle Bedeutung eines Systems, wie das beschriebene ist, untersuchen, so hat man Zweierlei zu unterscheiden. Erstens muss man nach dem Einfluss fragen, den die Combination der verticalen mit der schiefen Richtung auf zwei an dem Faden längs der beiden Richtungen wirkende Kräfte ausübt. Da der Bewegung des einen Angriffspunkts eine gleich grosse des andern entsprechen muss, und Zug wie Gegenzug einander auch der Richtung nach genau entgegengesetzte Bewegungen hervorzubringen streben, so müssen nach dem virtuellen Princip die beiderseitigen Kräfte gleich sein. Diese Ueberlegung liefert also vorläufig noch keineswegs das Gesetz der schiefen Ebene. Zu dem letzteren gelangt man erst, wenn man den zweiten Punkt in Erwägung zieht. Es ist nämlich das Verhältniss des Fadens zu den beiden Richtungen und die hiedurch determinirte Beziehung der Kräfte nicht das eigentlich Erhebliche, sondern es handelt sich um das Verhalten einer verticalen Kraft, die auf der vorgeschriebenen schiefen Richtung angreift. Ist der Wirkungstheil dieser Kraft einmal bestimmt, so hat die Beziehung durch Vermittlung des Fadens kein Interesse mehr; denn man weiss bereits, was man in Rücksicht auf die schiefe Ebene feststellen und erklären will. Wird aber jener Wirkungstheil nicht unmittelbar bestimmt, so kann auch die Einschiebung des Fadens und seiner Beziehungen nicht dazu helfen, den Mangel vermöge des virtuellen Princips zu ergänzen. Dieses Princip liefert nichts als die Bedingung, dass die beiden Momente oder Kräfte und zwar jede nach der Richtung, auf der sie wirkt, einander gleich und entgegengesetzt sein müssen. Wie aber eine nicht nach der schiefen Richtung wirkende Kraft beschaffen sein müsse, um den fraglichen gleichen und entgegengesetzten Effect hervorzubringen,

muss besonders beantwortet werden. Es ist daher reiner Schein, wenn das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten in seinem strengen und speciellen Sinn dazu dient, das Gesetz der schiefen Ebene zu beglaubigen. Versteht man das Princip aber nach Maassgabe der heute gewöhnlichen Formulirung, derzufolge die virtuellen Momente gleich auf die Richtung der angreifenden Kräfte reducirt zu nehmen sind, so kann die Erklärung der schiefen Ebene ebenfalls nur ein Schein sein. Man hat nämlich alsdann das Princip der schiefen Ebene bereits demjenigen der virtuellen Geschwindigkeiten einverleibt, indem man die Richtungsreductionen zu einem Bestandtheil der Voraussetzungen des virtuellen Princips selbst machte.

42. Wir können die Prüfung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten erst dann vervollständigen, wenn wir in das Zeitalter gelangt sein werden, in welchem der Begriff der unbegrenzt kleinen Verschiebung eine durch die moderne Analysis unterstützte Rolle spielt. An dieser Stelle und für die Anwendungen, die wir hier im Auge hatten, blieb dieser Umstand gleichgültig. Jedoch kann der Begriff des virtuellen Moments im Allgemeinen nur dadurch streng fixirt werden, dass man eine unbegrenzt kleine Verschiebung aus der Ruhelage zu Grunde legt oder, mit andern Worten, das System der virtuellen Bewegungen und Geschwindigkeiten in denjenigen Eigenschaften betrachtet, die bei unbeschränkter Annäherung desselben an die Gleichgewichtslage hervortreten. Hiedurch wird von jeder Veränderung abgesehen, die erst mit der weiteren Entwicklung der Bewegung erheblich werden kann, und es werden die Zustände innerhalb des Spielraums jener ersten kleinen Bewegung als in sich ununterschieden betrachtet. Warum Letzteres möglich sei, kann erst mit dem späteren Eingehen auf das Stetigkeitsprincip und auf die infinitesimalen Verhältnisse erörtert werden.

Für das Zeitalter Galileis sind nur noch die Anwendungen wichtig, die das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten auf hydrostatische Verhältnisse erfahren hat, und wir werden hiebei zugleich zu zeigen haben, inwiefern die neuere Behandlung der Hydrostatik zu den allgemeinen Principien der Mechanik in Beziehung trat.

Archimedes, auch in diesem besonderen Zweige das Vorbild Stevins und Galileis, hatte die Hydrostatik in seiner Schrift über die schwimmenden Körper nach eigenthümlichen, an die Eigen-

schaften der Flüssigkeiten anknüpfenden Principien behandelt, und bis auf Galilei ist auch in der That kein Schritt geschehen, der ernstlich auf eine Verbindung der allgemeinen Statik mit der Hydrostatik abgezielt hätte. In der nicht einmal griechisch auf uns gekommenen, aus zwei Büchern bestehenden, von Commandinus 1565 nach einer lateinischen Uebersetzung unter dem Titel De iis quae vehuntur in aqua herausgegebenen Archimedischen Schrift steht gleich an erster Stelle die Voraussetzung, dass in einer Flüssigkeit der weniger gedrückte Theil durch den mehr gedrückten in die Höhe getrieben werde, und dass jeder Theil von der senkrecht über ihm befindlichen Flüssigkeit gedrückt werde. Auf dieser Grundlage werden nun die Cardinalsätze entwickelt. So spricht der fünfte Satz des ersten Buchs das Einsinken eines leichteren Körpers bis zur Verdrängung eines gleichen Gewichts der Flüssigkeit aus, und der siebente Satz enthält das Gesetz des Gewichtsverlusts der schwereren Körper. Weiter handelt es sich dann im Verlauf der Schrift wesentlich um die Behandlung mathematisch interessanter Formationen, wie der Kugelabschnitte und parabolischen Konoide in Rücksicht auf deren Stabilitätsverhältnisse.

Das von Archimedes gebrauchte Princip, demzufolge jeder Theil von der senkrecht über ihm befindlichen Flüssigkeit gedrückt wird, legte es sehr nahe, den Druck einer Flüssigkeit auf die Gefässwandungen zu bestimmen. Stevin löste diese Aufgabe zuerst und zwar in einer originellen, jedoch nirgend auf die allgemeinen Gesetze der Mechanik zurückgreifenden Weise, und hiemit ergab sich auch zugleich die hydrostatische Paradoxie, dass eine Flüssigkeitsmasse einen grössern Druck als ihr eignes Gewicht verursachen kann. In der schon früher angeführten französischen Ausgabe der Stevinschen Werke bildet die Hydrostatik das vierte Buch der Statik. Nachdem in der zehnten Proposition[1]) der Satz festgestellt worden, dass der horizontale Boden von der Flüssigkeitssäule, die bis zum Niveau reicht, gedrückt werde, legt das zweite Corollar[2]) eine Veranstaltung dar, vermöge deren sich unmittelbar einsehen lässt, wie jener Satz nicht blos für eine wirklich verticale, sondern auch für jede schräge und beliebig gewundene Flüssigkeitssäule Geltung habe. Um diesen erweiterten

---

[1]) Stevin, Oeuvres mathématiques, Leyden 1634, Statik S. 487.
[2]) Ibid. S. 488.

Satz, dass jeder Canal von beliebigem Lauf und von beliebig wechselnden Dimensionen den horizontalen Boden so drücke, als wenn über dem letztern eine verticale Flüssigkeitssäule mit der Basis der Canalröhre und bis zur Höhe des Canalniveaus lastete, — um diesen allgemeinen Satz zu beweisen, bedient sich Stevin in dem angeführten Corollar einer in der That sinnreichen Wendung. Er macht nämlich zunächst geltend, dass die Ersetzung eines Theils der Flüssigkeitsmasse durch einen gleich schweren festen Körper den Druck auf den Boden nicht ändere. Alsdann ersetzt er alle Flüssigkeit dergestalt durch einen festen Körper, dass innerhalb des letztern nur eine beliebig gewundene Röhre, die bis auf den Boden reicht, mit Flüssigkeit gefüllt bleibt. Der Druck dieses Flüssigkeitscanals auf den Boden ergiebt sich nun, wenn man den Druck des festen Körpers durch selbständige Festhaltung dieses Körpers isolirt denkt. Das Gefäss hat der Voraussetzung nach verticale Seitenwände und die Festhaltung des die Flüssigkeit bis auf den gewundenen Canal ersetzenden gleich schweren Körpers kann den Druck, den der letztere auf den gesammten Boden mit Ausnahme der Canalbasis ausübt, offenbar nicht ändern. Der fragliche Körper ist nämlich auch ohnedies nicht verschiebbar, indem er sich ja der Voraussetzung nach im Gleichgewicht befindet. Seine Festhaltung ändert also nichts an dem Druck, den er übt oder erfährt. Sie dient nur, um die beiden Wirkungen, welche durch ihn und durch die Grundfläche der Röhre gegen den Boden des Gefässes ausgeübt werden, von einander zu trennen. Dieser Vorstellungsart gemäss ergiebt sich nun, dass von dem auf dem Boden gleichvertheilten Druck derjenige Theil desselben, welcher der Canalbasis entspricht, auch wirklich durch die Fortpflanzung der Spannungen in dieser gewundenen Flüssigkeitsröhre verursacht wird. Der umgebende Körper bildet aber für diese Flüssigkeit nichts als eine Wandung, und so ist denn bewiesen, dass in einer beliebig gestalteten Röhre, d. h. überhaupt in einem beliebig gestalteten Gefäss, dessen Boden jedoch horizontal ist, der auf diesen Boden ausgeübte Druck dem Gewicht einer Flüssigkeitssäule entspricht, welche diesen Boden zur Grundfläche und die Erhebung des Niveaus zur Höhe hat.

Wir haben diese Stevinsche Ableitungsart ausführlicher dargestellt, weil dieselbe zeigt, welche Kunstgriffe erforderlich werden können, wenn man bei den specifisch hydrostatischen Principien

stehen bleibt und keine Annäherung an die allgemeinen statischen Gesetze unternimmt. Der Beweis, den Stevin für die Druckgrösse giebt, welche die Seitenwände zu erleiden haben, hat mehr mathematisches als mechanisches Interesse. Die elfte Proposition[1]), in welcher die an sich schwierige Bestimmung des Seitendrucks ausgeführt wird, zeichnet sich daher mehr durch die Anwendung einer Art infinitesimaler Zerlegungs- und Grenzmethode, als durch neue mechanische Gesichtspunkte aus. Das mathematische Kunstmittel ist hier die Einschliessung in Grenzen. Es wird eine unbegrenzte Anzahl horizontaler Schichten gebildet. Der jeder Schicht entsprechende Streifen der Wandung würde nun mehr gedrückt werden, wenn er, statt irgend einen Winkel zu bilden, am untern Niveau der Schicht horizontal gelegen wäre, und er würde weniger gedrückt werden, wenn er in der Ebene des obern Niveaus läge. Der Druck, den er wirklich erfährt, ist in diesen beiden Grenzen eingeschlossen, und da sich diese Grenzen beliebig nähern lassen, so lässt sich ein strenges Grenzresultat finden. Heute würden wir von vornherein unbegrenzt kleine Flächenelemente annehmen, und sofort summiren oder integriren. Jeder Punkt der Seitenwand wird alsdann so gedrückt, als wenn sich über ihm eine verticale Flüssigkeitssäule bis zur Höhe des obersten Niveaus befände. Die Bestimmung der Höhe des Cylinders, welchen man sich über einem begrenzten, irgend eine krumme Oberfläche repräsentirenden Stück der Seitenwandung, auf der Ausbreitung des letztern in einer Ebene, lastend denken muss, ist nun reine Sache der Rechnung und hängt nicht mehr von der Anwendung mechanischer Grundsätze ab. Hieran ändert auch diejenige Ausdrucksart dieser Höhe nichts, nach welcher dieselbe als der verticale Abstand des Schwerpunkts der Fläche von dem Niveau der Flüssigkeit bezeichnet wird. Diese Formulirungsart ist nämlich rein mathematisch, und selbst der Begriff des Schwerpunkts spielt hiebei keine mechanische Rolle.

43. Während Stevin mit seiner hydrostatischen Methode noch wesentlich auf dem Standpunkt des Archimedes stehen bleibt, unternimmt Galilei eine Begründung der hydrostatischen Verhältnisse auf die allgemeinen Grundsätze der Statik und insbesondere auf das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten. Seine Abhandlung über die schwimmenden Körper enthält eine grundlegende

---

[1]) Ibid. S. 490.

Einleitung ganz allgemeiner Natur, — ein Umstand, der uns schon oft genöthigt hat, uns auf sie für die allgemeinen mechanischen Grundbegriffe und Grundsätze zu berufen, und der um so bezeichnender ist, als der Verfasser mit der fraglichen Schrift wesentlich nur die Absicht hatte, die Archimedischen Hauptsätze der Hydrostatik gegen Einwendungen zu vertheidigen. In dieser Einleitung spricht er es, woran hier noch einmal erinnert sei, gradezu aus[1]), er wolle unmittelbarere Gründe als Archimedes angeben und eine andere Methode befolgen. In dem erwähnten Zusammenhang entwickelt er den Begriff des Moments, wie wir ihn Nr. 17 auseinandergesetzt haben. Im Anschluss hieran stellt er denjenigen Grundsatz auf, der den axiomatischen Kern des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten enthält, indem er die Momente bei ungleichen Gewichten durch das umgekehrte Verhältniss der Geschwindigkeiten einander gleich werden lässt. Ganz unverkennbar und genau im modernen Sinne tritt nun aber das virtuelle Princip bei der besondern Behandlung der einzelnen hydrostatischen Combinationen hervor.

Zunächst wird das partielle oder totale Einsinken der Körper in Flüssigkeiten aus den Verhältnissen der entgegengesetzten Momente erklärt[2]). In einer höchst eleganten Weise wird das virtuelle Princip dadurch zur Anwendung gebracht[3]), dass das Einsinken eines Prisma in eine von einem ebenfalls prismatischen Gefäss begrenzte Flüssigkeit mit dem dadurch hervorgebrachten Steigen des Niveaus dieser Flüssigkeit verglichen wird. Die Erhebung des Prisma entspricht hiebei in analoger Weise einem Sinken des Flüssigkeitsspiegels. Was nun hier als nach Maassgabe des virtuellen Princips im Verhältniss der Niveauausdehnung und der Prismabasis stehend gedacht wird, ist der Weg, den die Grundfläche des Prisma, und der Weg, den der Flüssigkeitsspiegel bei seiner Veränderung in verticaler Richtung beschreibt. Der Effect des Eintauchens des Prisma muss, wie man sieht, ein analoger sein, als wenn es sich um communicirende Röhren und um das Eingiessen von Flüssigkeit in die engere handelte. Dennoch kann man einige Bedenken hegen, ob die Vorstellung des Vorgangs in Rücksicht auf den Einfluss, den die Vermehrung des Volumens der Gesammtmasse durch das Prisma ausübt, nicht etwa zu complicirt sei, um als ein einfacher Beweis

---

[1]) Bd. XII der Werke, S. 13—14. [2]) Ibid. S. 17. [3]) Ibid. S. 20.

gelten zu können. Diese Schwierigkeit würde jedoch nur die mathematische Auseinandersetzung betreffen. In rein mechanischer Hinsicht bleibt die Auffassungsart Galileis eine höchst naturgemässe. Während das Prisma unmittelbar nur nach Maassgabe seiner Grundfläche zu wirken hat, muss durch seine Bewegung mittelbar eine Erhebung nach Maassgabe des ganzen Niveaus bewerkstelligt werden. Die Geschwindigkeiten in der Bewegung der einen und der andern Fläche müssen sich daher umgekehrt wie diese Flächen verhalten. Uebrigens hebt sich jene nur anscheinende Schwierigkeit, wenn man erwägt, dass der Vorgang genau derselbe sein muss, wie wenn man bei communicirenden Röhren in der engeren derselben die Flüssigkeit um eine gewisse Strecke hinunterdrückte. Das Niveau in der weiteren müsste alsdann in dem umgekehrten Verhältniss des Flächenquerschnitts steigen. Hienach ist Galileis Vorstellungsart völlig exact, und die beiden Momente, welche in Frage kommen, sind einander gleich, weil sich die Geschwindigkeiten umgekehrt wie die afficirten Massen verhalten.

Auf ähnliche Weise sucht nun Galilei die von Archimedes her bekannten Thatsachen stets auf das virtuelle Princip zurückzuführen. Bemerkenswerth ist hiebei, dass er, wie in dem Fall des eingetauchten oder herausgezogenen Prisma, von vornherein von wirklichen Bewegungen ausgeht und so die starren Verhältnisse der Statik in ihrer Entstehungsart und in ihren möglichen Veränderungen zur Anschauung bringt. Man hat zwar an Einzelheiten in Galileis Abhandlung über die schwimmenden Körper Mancherlei auszusetzen gehabt, und auch noch Lagrange[1]) hat sich dem Urtheil, welches mehrfach die erforderliche Strenge der Ableitungen vermisst, im Allgemeinen angeschlossen; indessen bleiben diese Bemängelungen für den entscheidenden Hauptpunkt unerheblich. Der letztere besteht nämlich in der Verbindung der Hydrostatik mit der allgemeinen Mechanik und insbesondere in der Erkenntniss, dass das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten das geeignetste Erklärungsmittel für die Gleichgewichtsgesetze der Flüssigkeiten sei.

44. Wir schliessen an Galileis neue hydrostatische Beweismethode hier gleich die in der That geistreichen Wendungen Pascals an, der unverkennbar durch den Vorgang des grossen

---

[1]) Mécanique analytique, Bd. I, 1811, erste Abth. Sect. VI, Art. 3.

Italieners auf seine Auffassungsart und auf die hydrostatische Anwendung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten hingeleitet worden ist. In der, Traité de l'équilibre des liqueurs betitelten Abhandlung, welche 1663, d. h. ein Jahr nach Pascals Tode herausgegeben wurde, wird jede Flüssigkeit, die sich in einem Gefäss befindet, als eine Maschine betrachtet, welche in ähnlicher Weise, wie der Hebel und die andern einfachen Potenzen, die gegenseitige Wirksamkeit der angreifenden Kräfte regelt und für deren Gleichgewicht bestimmte Verhältnisse vorschreibt. Auf der Grundlage dieser Anschauung wird das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten sogar zur Erläuterung des gleichen Drucks gebraucht, der auf jeden Theil der die Wandungsausschnitte ersetzenden Stempel gerichtet ist. Denkt man nämlich einen solchen Stempel um eine gewisse Strecke vorgeschoben, so dass er mit seinem cylinderförmigen Volumen einen entsprechenden Theil der Flüssigkeit verdrängt und ihn nöthigt, den andern Stempel, der in einem andern Theil der Wandung angebracht ist, hinauszuschieben, so wird die Verschiebung dieses zweiten Stempels ihrer Grösse nach von der Oberfläche desselben d. h. von dem Querschnitt des Cylinders abhängen, in welchem man denselben fortgeschoben denkt. Die Verhältnisse der Stempelbewegung werden genau dasselbe sein, was die Veränderungen des Niveaus in zwei communicirenden Röhren sind. Hienach werden die folgenden Worte Pascals, durch welche in der angeführten Schrift der methodische Hauptgesichtspunkt ausgedrückt ist[1], keiner weitern Erläuterung bedürfen: „Man muss bewundern, dass sich in dieser neuen Maschine jene beständige Ordnung vorfindet, die bei allen früheren, nämlich dem Hebel, der Schraube ohne Ende u. s. w. statthat und darin besteht, dass der Weg in demselben Verhältniss wie die Kraft vermehrt wird . . . . dergestalt, dass sich der Weg zum Weg wie die Kraft zur Kraft verhält, was man sogar für die wahre Ursache jener Wirkung nehmen kann, da es offenbar dasselbe ist, 100 Pfund Wasser einen Zoll Weges, als ein Pfund Wasser 100 Zoll machen zu lassen." Schon Galilei hatte sich in seiner kleinen Statik Mühe gegeben, das Vorurtheil zu bekämpfen, als wenn man vermöge der Maschinen die angebrachte Kraft vermehren könne. Er hatte hiebei wiederholentlich bemerkt, dass

[1]) Pascal, Oeuvres, Paris 1779, Bd. IV, S. 227 (Cap. 2 des Traité).

man an dem einen Factor der Kraftwirkung, z. B. an dem Wege verliere, was man an dem andern Factor, also etwa der gleichzeitigen Intensität der Druckwirkung gewinne. Auch hatte er es schon bei den Formulirungen seiner Principien ausgesprochen, dass sich die Momente aus Gewicht und Geschwindigkeit zusammensetzen, und dass der eine Factor als Compensation des theilweisen Mangels des andern dienen könne. Aus diesem Grunde würde es unhistorisch sein, die Pascalsche Bemerkung von den 100 Pfund, die einen Zoll und dem einen Pfund, welches 100 Zoll weit bewegt wird, etwa von Descartes ableiten zu wollen, der allerdings die mechanische Einerleiheit der beiden Effecte ausdrücklich formulirte, hiemit aber nichts mehr sagte, als was auch schon Galilei festgestellt und zum Vergleichungsprincip der Kräfte gemacht hatte.

45. In unserer Untersuchung der statischen Principien im Zeitalter Galileis sind wir bis jetzt zu drei Ausgangspunkten gelangt. Der eine derselben ist bereits vom Alterthum überliefert und ist das Princip vom gleicharmigen und gleichbeschwerten Hebel oder, wenn man will, auch der daraus abgeleitete Satz von der Beschwerung des ungleicharmigen Hebels im umgekehrten Verhältniss der Hebelarme. Der zweite Ausgangspunkt, nämlich das Gesetz des Gleichgewichts an der schiefen Ebene, erhält nur bei Stevin eine selbständige Begründung und wird bei Galilei, der nach Einheit der Principien strebt, wenigstens scheinbar auf das Gleichgewicht des gleicharmigen Hebels zurückgeführt. Der dritte Ausgangspunkt ist derjenige, welcher am unmittelbarsten aus dem Begriff der Kraft und aus der Zerlegung derselben in zwei Factoren hervorgeht, und repräsentirt denjenigen Grundsatz, welchen man später in der umfassendsten Weise als Princip der virtuellen Geschwindigkeiten formulirte. Er ersetzt, wie schon Galilei annahm, sogar das Princip vom gleicharmigen Hebel und dient ausserdem zuerst dazu, von der allgemeinen Statik eine Brücke zur Hydrostatik zu schlagen. Doch ist auch dieser Ausgangspunkt nicht im Stande, in seiner gewöhnlichen Gestalt das Princip der schiefen Ebene oder überhaupt der Reduction einer Kraft auf eine Richtung zu ersetzen, so dass der Einfluss der Richtungsverschiedenheiten der Kräfte auf ihre gemeinschaftliche Wirkung noch immer das principielle Hauptproblem bleibt. Diese Lücke ist um so fühlbarer, als sich die Beweise für den Satz vom Gleichgewicht an der schiefen Ebene als unbefriedigend,

wie bei Stevin, oder als illusorisch, wie bei Galilei, erwiesen haben.

Dasjenige Princip, durch welches später diese Lücke in einem gewissen Maass ausgefüllt wird, nämlich der Satz vom Parallelogramm der Kräfte, hat im Zeitalter Galileis nur erst eine rudimentäre Gestalt. Obwohl es sich bei Galilei nicht blos auf phoronomische Bewegungen, sondern auf die Momente oder Kräfte selbst beziehen soll, so hat das Rechteck, welches behufs der parabolischen Wurfbewegung für die Zusammensetzung der horizontalen Geschwindigkeit und der verticalen Schwere construirt wird, thatsächlich doch nur eine Bedeutung für die blossen Bewegungserscheinungen, da dieses Beispiel keine Gelegenheit bietet, den Factor des Gewichts durch Geschwindigkeiten zu compensiren. Das Parallelogramm der Kräfte wird aber erst dadurch zu einem mehr als phoronomischen Satz, dass die auf denselben Punkt wirkenden Kräfte nicht durch blosse Extensionen der von ihnen hervorzubringenden Bewegungen, sondern auch durch die Intensitäten gemessen werden, die von dem Factor des Gewichts herrühren oder sonst eine Spannung oder rein statische Beziehung zur Ursache haben. Hiemit erklärt es sich auch leicht, warum in der fraglichen Periode die Zusammensetzung der Bewegungen eine ganz geläufige Vorstellung ist, während sich von einer statischen Anwendung des Princips der Zusammensetzung der Kräfte keine solche Spur findet, durch welche die Kenntniss dieser Seite des Princips bewiesen würde. Da nun dieser statische Gebrauch des Zusammensetzungsprincips mit der principiellen Handhabung des Gesetzes der Reduction einer Kraft auf eine gegebene feste Richtung wesentlich einerlei ist, so erklärt sich sogleich die Thatsache, wie auch der Satz von der schiefen Ebene nicht in das rechte Licht treten und das völlig Fundamentale an demselben nicht abgesondert werden konnte.

Eine besondere Illustration für den Gegensatz, in welchem sich die Bemühungen um das Princip der Zusammensetzung blosser Bewegungen zu der Aufgabe der eigentlichen Kräftezusammensetzung befanden, bildet das theoretische Verhalten Robervals. Die berühmte Tangentenmethode dieses überall den naturgemässesten Wegen nachgehenden Mathematikers beruht auf dem Princip des Parallelogramms der Bewegungen. Die Tangenten werden dadurch construirbar, dass man sie als die resultirenden Richtungen der die Curve beschreibenden Elemen-

tarbewegungen behandelt. Wo sich für einen Punkt die Zusammensetzung der erzeugenden Bewegungen ausführen lässt, ist auch hiemit die Tangente in diesem Punkte gegeben. Die Abhandlung[1]), in welcher die Aufgabe der Tangentenziehung phoronomisch gelöst wird, trägt bezeichnenderweise die Ueberschrift „Bemerkungen über die Zusammensetzung der Bewegungen und über das Mittel, die Tangenten an krumme Linien zu finden (Observations sur la composition des mouvements etc.).“ Dort wird das Parallelogramm der Bewegungen ebenso präcis als eingehend entwickelt. Besonders interessant ist die Auffassung[2]), nach welcher die beiden Linien der Seitenbewegungen beide zugleich als bewegt und der Ort des Beweglichen als der fortschreitende Durchschnittspunkt derselben vorgestellt wird. Hiedurch wird die doppelte Bewegung des Punktes sehr deutlich, indem derselbe durch das Heraustreten jeder Linie aus ihrer ursprünglichen Lage eine zwiefache und zugleich seinen ursprünglichen Determinationen entsprechende Position erhält. Er soll sich nämlich stets zugleich nach zwei Richtungen bewegen, und dies kann offenbar nur so geschehen, dass er den Linien, die ursprünglich diese beiden Richtungen ausdrücken, mit seinen ihm in jedem Punkt anhaftenden Richtungen parallel bleibt. Die fortschreitenden Linien stellen also die den Punkt afficirenden Richtungen und ausserdem durch das Verhältniss der Geschwindigkeit ihres Fortschreitens auch die determinirenden Geschwindigkeiten dar.

Die Voraussetzung, dass die Tangente in einem Punkt einer Curve die Bewegungsrichtung darstelle, wird von Roberval als Axiom hingestellt. Für das in der 5. Proposition[3]) aufgestellte Tangentenproblem wird zunächst die allgemeine Lösung in Form der allgemeinen Regel gegeben, die Componenten der Bewegungsrichtung aufzusuchen, und es wird dann die specielle Anwendung dieser Regel an einer Reihe von Curven gezeigt, wobei der einfache Fall der Parabel das erste Beispiel liefert. Obwohl nun die geometrischen Erörterungen, die sich an die Behandlung der verschiedenen Curven anschliessen, den materiellen Hauptinhalt der ganzen Arbeit repräsentiren, so bleibt doch für die Mechanik jene vorbereitende Auseinandersetzung des Princips der Zusammensetzung der Bewegungen sehr werthvoll. Noch höher

---

[1]) Mémoires de l'académie des sciences (von 1666—99), Bd. VI, Paris 1730.
[2]) Ibid. S. 7. [3]) Ibid. S. 22.

stellt sich dieser Werth, wenn man die eleganten Robervalschen Entwicklungen mit den unbehülflichen und weitschichtigen Auslassungen vergleicht, zu denen später Varignon veranlasst wurde, als er dem Zusammensetzungsprincip der Kräfte eine statische Bedeutung und Anwendung gab. Auch beruht dieser Vorzug nicht etwa auf der äussern stilistischen Fassung, sondern auf der Klarheit und Schärfe des Gedankenganges; denn jene Abhandlung über die Zusammensetzung der Bewegungen, die erst 1693, also 18 Jahre nach dem Tode ihres Verfassers, in einem Foliobande der Pariser Akademie erschien, war nicht einmal von Roberval selbst unmittelbar abgefasst worden. Sie war die Redaction eines Privatschülers, jedoch 1668 von Roberval behufs Vorlesung in der Akademie mit Randbemerkungen versehen worden.

In einem nur einige Seiten füllenden Aufsatz unter dem Titel: „Projet d'un livre de mécanique traitant des mouvements composés“ [1]) wird die Idee einer Art Phoronomie oder Kinematik, oder vielmehr der Auffassung der gesammten Natur aus dem Gesichtspunkt der Zusammensetzung der Bewegungen entwickelt. Hiebei werden alle Kräftewirkungen, einschliesslich der animalischen, als Ergebnisse von Zusammensetzungen angesehen. Man sieht also, dass Roberval das Problem in seiner weitesten Ausdehnung ins Auge fasste, und dass er davon ausging, mit seinem Princip der Zusammensetzung der Bewegungen alle Ortsveränderungen in der belebten wie in der unbelebten Natur decken und aus einfacheren Antrieben erklärlich machen zu können. Um so bemerkenswerther bleibt nun für das Verständniss der geschichtlichen Entwicklung die Thatsache, dass derselbe Autor, welcher sich vorzugsweise mit der Zusammensetzung der Bewegungen beschäftigte, der rein statischen Seite der Kräftezusammensetzung nicht nähergetreten ist.

46. Das Bild, welches wir von der Auffassung der statischen Principien im Zeitalter Galileis entworfen haben, ist, abgesehen von dem Keim, welcher sich für das später fruchtbarer gewordene Princip der geringsten Wirkung bereits bei Fermat findet, durch das Eingehen auf andere Erscheinungen und Persönlichkeiten nicht vollständiger zu machen, als es sich ohnedies verzeichnen liess. Höchstens kann es noch hier und da an Deutlichkeit gewinnen, wenn man zeigt, wie es von manchen Seiten aufgefasst

---

[1]) Ibid. S. 68—71.

und bisweilen ernstlich missverstanden wurde. Die Art, wie sich Descartes zu den Errungenschaften seiner Zeit und namentlich zu der neuen Wissenschaft Galileis stellte, wird uns im nächsten Capitel beschäftigen, in welchem wir den Einfluss der metaphysischen Ausgangspunkte zu erörtern haben. Da Descartes' Ruhm einerseits auf seiner Geometrie und andererseits auf seiner Philosophie beruht, und da uns die Grundlegung der analytischen Geometrie hier nicht unmittelbar interessirt, so wird Cartesius Bedeutung für die Mechanik vornehmlich in dem ungünstigen Einfluss der metaphysischen Form seiner Gesichtspunkte bestehen und daher fast ausschliesslich in das nächste Capitel gehören. An dieser Stelle müssen wir jedoch noch sein Verhalten zu den statischen Principien insoweit zur Erwähnung bringen, als sich dasselbe von der dem jüngern Zeitgenossen Galileis zugänglichen Ueberlieferung gelegentlich durch einen eigenthümlichen Zug unterscheidet.

Das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten musste für einen philosophischen Denker besondere Anziehungskraft haben, da es sich seinem wesentlichen Gehalt nach als eine blosse Folgerung aus dem Begriff der Kraft gewinnen lässt. In der That wird es auch von Cartesius auf die statischen Grundverhältnisse angewendet, und der französische Denker zeichnet sich hiebei noch besonders durch die Berücksichtigung des Flaschenzuges aus. Die letztere Vorrichtung bildet mit dem Hebel und der schiefen Ebene zusammen die Hauptbeispiele, an welchen das zuerst abstract dargelegte Princip erläutert wird. In einem an Mersenne gerichteten Brief[1]) findet sich die ganze Auffassung der Statik durch Cartesius verhältnissmässig kurz auseinandergesetzt. Von Erheblichkeit ist darin ausser der sehr geschickt gewählten Anwendung auf den Flaschenzug die Darlegung der Fundamentalidee, wonach sich die Kraft aus zwei Factoren, nämlich Gewicht und Geschwindigkeit, zusammensetzt.

Diese Idee war zwar schon von Galilei deutlich genug ausgesprochen worden und bei der Messung der Momente d. h. der Wirkungsgrössen leitend gewesen; allein Descartes hat für dieselbe einen innern, so zu sagen nur logischen Grund anzugeben versucht. Es sei dasselbe, meint er, 100 Pfund einen Fuss heben und noch einmal ausserdem dies thun, als zusammen 200 Pfund

[1]) Descartes, Lettres, Bd. I Paris 1663, Brief 73.

einen Fuss heben[1]). Wirklich geschieht in dem letztern Falle nur gleichzeitig, was in dem andern Falle nacheinander ausgeführt wird. Diese quantitative Einerleiheit des getheilten und des einheitlichen Vorganges ist offenbar der letzte Grund, der sich für die Gleichheit der in beiden Fällen aufgewendeten Kraftgrösse nur irgend angeben lässt. In der engsten Verbindung mit dieser Vorstellungsart steht nun auch der technische Begriff der Bewegungsgrösse (quantité de mouvement), welcher nicht etwa die blosse Ausdehnung der phoronomischen Bewegung, sondern auch die bewegte Masse in Rechnung zieht. Nach diesem Begriff ist also die Bewegung doppelt so gross, wenn das doppelte Gewicht dieselbe Ortsveränderung erfährt, und sechsmal so gross, wenn zugleich der Raum verdreifacht wird. Die beiden Factoren der Bewegungsgrösse treten hiedurch in ihrer Ursprünglichkeit deutlich genug hervor, und die einzige Unbestimmtheit, die noch übrigbleibt, bezieht sich auf die Frage nach der gemeinschaftlichen Zeiteinheit oder überhaupt nach der zeitlichen Identität, welche etwa bei der Vergleichung der räumlichen Bewegungen vorausgesetzt werden soll. Galilei hatte sofort die Geschwindigkeiten eingeführt und hiedurch jede Unsicherheit der Vorstellung ausgeschlossen. Wir verfolgen diesen Unterschied hier jedoch nicht, indem beide Vorstellungen zunächst auf dasselbe Resultat hinzielen und sich in ihren Folgen erst verschiedentlich zu verzweigen anfangen, sobald der Streit über die verschiedenen Messungsarten der Kräfte oder vielmehr über die auseinandergehenden Ideen beginnt, von denen die einzig richtige Schätzungsart der Kräfte begleitet sein kann.

Der Uebergang von der eben erläuterten Vorstellung zu dem virtuellen Princip wird durch die Bemerkung gemacht, dass es für die Vergleichung der statischen Kräfte auf den Anfang der eventuellen Bewegung ankomme. Der Umstand, dass der Flaschenzug in seiner einfachsten Gestalt das erste Beispiel bildet, ist sehr bezeichnend. In der That giebt es keine andere einfache Vorrichtung, durch welche man eine extensive Kraftwirkung in eine intensive Aeusserungsform so anschaulich umsetzen und die Kraftelemente, die sich an dem einen Ende mit ihren Wirkungen aneinanderreihen, einander gleichzeitig nebenordnen könnte. Die parallelen Seile repräsentiren die intensive Summirung oder

[1]) Ibid. Brief 73, S. 332.

Nebenordnung der Spannungen. Während sich der bewegliche Kolben verschiebt, erfährt das Seil an seinem Ende eine Bewegung, die sich nach der Anzahl der parallelen Ueberführungen über die Rollen richtet. Umgekehrt entspricht einer Fortziehung des Seilendes eine in demselben Verhältniss verminderte Anziehung des beweglichen Kolbens. Man hat es also durch eine solche Vorrichtung, deren nähere Kenntniss hier natürlich vorausgesetzt wird, in der Hand, einer mehr extensiven Bewegungsgrösse oder Kraftgrösse eine mehr intensive Form zu geben. Die Spannungen in der ganzen Länge des Seils müssen gleich sein, und es vertreten daher die mehrfach an demselben Kolben ziehenden Seile auch eine mehrfache Spannung oder Kraft. Sehr einfach gestaltet sich die Vorstellung des Vorgangs, wenn man sich mit Cartesius zunächst auf den Fall beschränkt, dass an einem Seil, welches an dem einen Ende befestigt ist und ausserdem noch auf der andern Seite mit seinem freien Ende über eine fest angebrachte Rolle führt, eine andere Rolle, die zugleich den Angriffspunkt der Gewichte oder Kräfte bildet, frei hängt und so eingelegt ist, dass sie von dem unter ihr fortgleitenden Seil gehoben oder herabgelassen wird. Hiebei ist nun klar, dass, wenn die Seiltheile parallel laufen, einer Anziehung des Seilendes um eine bestimmte Strecke das Steigen der beweglichen Rolle um die Hälfte dieser Strecke entsprechen muss. Das doppelt genommene Seil verkürzt sich nämlich als solches nur um die Hälfte der Minderung der Längenausdehnung des einfachen Seils. Die Wege werden sich umgekehrt wie die Intensitäten der Spannungen oder Gewichte verhalten. Hiemit ist zugleich die Art dargethan, wie man den einen Factor der Kraft in den andern verwandeln und das Doppelte einer Spannung oder Gewichtswirkung an Stelle der einfachen, extensiven Wirkungsart erzielen kann.

Es bedarf wohl keiner weiteren Erläuterung, wie an der vorausgesetzten Vorrichtung die gleichzeitigen virtuellen Wege, d. h. die virtuellen Geschwindigkeiten im umgekehrten Verhältniss der angreifenden Gewichte oder der die statischen Wirkungen repräsentirenden Federspannungen stehen müssen. Auch haben wir die Cartesische Behandlung des Flaschenzugs nur besonders hervorgehoben, weil sie sich durch die unmittelbare Anknüpfung an den Kraftbegriff und an das virtuelle Princip auszeichnet.

Galilei hatte bei seiner Erörterung des Gegenstandes[1]) den Hauptton auf die Herbeiziehung von Hebelcombinationen gelegt und sich weniger um die einfache Vorstellungsart bekümmert, vermöge deren sich die Wirkung des Flaschenzuges sogar als Ausgangspunkt für eine ganz allgemeine Nachweisung der virtuellen Verhältnisse der Kräfte benutzen lässt. Sehr spät kam ein Neuerer, nämlich Lagrange, auf diese Seite des Flaschenzuges zurück und versuchte dadurch, dass er alle zu einem System vereinigten Kräfte durch eine Flaschenzugvorrichtung repräsentirte, vom Satz der virtuellen Geschwindigkeiten einen eigentlichen Beweis[2]) zu geben. Diese sehr natürliche Combination des Princips des Flaschenzugs mit demjenigen der virtuellen Geschwindigkeiten ist, wie wir gesehen haben, in ihrer einfachsten und ursprünglichsten Form sehr alt, wird uns aber in einem späteren Stadium noch einmal besonders beschäftigen müssen, um als Ausgangspunkt der Kritik der Beweisversuche für das virtuelle Princip zu dienen.

47. Das virtuelle Princip ist das allgemeinste und so zu sagen am meisten philosophische, welches wir bis jetzt zu berücksichtigen hatten. Die weitere Entwicklung der Mechanik führt zu allgemeinen Formulirungen von grosser Tragweite, unter denen einige der Statik und Dynamik gemeinsam sind und zu ihrem Kern gewisse Vorstellungen über einen geringsten Kraftaufwand haben. Einerseits werden diese Ideen durch die Rücksicht auf die mathematischen Minima der Functionen und andererseits durch die Annahme bestimmt, dass die Natur überall diejenigen Combinationen verursache, für welche sich der geringste Widerstand vorfindet. Der Umstand, dass sich der geniale Mathematiker Fermat mit einer Methode für Maxima und Minima beschäftigte, die als Keim der Differentialrechnung angesehen werden kann, macht es sehr begreiflich, dass er auch in seiner Auffassungsart mechanischer Vorgänge und zwar speciell in seinen Speculationen über das Cartesische Gesetz der Lichtbrechung auf den Gedanken kam, die Natur befolge bei dem Fortpflanzen der Bewegung eine Art Gesetz der Minima. Er ist auf diese Weise

---

[1]) Delle taglie, in Della scienza meccanica, Bd. XI der angef. Ausg. der Werke, S. 104—112.

[2]) Erst in der 2. Ausg. der Méc. anal. Bd. I, erste Abth., Sect. I, Art. 18—19.

der Urheber desjenigen Princips geworden, welches man gewöhnlich als das der geringsten Wirkung (de la moindre action) bezeichnet, und welches durch Maupertuis für Dynamik und Statik in einer Weise erörtert wurde, welche viel Aufsehen gemacht hat. Diese spätere Berühmtheit des Princips in seinen dynamischen und statischen Anwendungen nöthigt uns, schon hier den Fermatschen Grundgedanken hervorzuheben. In einem Brief des fraglichen Mathematikers heisst es[1]: „Ich sah kein zuverlässigeres Mittel als die Brechungen in dem einzigen Princip zu suchen, dass die Natur immer auf den kürzesten Wegen thätig ist (agit toujours par les voies les plus courtes)." Es lasse sich, meint er, auf diese Weise der Punkt der Brechung bestimmen. Der Beweis, welcher in dem erwähnten Brief abgesondert[2]) für das Princip als den letzten Grund des Sinusgesetzes der Lichtbrechung an der Grenze verschiedener Medien geometrisch geführt wird, hat zum eigentlichen Thema den Umstand, dass von einem Punkt des einfallenden zu einem Punkt des gebrochenen Strahls jeder Weg, der durch einen andern Einfallspunkt führte, mit mehr Widerstand verknüpft und zeitlich länger sein würde, als der ursprünglich der Brechungsregel gemäss vorausgesetzte. Da die Widerstände in den beiden Medien verschieden sind, so ist die geringste Widerstandssumme und mithin auch die kürzeste Zeit für den ganzen Weg und den Winkel, in welchem sich derselbe am Einfallspunkt bricht, das Maassgebende.

Ohne hier näher auf die geometrischen Erläuterungen einzugehen, bemerken wir nur, dass Fermat schliesslich seiner naturphilosophischen Idee einen bezeichnenden Ausdruck verleiht, indem er[3]) von der Natur sagt, es sei aus jener Nachweisung zu ersehen, „dass diese grosse Arbeiterin unserer Instrumente und Maschinen nicht bedarf, um ihre Operationen zu vollziehen". Späterhin werden wir bei der allgemeinen Prüfung des Princips der geringsten Wirkung zeigen, dass es in einem gewissen exact bestimmbaren Sinn allerdings ganz allgemeine Gültigkeit hat und sogar jeder einfachsten Kräftecombination zu Grunde liegt. Es wird sich also dieses bis jetzt so dunkel gebliebene Princip ebenso wie dasjenige der virtuellen Geschwindigkeiten nicht nur auf die

---

[1]) Fermat, Varia opera mathematica, Tolosae 1679, S. 156. (Gleiche Seite im Berliner Abdruck der Werke Fermats von 1861.)

[2]) Ibid. S. 158. [3]) Ibid. S. 160.

einfachsten Maschinen, sondern auch schon auf die elementarsten Kräftebeziehungen, also namentlich auf das Parallelogramm der Kräfte anwenden und in diesen Grundformen aller Wirkungsweisen der Natur auffinden lassen. Hieraus wird sich dann erklären, wie in jedem verwickelteren Vorgang mechanischer Natur und mithin auch in dem Gesetz der Lichtbrechung jenes Princip nachzuweisen sein müsse. Bei dieser Betrachtungsart wird dann aber auch der Gesichtspunkt des Zweckes völlig zurücktreten und sogar überflüssig werden. Es wird sich alsdann feststellen, dass die „grosse Arbeiterin", auch von allen Zwecken abgesehen, nicht umhin kann, in ihren Operationen gewisse Minima zu beobachten oder vielmehr nach rein wirkender und von Zwecken unabhängiger Causalität zu produciren.

Schon Heron der Mechaniker soll [1]) die Reflexion des Lichts auf dasselbe Princip zurückgeführt haben, und es wäre daher möglich, dass Fermat, der die Reste des Alterthums genau kannte, durch jene frühere Auffassung zur eignen Verfolgung der Idee bei Gelegenheit seiner Streitigkeiten mit Cartesius veranlasst worden wäre. Woher aber auch die erste Anregung dazu gekommen sein mag, der allgemeinen naturphilosophischen Idee eine mechanische und zunächst speciell optische Seite abzugewinnen; — jedenfalls ist der Anknüpfungspunkt vorläufig ein sehr entlegener geblieben, und es ist auf diese Weise begreiflich, warum das neue Princip bis auf die Gegenwart eine so zweideutige und den übrigen einfachen Grundsätzen der Statik und Dynamik so entfremdete Rolle spielen konnte. Auch seine sehr intime Beziehung zu dem statischen Verhalten der Kräfte ist von uns hier blos vorausgesetzt worden und kann erst später bei der Sichtung seines vielseitiger gewordenen Inhalts nachgewiesen werden. Die metaphysische Form, in welcher das Princip zuerst auftrat, trägt die Schuld, dass es der weitern Entwicklungsgeschichte eine Reihe von Streitigkeiten hinterliess. Eine ähnliche Bemerkung wird sich uns unwillkürlich für alle Begriffe und Vorstellungsarten aufdrängen, welche eine specifisch metaphysische Seite haben, und das nächste Capitel, welches die philosophisch metaphysischen Einflüsse darzustellen hat, wird diesen Sachverhalt mehrfach bestätigen.

---

[1]) Nach Montucla, Histoire des mathématiques, 2. Ausg. Bd. III, S. 644.

Fünftes Capitel.

Einwirkungen der gleichzeitigen Philosophie.

48. Im Zeitalter Galileis ist die in den Schulen herrschende Philosophie, nämlich die Aristotelische, zwar schon im Verfall begriffen, übt aber noch genug Rückwirkungen aus, um als entschieden hemmendes Motiv der neuen Wahrheiten gelten zu müssen. Die Professoren der Aristotelie leugnen, auf die Autorität ihrer antiken Bibel gestützt, die Fallgesetze, und wo Galilei den Inbegriff der Bornirtheit dialogisch repräsentiren will, da wählt er den Namen Simplicius, der ja auch derjenige eines alten Commentators Aristotelischer Schriften gewesen war. Von den Chicanen, welche seitens der Aristoteliker den neuen Wissenschaften damals bereitet wurden, kann man sich einen Begriff machen, wenn man die doch schon sehr abgeschwächten wissenschaftlichen Reactionsbestrebungen der heutigen Aristotelieprofessoren und überhaupt der gegenwärtig amtirenden Metaphysiker veranschlagt. Die philosophische Scholastik der letzten Menschenalter hat dem exacten Denken gegenüber auch da, wo sie nicht mehr speciell Aristotelie war, sondern in eignen Systemchen sich aufspielte, eine ähnliche, nur ungleich machtlosere Rolle gespielt, als das Aristoteliren zur Zeit Galileis.

Was die in der Galileischen Epoche neu aufkommenden Philosophien betrifft, so berührte sich diejenige Bacons von Verulam mit den Grundlagen des exacten Denkens gar nicht, und diejenige Descartes' bekundete positiv die diesem Genre des Denkens theologisch vererbte Eitelkeit in der Hinwegsetzung über die neuen epochemachenden Lehren. Franz Bacon war, ungleich dem ihm gewaltig überlegenen, namensverwandten mittelalterlichen Vorgänger Roger Bacon, ohne Sinn für Mathematik und exactes Denken und nur der Prediger einer groben, so zu sagen handgreiflichen Empirie, die wohl für die mehr beschreibenden Theile des Naturwissens, aber nicht für das mechanische und physikalische Forschen am Platze war. Ohne Kenntniss des Hebelgesetzes wollte der Verfasser des „Neuen Organon“ die Wissenschaft durch ein paar Recepte emporheben, die auf nichts weiter als eine Sammlung von Fällen und Gegenfällen oder sogenannten Instanzen oder Gegeninstanzen hinausliefen. Er hatte keine Ahnung von der Tragweite des mathematischen und construirenden

Denkens, verlachte die Copernicanische Weltanschauung als Ungereimtheit und hat nicht einen einzigen methodischen Beitrag geliefert, der für die höheren rationellen Theile des Naturwissens brauchbar wäre. Erinnern wir uns dessen, was Leonardo da Vinci über die Methode des Forschens in wenige Worte gedrängt hatte, und was im Zeitalter Galileis bereits durch grossartige Bethätigungen im mechanischen Wissen positiv vertreten war, so erscheint Bacons Neues Organon nicht blos als eine Bekundung der Rückständigkeit, sondern auch als ein von der richtigen Methode direct abführendes Ablenkungsmittel. In der That hat auch die ganze höhere Naturwissenschaft nur dadurch weiterkommen können, dass sie nie in Versuchung gerathen ist, von den Recepten des englischen Kanzlers Gebrauch zu machen.

Eine entgegengesetzte Art der Ablenkung von der natürlichen, dem strengen Wissen angehörigen Methode stellt Descartes vor, und zwar thut er dies besonders mit seiner anspruchsvollen Illusion, das Wirkliche aus blossen Begriffen und Definitionen ableiten zu wollen. Im Gegensatz hiezu ist die wahrhaft speculative Methode bei Galilei anzutreffen, der nicht blos im Hinblick auf die speciellen physikalischen Probleme, sondern, wenn man seine gesammte Denkart in Rechnung bringt, auch in einem weitern Sinne mit vollem Recht darauf hinweisen konnte, „er habe mehr Jahre auf die Philosophie als Monate auf die Mathematik gewendet“ [1]). Descartes dagegen, können wir sagen, hat alle Zeit, die er überhaupt zum dauernden Nutzen der Menschheit anwendete, der reinen Mathematik gewidmet, und die hierin bekundete überwiegend geometrische Denkweise hat ebenfalls dazu beigetragen, ihn in seinen, aus der scholastischen Theologie stammenden Vorurtheilen für die Zulänglichkeit blosser Begriffsentwicklungen zu bestärken. Phantastisch wie er war, verstieg er sich leichtfertig zu willkürlichen Constructionen, wie namentlich seine wirbelnde Naturphilosophie beweist, die er in seinen „Principien der Philosophie“ gleichsam durchdichtete. Die kosmischen Bewegungen werden hier in so willkürlicher Weise auf das Kreisen einer die Weltkörper umgebenden feinen Aethermaterie bezogen, dass sogar Huyghens, der doch selbst einen Theil seiner allgemeinen Bildung aus der Descartesschen Atmosphäre geschöpft hatte, am Schluss seines „Kosmotheoros“ in Bezug auf die planeta-

---

[1]) Brief vom 7. Mai 1610, in Bd. VI der angef. Ausg. der Werke, S. 99.

rischen Ausführungen zu schreiben vermochte: „Die Commentation bei Cartesius ist ganz und gar aus so leichtfertigen Gründen gewebt, dass es mich oft wundert, wie er auf die Vereinbarung solcher Erdichtungen soviel Mühe habe wenden können.“

49. Ausser den angedeuteten, uns hier am wenigsten angehenden Vorstellungsarten finden sich in Descartes' „Principien der Philosophie“ auch philosophische Formulirungen oberster Principien der mechanischen Bewegung. Obwohl nun das Richtige in diesen Formulirungen thatsächlich nichts Neues bot, so sind doch die metaphysischen Ausgangspunkte und formellen Gestaltungen bisweilen von Interesse. Zunächst ist es das bereits von Galilei formulirte Gesetz der Beharrung oder Trägheit, welches auch Cartesius an die Spitze stellt. Der letztere spaltet es jedoch wesentlich in zwei Ideen. Er stellt nämlich im zweiten Theil der erwähnten Schrift[1]) als erstes Naturgesetz dasjenige der Beharrung im gleichen Zustande hin und versteht diese Beharrung so allgemein, dass er als Beispiel das Viereckige wählen kann. Die Gestalt, der Zustand der Ruhe oder Bewegung erhielten sich, nämlich abgesehen von einer erst hinzukommenden Bewegung. Wir hätten keinen Grund, zu denken, wie die Bewegung von selbst aufhören sollte. Auch sei die Ruhe der Bewegung entgegengesetzt und nichts wende sich vermöge des Antriebs der eignen Natur zum Gegentheil oder zur Zerstörung seiner selbst. Erst hierauf[2]) wird als zweites Naturgesetz jenes dynamische Grundprincip Galileis hingestellt, dass jeder bewegte Körper seine Bewegung in grader Linie fortzusetzen strebt. Hiebei beruft sich Descartes gelegentlich auch auf die Erfahrung. Das dritte vermeinte Naturgesetz[3]) zeigt nun aber schon deutlich die Unzuverlässigkeit der Cartesischen Methode. Es soll nämlich darin bestehen, dass ein Körper gegen einen solchen, den er nicht bewegen kann, von seiner Bewegung nichts verliere, gegen einen schwächern aber die ertheilte Bewegungsmenge einbüsse. Zu ersterer Idee hatte die optische Reflexion Veranlassung gegeben. Nun lässt sich aber wohl schwerlich etwas Unmechanischeres denken, als die Annahme, dass die schwächere Kraft, die sich an einem Widerstande bricht, durch diesen Widerstand keine erhebliche Modification erfahre. Doch

---

[1]) Principia philosophiae 1643, pars II, Nr. 37.
[2]) Ibid. Nr. 39. [3]) Ibid. Nr. 40.

wir wollen uns hier nur an das Methodische in der Cartesischen Auffassung der mechanischen Principien halten und haben daher an dem besondern Inhalt irrthümlicher Ideen kein Interesse. Dieses Methodische besteht den gegebenen Anführungen zufolge in Rücksicht auf das Trägheitsgesetz darin, dass der Metaphysiker zunächst eine völlig unzulängliche Idee unterschiebt. Diese Idee enthält, wenn wir sie logisch deutlich gestalten, nichts weiter, als dass der Inhalt eines Begriffs, einschliesslich der in ihm bereits befassten Veränderungen, derselbe bleibt, wenn er nicht verändert wird, d. h. wenn nicht ein neues Element in ihn hinein oder zu ihm hinzu kommt. Es ist aber eine reine Illusion, dass dieser rein logische Satz der Identität, auch wenn er auf Bewegungsursachen angewendet wird, genüge, um das Gesetz der Beharrung von Richtung und Geschwindigkeit zu ergeben. Er ergiebt hiefür nicht mehr, als beispielsweise auch für die kreisförmige oder für die parabolische Bewegung; denn auch diese Bewegungen bleiben, was sie sind, solange, als sie nicht durch Elemente abgeändert werden, die nicht in ihnen selbst enthalten sind.

Die Richtung der Descartesschen Denkweise tritt im Gegensatz zu derjenigen Galileis recht deutlich in einem Briefe des erstern hervor, in welchem das Hauptwerk des grossen Italieners und mit ihm die neue Wissenschaft, die er in den Discorsi gründete, einer hochkomischen Beurtheilung unterworfen wird. In diesem an Mersenne gerichteten Brief heisst es[1]: „Er (Galilei) habe, ohne die ersten Ursachen der Natur zu betrachten (sans avoir considéré les premières causes de la nature), nur die Gründe einiger besondern Wirkungen (effets particuliers) gesucht und so ohne Fundament gebaut.“ Ferner[2]: „Alles was er von der Geschwindigkeit der Körper sagt, welche im leeren Raum fielen etc., ist ohne Fundament aufgebaut; denn er hätte zuvor bestimmen müssen, was die Schwere sei, und wenn er davon das Richtige wüsste, so würde er wissen, dass sie im leeren Raume gar nicht vorhanden ist (qu'elle est nulle dans le vide).“ Bald darauf[3]) folgt eine gegen das Fundament der ganzen modernen Dynamik gerichtete Stelle: „Er setzt voraus, dass die Geschwindigkeit der herabsteigenden Gewichte sich immer gleichmässig vermehre,

---

[1]) Descartes, Lettres, Bd. II Paris 1659, Brief 91, S. 391.
[2]) Ibid. S. 394. [3]) Ibid. S. 395.

was ich einstmals wie er geglaubt habe; aber ich glaube jetzt durch Beweis zu wissen, dass es nicht wahr ist. Auch nimmt er an, dass die Geschwindigkeitsgrade desselben Körpers auf verschiedenen Ebenen gleich seien, sobald die Erhebungen dieser Ebenen gleich sind, was er gar nicht beweist und was nicht streng wahr ist; und da alles Folgende nur von diesen zwei Voraussetzungen abhängt, so kann man sagen, dass es gänzlich in die Luft gebaut ist.“ Auch das Gesetz der Wurfbewegung wird von Cartesius in einer Weise angefochten, welche nicht einmal die Beharrung der horizontalen Bewegung mit gleicher Geschwindigkeit gelten lässt; denn der französische Denker sagt[1]: „Er fügt zu den vorigen eine andere falsche Annahme, nämlich dass die in die Luft geworfenen Körper sich in der Richtung des Horizontes gleich schnell bewegen, dass sich aber im Niedersteigen ihre Geschwindigkeit im doppelten Verhältniss des Raumes vermehre. Nun ist es unter dieser Voraussetzung sehr leicht, zu schliessen, dass die Bewegung der geworfenen Körper eine parabolische Linie beschreiben müsste; aber da seine Voraussetzungen falsch sind, so kann auch sein Schluss von der Wahrheit weit entfernt sein.“

Diese Stellen bedürfen im Hinblick auf unsere früheren Auseinandersetzungen über die Hauptbegriffe und Vorstellungsarten Galileis keiner Erläuterung. Sie bilden eine Selbstkennzeichnung der Cartesischen Methode und einen greifbaren Beweis der Thatsache, dass Descartes für die neugegründete Wissenschaft der Dynamik kein Verständniss hatte. In der That haben sich seine mechanischen Vorstellungen, diejenigen über den Schwingungsmittelpunkt nicht ausgenommen, wesentlich nur um Begriffe rein statischer Natur gruppirt, und obwohl er sein erstes Hauptwerk veröffentlichte und seine Schriftstellerlaufbahn begann, als Galilei die seinige in der Hauptsache abschloss und seine Hauptsätze schon im berühmten Dialog über die Weltsysteme längst publicirt hatte, verliess sich der französische Metaphysiker auf seine Begriffe, wie er dieselben nach Maassgabe der ersten oben angeführten Stelle verstand. Ihm erschien es als unthunlich, über die Schwere etwas auszumachen, bevor man deren Wesen nicht in einen Begriff gefasst hätte, aus welchem sich alles Uebrige, was wissenswerth sein möchte, entwickeln lassen müsste. Die

[1]) Ibid. S. 396.

Fallgesetze waren ihm nur in die Luft gebaute Besonderheiten, um die sich zu kümmern zunächst kaum der Mühe werth wäre. Wie wenig er für die Art, wie die eigentlichen Förderer der Mechanik ihre Kenntnisse darstellten und bewiesen, Sinn hatte und den berühmtesten Schriften keinen Geschmack abzugewinnen wusste, bezeugt eine Stelle [1]), in welcher über Stevin abgeurtheilt wird, und in welcher er erklärt, er habe nicht die Geduld, Bücher wie die von Stevin so zu lesen, dass er wissen könne, ob die Beweise darin exact seien.

Damit über das Descartessche Verhalten zu Galileis neuer Wissenschaft auch im Allgemeinen kein Zweifel bleibe, möge noch folgende Stelle eben desselben Briefs sprechen [2]), welcher noch in vielen andern Beziehungen, auf die wir hier nicht näher einzugehen vermögen, für das Verhältniss des französischen Metaphysikers zu den Fortschritten der Mechanik seiner Zeit von Bedeutung ist. Er schreibt: „Was zunächst Galilei anbetrifft, so will ich Ihnen (Mersenne) sagen, dass ich ihn niemals gesehen und auch keinen Verkehr mit ihm gehabt habe, und dass ich folglich von ihm nichts entlehnt haben kann und auch in seinen Büchern nichts sehe, was ich beneidete (que me fasse envie) und fast nichts, was ich als das meinige eingestehen möchte (que je voulusse avouer pour mien).“ Ausserdem meint er [3]), nach seinen eignen Principien sei die Erklärung von Allem, wovon Galilei handelt, sehr leicht. In der That reichten diese eignen Principien, wie wir gesehen haben, nicht einmal aus, die Errungenschaften der Galileischen Dynamik zu würdigen und den gröbsten Irrthümern zu entgehen. Descartes wollte Alles aus Begriffen und, wie seine Metaphysik mit ihrem Satze „ich denke also bin ich“ genugsam zeigt, sogar aus einem einzigen Grundbegriff ableiten. An sich wäre nun ein solches Deduciren nicht zu tadeln, wenn darunter nur die rationelle Bethätigung eines erst durch Induction in die Begriffe hineingelangten Inhalts verstanden werden sollte. Descartes übersah aber, woher die Begriffe von dem Verhalten der materiellen Wirklichkeit einzig und allein kommen können und wendete sich daher nicht an die letzte Quelle der Begriffe selbst, sondern hielt sich an vage Reflexe, die er noch obenein als angeborne Ideen ansah.

50. Ungeachtet der wesentlichen Beschränkung seiner Ideen

---

[1]) Ibid. S. 398. [2]) Ibid. S. 397. [3]) Ibid. S. 404.

auf die Statik hat Descartes dennoch dem allgemeinen Kraftbegriff eine neue Wendung zu geben versucht und ausserdem über die Erhaltung derselben Kraftsumme in der Natur eine Idee vertreten, die man, nächst Galileis Gedanken von der zum Wiederaufsteigen des gefallenen Pendels hinreichenden Geschwindigkeit, als einen Ausgangspunkt der spätern Vorstellungen von der Unzerstörlichkeit und dem unveränderlichen Vorrath der Kraft betrachten kann. Was zunächst jenen Kraftbegriff anbetrifft, welcher später der Anknüpfungspunkt der berühmten Streitigkeiten über die Kräftemessung wurde, so haben wir bereits Nr. 46 das Wesentliche angeführt. Jedoch mag hier noch die ganz allgemein gefasste Formulirung[1]) mit den eignen Worten des Urhebers Platz finden: „Es ist nicht mehr und nicht weniger Kraft nöthig, um einen schweren Körper auf eine bestimmte Höhe zu heben, als um einen andern weniger schweren auf eine um soviel grössere Höhe, als er weniger schwer ist, zu heben u. s. w.“ Dieses Princip hat sich niemals anfechten lassen, und wenn Descartes demselben überall gefolgt wäre, so hätte Leibniz nichts vorgefunden, was Stoff zu Einwendungen liefern konnte. Galilei hatte die Kraft in die Factoren des Gewichts und der Geschwindigkeit zerlegt, was auch in der That die rationellste Form der einfachen Auffassung repräsentirt. Um aber diesen Begriff in allen Fällen anwenden zu können, muss man von dem augenblicklichen Verhalten zu einer Summation der Momente übergehen, und die Cartesische Formel bietet für den Fall der in den verschiedenen Theilen der Bewegung ungleichen Geschwindigkeiten ein bereits in einfacher Form fertiges und nicht erst noch zu berechnendes Ergebniss. Sie hat ausserdem den Vortheil, den Begriff der Kraftgrösse an denjenigen der Action zu knüpfen. Dagegen verhüllt sie den auch ihr zu Grunde liegenden Begriff der Geschwindigkeit in der Vorstellung der Ueberwindung der Schwere, d. h. einer Kraft, die sich selbst nicht ohne die Angabe einer Geschwindigkeit definiren lässt. Auch dürfen wir nicht vergessen, dass Descartes selbst nur einen statischen Gebrauch von seinem Princip machte, ja es allein für diesen Zweck aufgestellt hatte. Es war ihm, wie wir Nr. 46 gesehen haben, nur ein Hülfsmittel, um das virtuelle Princip zur Anwendung zu bringen. In dieser Beziehung war es

---

[1]) Descartes, Lettres, Bd. I Paris 1663, Brief 73, S. 331. Ebenso auch an der Spitze des posthumen Schriftchens über Mechanik.

sogar, wie Lagrange zutreffend bemerkt, „weniger allgemein“ [1]) als dasjenige Galileis.

Descartes geht davon aus, dass die Menge der Action bei der Bestimmung der Kräfte maassgebend sei [2]). In den schon angeführten „Principien der Philosophie“ (Theil II, Art. 36) wird der Grundsatz aufgestellt, dass sich dieselbe Menge der Bewegung erhalte, welche ursprünglich bei der Schöpfung hervorgebracht worden sei. Abgesehen von dem falschen Hinblick auf eine ursprüngliche Erzeugung dieser Bewegung besagt der Satz nichts weiter als die Constanz der einmal vorhandenen Bewegungsgrösse. Der Begriff der Bewegungsgrösse schloss aber, wie wir Nr. 46 bemerkt haben, noch eine Unbestimmtheit ein. Nimmt man ihn, wie man Cartesius gegenüber muss, im Sinne der Menge der Action, d. h. im Hinblick auf die Erhebungen verschiedener Massen, so ist er den Einwendungen nicht ausgesetzt, welchen die Vorstellung der Erhaltung des Products von Masse und Geschwindigkeit anheimfällt. Jedoch wird dieser Punkt erst bei der Erörterung des Princips der Erhaltung der lebendigen Kräfte zu erledigen sein.

Die völlig verfehlten Sätze des Cartesius über den Stoss und die noch gänzlich unausgebildeten Ideen über den Schwingungsmittelpunkt haben zwar mit der metaphysischen Denkweise Einiges zu schaffen, werden aber erst in dem gehörigen Zusammenhang d. h. dann berührt werden können, wenn die betreffenden Probleme mit Erfolg in Angriff genommen werden. Dies ist bezüglich des Schwingungspunkts erst bei Huyghens der Fall, und auch die Gesetze des Stosses werden von ihm, wenn auch nicht ausschliesslich von ihm, festgestellt. Der dem Zeitalter von Huyghens und Newton gewidmete nächste Abschnitt unserer Darstellung ist daher der geeignete Ort, die früheren erfolglosen Versuche anzugeben, unter denen sich auch das befindet, was bereits Galilei über den Stoss erörterte, und worin er wenigstens die Trefflichkeit seiner Methode bewährte. Diese Methode hatte ihn vor groben Unrichtigkeiten und voreiligen Annahmen geschützt, während Descartes in seinen Aufstellungen über den Stoss der reinen Willkür und dem fast ausnahmslosen Irrthum anheim-

---

1) Méc. anal. Bd. I (1811), erste Abth. Sect. I, Art. 16.

2) Descartes, Lettres, Bd. II, Brief 92, S. 413.

fiel. Auch wird das Spätere für die Ergebnisse dieses Capitels nur neue Bestätigungen liefern, in keinem Falle aber die gewonnene Wahrheit, dass die metaphysische Philosophie den Fortschritten der Mechanik feindlich entgegentrat und selbst kein einziges unzweideutiges Gesetz producirte, jemals wieder zu beschränken haben.

Zweiter Abschnitt.

Die Zeiten von Huyghens und Newton.

Erstes Capitel.

Allgemeiner Entwicklungsgang.

51. Wie überall, so gilt auch in der Wissenschaft der Satz, dass der erste Schritt der schwierigste sei, und dass nach Ueberwindung der ersten Widerstände die fernere Entwicklung eines verhältnissmässig stetigen Fortgangs fähig sei. Eine ganz besondere Bedeutung erhält aber diese Wahrheit, sobald es sich ausschliesslich um die allgemeinen Principien handelt. Diese letztern sind im Falle der modernen Mechanik sofort bis zu einem Umfang festgestellt worden, der die ganze weitere Entwicklung als einen Vorgang erscheinen lässt, der sich in einem bereits gegebenen Rahmen vollzieht. Wenigstens wird dieses Verhältniss für Denjenigen ausser Zweifel treten, der von den Aeusserlichkeiten der mannichfaltig aussehenden Erscheinungen zu dem innern Zusammenhang der Anfänge mit den Consequenzen und der ersten Typen mit den Metamorphosen gehörig vordringt.

Um letztere Annäherungen und Verwandtschaftsfeststellungen möglich zu machen, haben wir die erste Epoche unseres Gegenstandes mit besonderer Ausführlichkeit abhandeln und namentlich auf die Grundgedanken Galileis ein besonderes Gewicht legen müssen. Diese Grundgedanken sind es, welche in der anscheinenden Mannichfaltigkeit der spätern principiellen Gestaltungen den Leitfaden abgeben und uns in den Stand setzen werden, die auf den ersten Blick wenig motivirt aussehenden Wendungen auf ihren Ausgangspunkt und Grund zurückzuführen.

Unter den einfachsten Grundsätzen, auf denen Statik und Dynamik ruhen, befand sich einer, welcher in seinen Anwendungen

am wenigsten entwickelt geblieben war und daher in der ersten Epoche ein noch sehr unvollkommenes Princip repräsentirte. Es war dies die Regel der Kräftezusammensetzung, die noch immer stark an der Zusammensetzung blos phoronomischer Bewegungen haftete. In der neuen Periode wurde nun dieses Princip gleichzeitig von Varignon und von Newton in seinem specifisch mechanischen Sinne aufgefasst und zur Anwendung gebracht, so dass man von diesem Zeitpunkt, also etwa von dem Jahre 1687 an, in welchem die betreffenden Schriften erschienen, das Parallelogramm der Kräfte als eine nach allen wesentlichen Seiten erkannte Wahrheit ansehen darf.

Im Uebrigen waren die Fundamentalprincipien ihrem Inhalt nach in der ersten Periode hinlänglich formulirt, und mit ihnen selbst geht auch rücksichtlich ihres logischen Charakters keine durchgreifende Veränderung vor. Der Hebel, die schiefe Ebene, sowie die dynamischen Fundamentalthatsachen spielen noch häufig die Rolle isolirter Ausgangspunkte der Beweise. Das virtuelle Princip tritt zunächst sogar etwas in den Hintergrund und entwickelt seine Tragweite erst unter der Herrschaft der neuen infinitesimalen Methoden. Dagegen vollziehen sich die Erweiterungen der alten Einsichten und auch die principiellen Formulirungen hauptsächlich in zwei Richtungen.

Für die eine derselben ist Galileis Lehre von der Bewegung auf der schiefen Ebene der maassgebende Typus; für die andere ist es seine Behandlung der parabolischen Wurflinie. Für jene ist Huyghens, für diese Newton der Hauptrepräsentant. Es bildet nämlich der erstere vornehmlich diejenigen Einsichten aus, in denen sich die dynamische Bewegung durch feste Hindernisse statisch beschränkt findet, und wofür ein pendulirender Körper das am meisten charakteristische Beispiel ist. Im Gegensatz hiezu liegt Newtons Leistung vorzugsweise auf Seiten der freien, nicht durch feste Hindernisse sondern nur durch die aus der Entfernung wirkenden Kräfte bestimmten Bewegungen. Diese Mechanik der so zu sagen freien Körper, entsprungen aus der Zergliederung der kosmischen Thatsachen, führte zu jener Lehre von den krummlinigen Bewegungen, die man als Ausbildung und Fortsetzung der Galileischen Ableitung der Wurfparabel betrachten muss. Der grosse Gegenstand und die universelle Natur des Gravitationsprincips haben diese Seite der Mechanik in Dimensionen erscheinen lassen, die sich erheblich zusammenziehen, sobald man nur nach

dem Gehalt an mechanischen Principien fragt und von dem Object absieht, auf welches diese Principien angewendet werden mögen.

Obwohl in der Epoche, die wir jetzt behandeln wollen, die analytischen Methoden und die Infinitesimalrechnung noch keine äusserlich hervortretende Rolle spielen, so kann man doch den Umstand, dass Newton schon sehr früh die Fluxionenmethode, also im Wesentlichen die Differentialrechnung besass, rücksichtlich seiner mechanischen Speculationen nicht für gleichgültig halten. Huyghens und Newton, die, abgesehen von den metaphysischen Wendungen und philosophischen Einflüssen, das principiell Erhebliche dieser Periode ziemlich vollständig vertraten, haben allerdings die synthetische d. h. geometrische Darstellungsform thatsächlich als zureichend erwiesen, um die alten und die neuen Wahrheiten der Mechanik auszudrücken. Aber bei Newton sind nicht blos die offen hingestellten, sondern auch die vorbereitenden, in der geometrischen Darstellung nicht sofort sichtbaren Hülfeleistungen der Fluxionenrechnung zu veranschlagen, wie denn überhaupt auch sonst einfache analytische Mittel immer mehr dazu führten, auch die Principien der Mechanik auf ihre mathematisch abstracteste und zugleich umfassendste Form zu bringen.

52. Entsprechend dem modernen Charakter der Mechanik geschieht die weitere Ausbildung derselben zunächst immer durch die Erweiterung des dynamischen Wissens, so dass die Fortführung und Ergänzung der statischen Einsichten erst an zweiter Stelle in Frage kommt und oft nur als Hülfsmittel für die dynamischen Probleme zur Behandlung gelangt. Die leitende Vorstellung ist daher in allen weitern Untersuchungen die allgemeine Form der dynamischen Bethätigung einer Kraft. Galilei hatte nun diese Form in den Gesetzen des freien Falles zum Ausdruck gebracht, und es bedurfte mithin nur einer sehr leichten Abstraction von den zufälligen Bedingungen der ersten Anwendung, um das Schema der Wirksamkeit und Entwicklungsart einer stetigen Kraftäusserung auf die verschiedensten Aufgaben anwenden zu können. Auf dieser Grundlage ruhten zunächst die von Huyghens formulirten Regeln der Centralbewegung und Schwungkraft. Selbstverständlich war derselbe Gesichtspunkt bei der Behandlung des Pendelproblems in seiner ganzen Allgemeinheit, d. h. bei der Frage nach dem Schwingungsmittelpunkt unentbehrlich. Ja man kann behaupten, dass die Uebertragung der für eine freie dynamische Kraftwirkung gewonnenen mathematischen Ausdrucksform auf den Fall eines

beliebigen, durch eine feste Axe an völlig freier Bewegung gehinderten Körpers die entscheidende Wendung und zugleich das völlig zureichende Mittel für die wichtigsten Fortschritte gewesen sei, welche die Mechanik in dieser Periode machte.

Bei Newton findet sich keine genau entsprechende Thatsache. Die Art, wie der Entdecker der allgemeinen Gravitation die Consequenzen der dynamischen Principien für das neu erschlossene Anwendungsgebiet zog, bot keineswegs dieselben Schwierigkeiten dar, welche Huyghens bei der Auffindung des Oscillationscentrums zu überwinden gehabt hatte. Für die kosmischen Aufgaben handelte es sich um die elliptische Bewegung oder in allgemeinerer mechanischer Auffassung um die Bewegung in Kegelschnitten und um das Verhältniss der Kräfte, welche im Brennpunkt, und der Beharrungsgeschwindigkeiten, welche als den bewegten Körper ursprünglich afficirend vorausgesetzt werden. Galileis Behandlung der parabolischen Bewegung konnte in beiden Beziehungen das Vorbild werden. Sie vereinigte nämlich die ursprünglich gegebene, beharrende Bewegung mit der Wirkung einer Kraft, die zwar als in parallelen Richtungen wirksam genommen wurde, aber für die mathematische Denkweise vermöge einer sehr leichten Wendung auch als Repräsentant einer von einem Centrum ausgehenden Kraft aufgefasst werden konnte, was sie übrigens ja auch physisch wirklich war. Fügt man noch die Huyghenssche Theorie der Kreisbewegung und Schwungkraft hinzu, so sieht man, dass der Uebergang zu einer allgemeinen Lehre der Bewegung in Kegelschnitten, ja überhaupt zu einer Theorie der Kräfteverhältnisse in solchen Bewegungsarten, dynamisch und statisch hinreichend vorbereitet war. Bedenkt man ferner, dass die Erfahrung selbst, in der Gestalt der Keplerschen Gesetze, auf eine mechanische Zergliederung der elliptischen Bewegung hindrängte, und dass sie es thatsächlich gewesen ist, aus welcher die quadratische Abnahme des Gravitirens der Himmelskörper geschlossen wurde, so erscheint die Gestalt, welche die Mechanik durch Newtons Thätigkeit annahm, als eine sehr motivirte und naheliegende. Wollte man also überhaupt irgend einer Verwunderung Raum geben, so könnte es nur darüber sein, dass nicht schon Huyghens die von Newton gezogenen Consequenzen vorweggenommen hat. Indessen ist jener grosse mathematische Denker noch durch einen Rest seiner ursprünglich Cartesianischen Bildungsatmosphäre, also durch einen ungünstigen Einfluss der Philosophie an der erforderlichen

Unbefangenheit der Betrachtungsart behindert worden. Ohne diesen Umstand würde Huyghens bei seinem sonstigen Anschluss an die Methode Galileis sicherlich nicht bei solchen Anwendungen der Mechanik stehen geblieben sein, die sich fast ausschliesslich um das Pendel und die Pendeluhr gruppirten und nur gelegentlich auf äusserliche Veranlassungen hin, wie z. B. im Fall der Stossgesetze, auch andere Probleme ins Auge fassten.

Aehnliche ungünstige Einflüsse der Metaphysik haben noch geraume Zeit nach der Aufstellung des Newtonschen Gravitationssystems dessen Anerkennung in Frankreich und Deutschland bei den Mathematikern gehindert und sogar wie im Falle des kosmischen Naturphilosophirens von Leibniz entschiedene Rückläufigkeiten verursacht. Hiebei ist es interessant, zu sehen, wie die Handhabung und nächste Ausbildung der Fluxionenrechnung in der Gestalt der symbolisch bequemeren Differentialrechnung, also ein Fortschritt in der reinen Mathematik, der grade auf dem Festlande seit der Theilnahme der ersten Bernoullis gleichsam familienartig befördert wurde, die falschen Ueberlieferungen einer ungehörigen Naturphilosophie nicht aufzuwiegen vermochte, so dass sich hier gleich die später geschichtlich immer wieder bestätigte Wahrheit ankündigte, dass blosse Mathematik völlig unzulänglich ist, um vor physikalischen Irrthümern zu schützen, geschweige um positiv auf den Weg thatsächlicher Aufschlüsse über die Naturverfassung zu führen.

Zweites Capitel.

Gestaltung der Principien bei Huyghens.

53. Der wichtigste neue Grundsatz, der durch Huyghens in die Dynamik eingeführt wurde, ist die Voraussetzung, dass der gemeinsame Schwerpunkt einer Gruppe von Körpern, die unter dem Einfluss der Schwere um eine horizontale Axe oscillirt, bis zu seiner ursprünglichen Höhe, aber niemals weiter steige. Dieser axiomatisch angenommene Satz ist der Kern jener Idee, welche später auf Veranlassung der Leibnizschen Metaphysik den Namen des Princips der Erhaltung der lebendigen Kräfte erhielt. Lagrange geht mit Recht so weit, das letztere Princip unmittelbar Huyghens als dem eigentlichen Urheber zuzuschreiben, ohne irgend daran

Anstoss zu nehmen, dass die Namengebung und der Anschein einer neuen Hervorhebung als durchgreifendes Gesetz von späterem Datum sind[1]). In der That ergab sich schon bei Huyghens alles materiell Wesentliche in der specifisch dynamischen Vorstellung der Erhaltung der Kräfte. Descartes hatte die Grösse der Bewegung als den eigentlichen Gegenstand der Erhaltung angesehen, und der Begriff der Grösse der Bewegung hatte sich technisch dahin fixirt, dass man nicht an die Erhebungsräume sondern an die Geschwindigkeiten und deren Product mit der Masse dachte. In dieser Beziehung erforderte also die Cartesische noch vage Idee eine nicht blos statische sondern auch dynamische Zurechtlegung, und eine solche lag offenbar in dem Gebrauch, welchen Huyghens von der vorher erwähnten Voraussetzung im Sinne Galileis machte. Indem er nämlich jenes Princip vom Steigen des Schwerpunkts sowohl auf die einzelnen Körper als auf deren Gesammtheit zur Anwendung brachte, gewann er eine Relation, in welcher der Satz von der Erhaltung der lebendigen Kräfte in hinreichender Allgemeinheit enthalten ist. Ehe wir jedoch auf diesen Cardinalpunkt mit der gebührenden Ausführlichkeit eingehen, müssen wir erst die zwar weniger bedeutsamen, aber einfacheren und im Entwicklungsgange voranzustellenden Fortschritte betrachten und hiebei die Leistungen ihres Urhebers für die Mechanik im Allgemeinen kennzeichnen.

Christian Huyghens (1629—1695), ein Niederländer, der aber den ersten Theil seiner Laufbahn in Paris zurücklegte, concentrirte seine bedeutendsten mechanischen Theorien in seinem 1673 herausgegebenen Hauptwerk, dem Horologium oscillatorium. Diese Benennung sowie der Zusatz: „Geometrische Demonstrationen über die auf die Uhren berechnete Pendelbewegung“ zeigt bereits den Punkt an, um welchen sich praktisch die Bestrebungen des grossen Geometers drehten. Seine allbekannte Benutzung des Pendels zur Regulirung der Uhren und seine eleganten, aber rein mathematischen Theorien gehen uns hier freilich nicht unmittelbar an; aber die Hinweisung auf dieselben erklärt die doppelte Virtuosität, mit welcher er sowohl das, was an die mechanische Praxis, als das, was an die subtilste geometrische Synthese angelehnt werden musste, in der vollendetsten Weise ausführte. Die formelle Schönheit und innere Klarheit seiner geometrischen Deductionen sind

---

[1]) Lagrange, Méc. anal. Bd. I 1811, zweite Abth. Sect. I, Art. 6.

später schwerlich übertroffen worden. Es ist also nicht blos die materielle Bedeutung der Evolutentheorie, sondern es ist überhaupt die ganze Art und Weise, in welcher er die Geometrie der Mechanik dienstbar machte, was sein Hauptwerk als das letzte grossartige und vollendete Denkmal des ausschliesslichen, ungemischten und noch nicht von analytischen Ausgangspunkten geleiteten Gebrauchs der alten Geometrie kennzeichnet. Durch die Reinheit dieser Eigenschaften und durch das Gleichartige seiner ungezwungenen Methode unterschied es sich von jener grossen, ebenfalls in der Darstellungsform geometrisch gestalteten Arbeit, in welcher Newton seine Mechanik und sein Gravitationssystem niederlegte.

Den für unsern Zweck wichtigsten Theil des Huyghensschen Hauptwerks bildet die Lehre vom Oscillations- oder Agitationscentrum. An weniger weitgreifenden, aber für den Entwicklungsgang zunächst unerlässlichen Theorien kommt auch die Lehre vom einfachen Pendel sowie die tautochronische Fallbewegung in der umgekehrten Cykloide und ausserdem besonders die Theorie der Centrifugalkraft in Frage. Die erste richtige Feststellung des Stosses ist dagegen Huyghens mit Wren und Wallis gemeinsam und liegt daher ungeachtet ihrer grossen Wichtigkeit ausser dem Kreise derjenigen Arbeiten und Leistungen, welche die erwähnte verwandte Gruppe bilden.

54. Am Schlusse des erwähnten Hauptwerks über die Pendeluhr ist zum ersten Mal eine Reihe von Sätzen aufgestellt worden, welche die Theorie der Centrifugalkraft enthalten[1]). Die Beweise wurden jedoch von Huyghens ausdrücklich auf spätere Veröffentlichungen hinausgeschoben und erschienen erst unter seinen nachgelassenen Schriften in den Opuscula posthuma (1703) unter dem entsprechenden Titel. Die einzige Schwierigkeit, mit denen die Auffindung und Nachweisung dieser Sätze verknüpft gewesen sein mochte, konnte nur darin bestanden haben, die rein statische Spannung durch eine eventuelle Bewegung zu messen.

Das Problem der Bestimmung der Centrifugalkraft ist nach den principiellen Anfängen mit der schiefen Ebene zunächst das einfachste, bei welchem sich eine fest vorgeschriebene Bahn mit der Wirkung einer dem Körper einfürallemal mitgetheilten und gleichförmig beharrenden Geschwindigkeit combinirt. Die Untersuchung der Bewegung des Endpunkts eines einfachen Pendels

[1]) Horol. oscill., pars V de vi centrifuga etc.

ist, sobald man alle Fragen beantworten will, schon bei Weitem nicht so einfach; denn auf das Pendel wirkt kein blosser Stoss, sondern eine stetige und mithin beschleunigende Kraft. Die vorgeschriebene Bahn ist aber in beiden Fällen gleich. Die Verbindung einer gegebenen gradlinigen Geschwindigkeit mit dem Gesetz, dass der von ihr afficirte Körper auf einem Kreisumfang bleiben müsse, — das sind die beiden wesentlichen Bedingungen, die zur Bestimmung der Centrifugalkraft vorausgesetzt werden. Die Art, wie der Körper an die Einhaltung der gleichen Entfernung von einem Centrum gebunden werde, ist unerheblich, und die Angabe derselben dient nur zur Veranschaulichung des Vorgangs und zur physischen Erläuterung seiner Möglichkeit. Wenn wir uns also einen materiellen, undehnbaren Radius oder einen Faden als Befestigungsmittel des Körpers denken, so ist die Schwungkraft nichts Anderes als der Zug an diesem Faden. Diese Spannung ist aber etwas rein Statisches, da der Körper stets in dem blossen Bestreben verbleibt, sich zu entfernen, in Wirklichkeit aber nie dazu gelangt, auch nur im Mindesten seinen Abstand von dem Mittelpunkt zu ändern. Die Aufgabe läuft also darauf hinaus, anzugeben, wie sich die Bewegung, die vermöge des Stosses oder der einfachen Beharrungsgeschwindigkeit gradlinig sein sollte, in eine kreisförmige verwandelt, und namentlich wie hiebei eine bestimmte Grösse der statischen Spannung entstehe.

Nun ist es interessant, zu sehen, wie dieser letztere hauptsächlichste Theil der Aufgabe durch ein Mittel gelöst wird, dessen Charakter auf einem noch allgemeineren Gedanken beruht, als derjenige ist, welchen das virtuelle Princip ausdrückt. Die statischen Verhältnisse können einerseits unmittelbar, andererseits aber mittelbar durch eventuelle Bewegungen, die zu ihnen in einer vorstellbaren Beziehung stehen, untersucht werden. Ersteres ist nur sehr selten ausführbar, während Letzteres die allgemeine und in der geschichtlichen Entwicklung immer deutlicher zum Bewusstsein gelangende Regel bildet. Können wir nun auch bei Huyghens selbst nicht voraussetzen, dass er derartige Ueberlegungen in völliger Allgemeinheit angestellt habe, so hat ihn doch die Nothwendigkeit der Sache genöthigt, thatsächlich[1]) den angegebenen Weg einzuschlagen.

Um diesen Weg, der später in den vielfältigsten Gestaltungen wiedererscheint, einfürallemal und vollständig zu begreifen, muss

[1]) Vgl. Opuscula posthuma, 1703, S. 401—408.



man vor allen Dingen darauf verzichten, das blos Mögliche und Eventuelle, also das, was geschehen würde, mit dem zu confundiren, was thatsächlich geschieht. Auch der Begriff des unbegrenzt Kleinen darf nicht dazu gemissbraucht werden, den Sprung über die Kluft zwischen dem blos Hypothetischen und dem kategorisch Thatsächlichen überbrücken oder vielmehr maskiren zu wollen. Dies vorausgeschickt, lässt sich der Ausweg von Huyghens auf folgende Weise kennzeichnen.

Die Tangente in dem Punkt, an welchem sich der Körper in irgend einem Augenblick d. h. für einen strengen mathematischen Zeitpunkt befindet, repräsentirt die Bewegungsrichtung, wie dies z. B. auch von Roberval als Axiom angenommen wurde. Diese Richtung verwirklicht sich in keiner Bewegungslinie, sondern würde sich nur dann bethätigen können, wenn die Festhaltung gegen den Mittelpunkt hin plötzlich aufhörte. Alsdann würde der bewegte Gegenstand auf der Tangente fortgehen und sich hiemit von der Kreisbahn entfernen. Thatsächlich ist aber nur das Bestreben hiezu vorhanden, weil die Festhaltung auf der bestimmten Entfernung vom Mittelpunkt in der That nicht aufhört. Jenes Bestreben hat die Gestalt einer statischen Spannung und ist dem Zuge ähnlich, den die Schwere auf einen an einem Faden hängenden Körper ausübt. Diese rein statische Zurückhaltung kann nun durch die Grösse derjenigen Entfernungen gemessen werden, an denen sie den Körper verhindert. Wäre die statische Kraft nicht wirksam, so würde der Ausfall dieser Ursache die Erscheinung zur Folge haben, dass der Körper in den aufeinanderfolgenden Punkten der Tangentenbahn immer weiter vom Mittelpunkt abstehende Positionen einnähme. Die Entstehung dieser Abstandsdifferenzen ist also diejenige Erscheinung, welche durch den nach dem Mittelpunkt wirkenden Zug gleichsam unterdrückt wird. Nun können wir eine Kraft nicht nur durch die Wirkungen messen, die von ihr als thatsächliche Phänomene und Ortsveränderungen hervorgebracht werden, sondern auch durch diejenigen Bethätigungen, vermöge deren sie andere eventuelle Effecte, die ohne sie eintreten würden, unmöglich macht. In dieser negativen Rolle wirkt sie ebensogut als Kraft, wie in ihrer positiven Entwicklung. Auch ist dies die Cardinalunterscheidung, welche gemacht werden muss, wenn man Ruhe und Bewegung als Ergebnisse der Kräftewirkung aus einem und demselben Gesichtspunkt behandeln will.

Die nach der Richtung des Radius vorhandene Spannung, gleichviel ob als Zug oder Gegenzug gedacht, wird mithin sowohl in dem einen als in dem andern Sinn durch eine Kraft gemessen werden, deren Wirkung die Entstehung der erwähnten Abstandsdifferenzen sein würde. Jene Reihe von Abständen, welche sich erzeugen würde, ist daher nicht selbst, sondern nur in der sie hervorbringenden Ursache das Maass der Centrifugalkraft. Diese Ursache ist als eine für den strengen Punkt geltende Kraftgrösse zu ermitteln, nicht aber mit den sich ergebenden Abständen zu verwechseln. Es handelt sich also um die mathematische Bestimmung einer scharfen Grenze, zu welcher sich die entstehenden Abstände als approximative und zwar unbegrenzt approximative Ausdrücke der gesuchten Grössenbeziehung verhalten.

Alles Weitere ist nun eine blos mathematische Angelegenheit. Die aufeinanderfolgenden, aber unendlich d. h. unbeschränkt nahe denkbaren Punkte der Tangente entfernen sich von den correspondirenden Punkten des Kreistheilchens, welche auf demselben Radius liegen und auch mit unbeschränkter Approximation als Ausgangspunkte rechtwinkliger Projectionen gelten können, bekanntlich in quadratischem Verhältniss und in absoluter Hinsicht nach Maassgabe der Kürze des Radius d. h. der Grösse der Krümmung. Schon ersteres Verhältniss ergiebt, dass die Centrifugalkraft der Geschwindigkeit quadratisch proportional ist. Die zweite Rücksicht liefert den Satz, dass sie ausserdem im umgekehrten Verhältniss des Radius steht. Wir haben diese rein mathematischen Ueberlegungen nicht im Einzelnen durchzugehen. Jedoch sei bemerkt, dass Huyghens auf dem Bogentheilchen gleiche oder vielmehr um gleiche Elemente wachsende Abschnitte von dem Berührungspunkt aus absteckt und nun zeigt, wie diesen Repräsentanten der gleichförmigen Bewegung und der beharrenden Geschwindigkeit auf dem Kreise die (ähnlich den Fallräumen) quadratisch wachsenden Abstände entsprechen. Diese Abstände wachsen daher wie die Quadrate der Geschwindigkeiten.

In dem Vorangehenden war unser hauptsächlichstes Augenmerk darauf gerichtet, eine jetzt sehr elementare Theorie im Lichte ihrer principiellen Schwierigkeiten erscheinen zu lassen und sie von derjenigen Seite zu betrachten, auf welcher für die ursprüngliche Behandlung die meisten Bedenken liegen mussten. Doch mag schliesslich die Huyghenssche Formulirung, die sich an

der oben angezeigten Stelle seines Hauptwerks für den wichtigsten Satz der Centrifugaltheorie als drittes Theorem vorfindet, hier noch wörtlich angeführt werden: „Wenn zwei gleiche Körper in gleichen Kreisumfängen sich mit ungleicher Geschwindigkeit bewegen, aber in beiden mit gleichförmiger Bewegung, wie wir sie hier überall voraussetzen, so wird die Centrifugalkraft des schnelleren zu der des langsameren im quadratischen Verhältniss der Geschwindigkeiten stehen.“ Wir haben bei unserer Auseinandersetzung der Kürze wegen nicht zweierlei Geschwindigkeiten gegenübergestellt, sondern von vornherein gezeigt, wie unter Voraussetzung jedweder Geschwindigkeit die Abstände der Tangente im Quadrat dieser Geschwindigkeit wachsen.

Abgesehen von dem entscheidenden Mittel, das statische Verhältniss als Verhinderung einer eventuellen Bewegung anzusehen und so messbar zu machen, ruht die ganze Theorie der Centrifugalkraft auf rein mathematischen, ja wesentlich nur geometrischen Beziehungen, und auch die übrigens sehr nebensächliche und leichte Berücksichtigung der Verschiedenheit der bewegten Massen ändert hieran nichts. Dieser Sachverhalt erscheint als sehr natürlich, sobald man bedenkt, dass es die vorgeschriebene Kreisbahn ist, welche die Form der Kraft gleichsam erst erzeugt, da ohne sie nur eine beharrende Geschwindigkeit und nichts weiter vorhanden sein würde. Die Bahn ist es, welche, indem sie die Grösse der Geschwindigkeit bestehen lässt, nur die Richtung derselben ändert und so als Gegenzug ihrer Einwirkung das centrifugale Bestreben entstehen lässt.

55. Auch zu den Aufstellungen über die Centrifugalkraft ist Huyghens im Verlauf seiner Untersuchungen über das Pendel und pendulirende Bewegungen der Körper veranlasst worden. Er hat zunächst den einfachsten Fall gewählt; aber es war nur noch ein geringer Schritt nöthig, um einzusehen, dass die Voraussetzung einer gleichförmigen Bewegung und des Kreises in der That viel weiter reichte, sobald man sie nur als in unbegrenzter Annäherung vorhanden forderte. Jedes Curventheilchen kann alsdann als Bogentheilchen des ihm entsprechenden Krümmungskreises betrachtet werden, und jegliche Veränderung, die mit einer in einem mathematischen Punkt vorhandenen Geschwindigkeitsgrösse vorgeht, vollzieht sich stetig, so dass man die Hinzufügungen zu dieser Grösse im Verhältniss zur letztern beliebig klein machen kann, wenn man nur das Zeittheilchen und mit

ihm das Bogenelement unbegrenzt verringert. Hieraus folgt, dass jede Bewegung in einem unendlich kleinen Curventheilchen als gleichförmig gelten kann, weil sie dies mit unbeschränkter Approximation wirklich ist. Hiemit lässt sich nun aber auch das Ergebniss für die Centrifugalkraft sofort auf krummlinige Bewegungen überhaupt und ebenso auf die Fälle anwenden, in denen statt einer einfachen und sich gleichbleibenden Geschwindigkeit noch eine eigentliche d. h. beschleunigende Kraft, welche die Geschwindigkeiten ändert, in Anschlag gebracht werden muss. Das so erweiterte Resultat ist jedoch für den allgemeinen Fall nicht etwa minder streng, als für den speciellen des Kreises und der gleichförmigen Bewegung. Da es nämlich für den mathematischen Punkt als solchen gilt, so sind die unbegrenzten Approximationen, deren man sich bedienen muss, eben nur Mittel, um zur scharfen Grenze zu gelangen. Der Krümmungskreis repräsentirt die Richtungsveränderung in einem Punkt ebenso streng, wie die Tangente die Richtung selbst vertritt, und die gleichförmige Geschwindigkeit, welche man als für ein Bogenelement fortdauernd voraussetzt, ist ein mechanischer Begriff, welcher der geometrischen Vorstellung einer Tangente ganz analog ist. In jedem mathematischen Punkt einer noch so veränderlichen Bewegung existirt immer eine genau bestimmbare, mit keinem Approximationselement behaftete Geschwindigkeitsgrösse. Diese letztere tritt freilich in keiner Bewegungserscheinung rein hervor; aber etwas Aehnliches hat auch in Rücksicht auf die Tangente statt, welche eine Richtung repräsentirt, die in keinem, wenn auch noch so kleinen Theilchen der Curve zur Verwirklichung gelangt und von der unendlichen Vielheit von Richtungen unterschieden werden muss, die in jedem gekrümmten Theilchen nach Willkür unterschieden werden können. Hienach lässt sich für einen Punkt jedweder krummlinigen Bewegung, für den Krümmung und Geschwindigkeit gegeben sind, die Centrifugalkraft genau nach der Huyghensschen Ableitungsart und mit genau demselben Ergebniss bestimmen. Nur müsste natürlich der Begriff der Schwungkraft selbst dahin erweitert werden, dass bei ihm nicht an einen bleibenden, sondern nur an einen für den grade fraglichen Zeitpunkt vorhandenen Zug nach einem Centrum gedacht zu werden braucht, was übrigens ganz selbstverständlich ist und einer weitern Erläuterung nicht bedarf. Dem Urheber der Evolutentheorie lag überdies die Wendung sehr nahe, das

feste Centrum, welches durch einen Faden den Zug ausübt, mit einer Evolute zu vertauschen, die bei ihrer Abwicklung eine Unendlichkeit solcher Centren repräsentirt, deren jedes für einen dauerlosen Moment gültig ist.

56. In der Pendeltheorie, für die sich bei Galilei nur die ersten, wenn auch entscheidenden Anfänge finden, hat Huyghens unter mehreren wichtigen Schritten, durch welche diese Lehre im Wesentlichen vollendet wurde, auch denjenigen gethan, welcher die Mechanik im Allgemeinen in einem Maasse förderte, wie es in der nächsten Epoche nicht noch einmal wieder geschehen konnte. Seine Leistungen bezüglich des Pendels zerfallen, abgesehen von der praktischen Anwendung auf die Uhren, in zwei Classen, von denen die eine, welche das einfache Pendel betrifft, zwar für die weitere Ausbildung der Mechanik, aber nicht unmittelbar für deren allgemeine Principien von Bedeutung ist. Das mathematische oder, wie es Huyghens technisch nannte, das einfache Pendel war dasjenige, welches auch Galilei vor Augen hatte, und für welches man seit den Bemühungen des Begründers der Dynamik den Satz von dem Verhältniss der Längen und dem entsprechenden Verhältniss der Schwingungszahlen oder Schwingungszeiten kannte. Einfach ist ein wirkliches Pendel insofern, als die Masse des Aufhängungsfadens im Verhältniss zu der an seinem freien Ende angebrachten als (verhältnissmässig) unbeträchtlich und mithin unerheblich für die entscheidenden Folgerungen nicht in Anschlag kommt, und als auch der am freien Endpunkt angebrachte Körper in seinen geringfügigen Dimensionen keine Veranlassung giebt, ihn anders als wie einen schweren Punkt zu behandeln. Für die Phoronomie, ja, wenn man will, auch für eine Art ganz abstracter und reiner Mechanik verwandelt sich jener approximative Begriff der experimentirenden Physik sofort in die völlig bestimmte Vorstellung eines von der Schwerkraft afficirten mathematischen Punkts, der vermittelst eines ohne Schwere gedachten Fadens oder, wie man auch sagt, einer unausdehnbaren, masselosen Linie an einem festen Punkt aufgehängt ist. Noch mathematischer drückt man sich aus, wenn man den Faden oder die Linie ganz ausser dem Spiel lässt und nur angiebt, dass sich der unter dem Einfluss der beschleunigenden Bewegungsursache von bekannter Grösse stehende Punkt stets in einem gegebenen Abstande von dem gegebenen festen Punkt befinden müsse. Eine andere Wendung, die aber schon

eine blosse Folgerung, nämlich das Verbleiben in derselben Ebene einschliesst, ist die, dass man den schweren Punkt als mit der Nothwendigkeit behaftet ansieht, auf einem in einer verticalen Ebene liegenden Kreise zu bleiben. Diese verschiedenartigen Vorstellungen liegen auch den Entwicklungen von Huyghens zu Grunde; jedoch sei bemerkt, dass derjenige moderne Begriff von einem materiellen Punkt, nach welchem derselbe ein Massentheilchen von unendlich kleinen Dimensionen vorstellt, natürlich noch nicht technisch ausgebildet war.

Um ein Zeitmaass zu haben, musste man die Länge des Secundenpendels d. h. im Allgemeinen das Verhältniss der Dauer einer Schwingung zu der zugehörigen Pendellänge kennen. Huyghens vermehrte nun die Theorie des einfachen Pendels um einen Satz, welcher jenem Verhältniss für kleine Schwingungen einen Ausdruck gab. Da indessen bei der Ermittlung dieses Ausdrucks kein neues Princip ins Spiel kam, so können wir uns hier auf die Angabe der Art und Weise beschränken, wie die alten Principien benutzt wurden. Das Cykloidenpendel war in Rücksicht auf das fragliche Verhältniss leichter zu behandeln, als das einfachere Kreispendel. Die unendlich kleinen Schwingungen des letztern konnten nach demselben Grundsatz als cykloidal gelten, nach welchem man ein Curvenelement mit dem zugehörigen Bogentheilchen des Krümmungskreises vertauschen darf.

Zu der Theorie der Bewegung auf der umgekehrten, d. h. mit ihrem nach unten gekehrten Scheitel eine Horizontalebene vertical berührenden Cykloide, gelangt Huyghens, indem er von der durch Galilėi festgestellten Bewegung auf der schiefen Ebene ausgeht. Ueberhaupt zeigt er, wie man die Bewegung auf krummen Linien als eine solche behandeln könne, die auf einer unbegrenzten Anzahl von graden Linien d. h. schiefen Ebenen stattfinde [1]). Mit leichter Mühe gewinnt er in voller Allgemeinheit hiedurch namentlich den Satz, dass das Fallen von gleichen Höhen bis zu einem gleichen Niveau stets die nämlichen Endgeschwindigkeiten erzeuge, wie auch immer die Bahnen beschaffen gewesen sein mögen. Denkt man sich nämlich eine geeignete, begrenzte oder im Fall krummer Oberflächen unbegrenzte Anzahl von Horizontalebenen, so gilt der Satz von der Erlangung gleicher Geschwindigkeiten offenbar zwischen je zwei aufeinanderfolgenden dieser

[1]) Horol. oscill. pars II, prop. 8.

Niveauebenen, und der Körper behält, indem er von der einen zur andern übergeht, die bereits erlangte Geschwindigkeit als Bestandtheil seiner ferneren Bewegung bei. Hiemit ist klar, dass auf jedem beliebigen Niveau die Endgeschwindigkeiten für die verschiedensten Bahnen gleich sein müssen, wenn nur der Anfang des Fallens von einer und derselben Höhe gerechnet oder, was dasselbe ist, sein Ausgangspunkt auf einer und derselben, dem Horizont parallelen Ebene genommen wird. Ebenso beweist Huyghens den Satz vom Aufsteigen zu der ursprünglichen Fallhöhe in gleicher Allgemeinheit[1]). Die Bahnen mögen wie beim Pendel symmetrisch sein, oder aber auf beiden Seiten beliebig von einander abweichen, so folgt aus dem Satz, dass nicht blos beim freien Aufsteigen, sondern auch auf der schiefen Ebene die ursprüngliche Höhe des Falles wieder erreicht werde, durch blosse Zusammensetzung schiefer Ebenen die ganz allgemeine Nothwendigkeit, dass das Aufsteigen, auch wenn es in beliebigen krummen Linien erfolgt, stets bis zum ursprünglichen Niveau gehen müsse.

Um eine weitere Idee von der ferneren Benutzung der Bewegungsprincipien auf der schiefen Ebene zu geben, sei noch die 21. Proposition des hier fraglichen zweiten Theils des angeführten Hauptwerks hervorgehoben. Nach derselben erfolgt der Fall durch eine Reihe schiefer Ebenen, die zwischen denselben Parallelen eingeschlossen sind, schneller oder langsamer, je nachdem die Neigungen grösser oder geringer sind. Das hierin enthaltene Princip dient als Brücke, um den Fall durch die verschiedenen Theile der Cykloide zu untersuchen. Es lässt sich kurz so ausdrücken, dass der gradlinige Fall zwischen zwei dem Horizonte parallelen Ebenen in dem Maass schneller erfolge, als seine Bahn steiler ist. Dieser Satz ist aber nichts Anderes, als die Galileische Feststellung, dass die Fallzeiten bei gleichem Höhenunterschied den Längen der schiefen Ebenen proportional sind. Im Wesentlichen thut also Huyghens nichts weiter, als dass er die erforderlichen mathematischen Zurüstungen beschafft, um aus dem Princip der Bewegung auf der schiefen Ebene die Fallbewegung auf der Cykloide zu bestimmen. Die Lösung dieser Aufgabe war schwierig genug; aber die Hindernisse waren mathematischer und nicht mechanischer Natur. Aus diesem Grunde begnügen wir uns mit

---

[1]) Ibid. prop. 9 et 10.

der Anführung des Hauptergebnisses[1]), dass ein Nieder- und Aufsteigen in der Cykloide eine Zeit brauche, die sich zu derjenigen des verticalen Falles in ihrer Axe wie ein Kreisumfang zum Durchmesser verhalte, und dass die Höhe des Ausgangspunkts der Schwingung die Zeit nicht ändere. In Letzterem besteht der Tautochronismus. Huyghens, der seinen Satz nicht für unsere vollständige Schwingung, sondern für einen blossen Niedergang formulirt, kann sich sehr bezeichnend dahin ausdrücken, dass der unterste Punkt stets in derselben Zeit erreicht werde, gleichviel ob der Fall durch die ganze Cykloide oder von einem beliebigen Punkt derselben zurückgelegt werde. Diese Eigenschaft, derzufolge die kleinsten und die grössten Schwingungen stets dieselbe Zeit brauchen, gehört bekanntlich nur der Cykloide an, die aus diesem Grunde auch den Namen Tautochrone führt.

Aus dem Verhältniss der tautochronischen Schwingungsdauer zur Dauer des freien Falles durch die Axe liess sich nun für unendlich kleine Schwingungen des Kreispendels mit unendlicher Approximation und mithin für kleine Schwingungen mit genügend grosser Approximation eine entsprechende Relation bestimmen. Vermöge einer leichten Uebertragung ergiebt sich nämlich, dass sich die Zeit einer kleinen Kreispendelschwingung zu derjenigen des Falles durch die doppelte Pendellänge wie ein Kreisumfang zum Durchmesser verhält. Dieser Satz konnte nun[2]) sofort dazu benutzt werden, den Fallraum der ersten Secunde genauer als bisher zu ermitteln.

57. Alles, was von den Huyghensschen Leistungen bisher genauer dargelegt wurde, steht in keinem Verhältniss zu der Wichtigkeit der zweiten Classe der das Pendel betreffenden Untersuchungen. Sobald nämlich das Pendel nicht mehr einfach ist, sondern eine Berücksichtigung der verschiedenen Massentheile fordert, aus denen es sich zusammensetzt, so entsteht die Frage, wie die verschiedenen Bewegungen dieser nicht an gleiche Bahnen gebundenen Theile einander modificiren. Die Beantwortung derselben setzt voraus, dass man Principien kenne, um die gegenseitige Einwirkung von Massen zu bestimmen, die statisch miteinander verbunden sind und nach Maassgabe dieser festen Verbindung von der beschleunigenden Kraft der Schwere ganz verschieden afficirt werden. Denkt man sich ein zusammengesetztes

[1]) Ibid. prop. 25. [2]) Ibid. pars IV, prop. 26.

Pendel in der allereinfachsten Art, indem man z. B., wie dies später von Jacob Bernoulli wirklich vorausgesetzt wurde, auf der Pendellinie nur noch einen zweiten schweren Punkt annimmt, so ist klar, dass dieser zweite dem Centrum nähere Punkt so von der Schwere afficirt wird, dass er, wenn er allein und nicht auch der schwere Endpunkt vorhanden wäre, schnellere Schwingungen machen würde, als er in dieser festen statischen Verbindung vermag. Andererseits würden die Schwingungen des Endpunkts für sich allein langsamer ausfallen, als vermöge der Verbindung mit dem schneller bewegbaren näheren Punkt wirklich geschieht. Die an beiden Punkten zur Bethätigung gelangenden Bestrebungen der Schwerkraft sind mithin in ihren thatsächlichen Bewegungserfolgen von einander abhängig und setzen sich in eine Art Gleichgewicht. Noch besser drückt man sich aus, wenn man sagt, dass sie sich miteinander zusammensetzen; denn wie wir Nr. 28 schon angedeutet haben, giebt es keine Zusammensetzung oder überhaupt Combination von Kräften, bei welcher nicht ein partielles Gleichgewicht vorhanden wäre. Hienach handelt es sich bei der Bestimmung der Schwingungsdauer eines beliebig zusammengesetzten Pendels, d. h. überhaupt eines beliebigen um eine horizontale Axe schwingenden Körpers, um nichts Geringeres, als um eine Regel für die Zusammensetzung dynamischer Kräfte. Mit der Vergleichung rein statischer Momente, also mit der blossen Erwägung der Massen und Geschwindigkeiten, d. h. der Bewegungsgrössen konnte man Angesichts dieses Problems nichts ausrichten. Ausserdem wäre es in der That viel verlangt gewesen, ein ganz allgemeines Princip der Zusammensetzung von dynamischen Kräften aufzufinden, die in einer beliebigen statischen Verbindung stehen, — da man noch nicht einmal das Parallelogramm der Kräfte für statische Beziehungen anwendete.

In der That ist nun auch von Huyghens eine solche allgemeine Regel nicht formulirt, wohl aber das Princip derselben stillschweigend zur Anwendung gebracht worden, und hierin sowie in der Hinweisung auf die Erhaltung der Kraft liegt das Hauptverdienst der eleganten Lösung, welche sich im vierten Theil des Werks über die Pendeluhr mit vielen Anwendungen auf die verschiedenen mathematischen Configurationen dargestellt findet. Das Problem selbst wird gewöhnlich als dasjenige des Schwingungsmittelpunkts bezeichnet, weil es sich darum handelte, denjenigen Punkt auf dem Pendel oder überhaupt für den pendulirenden

Körper aufzufinden, der, wenn er allein die Schwingungen durch seine Lage bestimmte und mithin ein einfaches Pendel constituirte, diese Schwingungen ganz ebenso, also in derselben Zeit wie das zusammengesetzte Pendel ausführen würde. Dieses Oscillationscentrum ist der Punkt, in welchem man sich die verschiedenen Kräfte wie in einer Art Mittelkraft vereinigt denken kann, oder um welchen sie sich ähnlich verhalten, wie die parallelen Kräfte der Schwere um den Schwerpunkt eines Körpers. Eine derartige, aber entfernte Analogie, die in ihrer Fassung noch eine sehr vage Gestalt hatte, wurde zuerst von Descartes ausgesprochen, als Mersenne die Frage nach den Gesetzen des Oscillirens beliebiger Körper den Mathematikern vorlegte. Diese Frage, die sich leichter stellen als beantworten liess, und die noch obenein sofort in einer viel zu complicirten Gestalt in Angriff genommen wurde, beschäftigte Descartes, Roberval und zuerst auch noch Huyghens ohne nennenswerthen Erfolg. Jedoch ist die Entstehung der Idee von einem Oscillations- oder Agitationscentrum bei Descartes von Interesse und kann als eine erste, wenn auch noch sehr schweifende Direction der Gedanken in der Richtung auf die Lösung angesehen werden.

In einem Briefe an Mersenne vom März 1646 giebt Cartesius jene Idee als Lösungsregel, indem er sagt[1]): „Wie es einen Schwerpunkt in allen frei herabfallenden Körpern giebt, ... so haben alle Körper, die sich vermöge der Schwere um irgend einen Punkt bewegen, einen Agitationspunkt (centre de leur agitation), und alle Körper, bei welchen dieser Agitationspunkt von dem Aufhängungspunkt gleich weit entfernt ist, machen ihre Hin- und Hergänge in gleichen Zeiten.“ Ausserdem schreibt er z. B. auch noch an Cavendish[2]): „Was ich Agitationscentrum eines aufgehängten Körpers nenne, ist der Punkt, auf welchen sich die verschiedenen Agitationen aller andern Theile dieses Körpers so gleichmässig beziehen (rapportent), dass die Kraft, welche jeder Theil in Hinsicht auf eine schnellere oder langsamere als die wirkliche Bewegung haben kann, immer durch eine entgegengesetzte behindert wird.“

Auch aus dieser Vorstellung sieht man, wie Cartesius überall da am ehesten dem Richtigen nahekam, wo es sich um die rein

[1]) Descartes, Lettres, Bd. III Paris 1667, Brief 85, S. 488.
[2]) Ibid. Brief 86, S. 493.

statischen Bestandtheile der mechanischen Ideen handelte. Seine dynamischen Lösungsversuche, durch welche er über den Gegenstand mit Roberval in einen Streit verwickelt wurde, trafen aber noch weniger zu, als die rein thatsächlichen und ohne methodische Aufklärung gelassenen Andeutungen seines Gegners. Ein näheres Eingehen auf die in den weiteren Cartesianischen Briefen enthaltene Controverse mit Roberval würde daher die Einsicht in die geschichtliche Entwicklung nicht im Verhältniss der Ausdehnung der Erörterungen fördern, die zum genauen Verständniss jener tastenden Versuche unumgänglich werden würden. In der That hat Huyghens, abgesehen von jener allgemeinen Idee, die ganze Aufgabe wie eine völlig neue in Angriff nehmen müssen, und er hat sich bei ihrer allgemeinen Lösung eines Princips bedient, wovon man bis dahin noch keinen Begriff gehabt hatte.

58. Die Theorie des Oscillations- oder Agitationscentrums wird im 4. Theil des Huyghensschen Hauptwerks mit der Voraussetzung eröffnet, dass „wenn sich beliebige Gewichte vermöge ihrer Schwere zu bewegen anfangen, ihr gemeinsamer Schwerpunkt nicht höher steigen könne, als er sich bei dem Beginn der Bewegung befand.“ Diese unmittelbar auf die erforderlichen Definitionen folgende Annahme wird als selbstverständlich hingestellt, jedoch mit einigen Bemerkungen erläutert. Unter diesen ist besonders die Erklärung wichtig, dass dieser Satz nichts weiter besagen solle, als dass das Schwere nicht aufwärts falle (gravia sursum non ferri). Für einen einzelnen Körper sei der Satz ganz offenbar; ebenso sei er es für mehrere Körper, die durch unbiegsame Linien verbunden wären, da dieselben ja nur einen einzigen Körper ausmachten. Freie Körper könnten aber derartig durch unbiegsame Linien mit ihrem Schwerpunkt verbunden gedacht werden, dass vermöge dieser Veränderung keine Kraft von bestimmter Grösse ins Spiel gesetzt würde, und auf diese Weise lasse sich jene Voraussetzung auch für den Fall unverbundener Körper geltend und begreiflich machen. Uebrigens sei das Princip auch auf Flüssigkeiten anwendbar und geeignet, die hydrostatischen Sätze des Archimedes sowie sehr viele andere mechanische Einsichten zu beweisen. Auch beseitige es die Einbildung der Möglichkeit einer perpetuirlichen Bewegung.

Die letztere Hinweisung ist sehr wichtig; denn sie deutet den Zusammenhang an, in welchem das Princip mit der allgemeineren Idee steht, dass die Kraft zum Aufsteigen nicht aus

dem Nichts stammen könne, sondern vorhanden, also etwa durch eine entsprechende Senkung erzeugt sein müsse. Wäre es möglich, dass die Massen höher stiegen, als sie gefallen sind, so würde der Zusatz an Kraft, auf den dieser Ueberschuss an Erhebung zurückgeführt werden müsste, unerklärlich bleiben und als aus Nichts entstanden anzusehen sein.

Eine zweite Voraussetzung, die sich auf die Erfahrung beruft, enthält den Satz, dass auch das zusammengesetzte Pendel als solches gleich hoch steige, als es vorher gefallen sei. Der Umstand, dass hier der Körper bei seinem Fallen durch eine feste Axe bestimmt wird, erlaubte natürlich nicht, das Princip der ersten Voraussetzung zu übertragen, und hieraus erklärt sich die Berufung auf die Erfahrung.

Mit Hülfe dieser zwei Voraussetzungen, von denen nur die erste principielle Wichtigkeit hat, löste nun Huyghens die in Rede stehende Aufgabe ganz exact, indem er den Schwingungsmittelpunkt und dessen Abstand von der Drehungsaxe wesentlich durch die folgenden Ueberlegungen ermittelte. Nach einigen geometrischen Vorbereitungen über den Schwerpunkt stellt er in Proposition III zunächst fest, dass das Product aller Körper mit der Höhe, bis zu welcher der Schwerpunkt gestiegen sei, der Summe der Producte der einzelnen Körper mit den zugehörigen Höhen gleich sein müsse. Alsdann wird in Prop. IV dargelegt, wie die Höhe des Aufsteigens dieselbe bleiben müsse, wenn man sich die vorher in Verbindung von dieser Höhe gefallenen Körper plötzlich getrennt und in dieser Trennung vermöge der erlangten Geschwindigkeit wieder aufsteigend denkt. Die Relation, welche erforderlich ist, um den Schwingungsmittelpunkt zu bestimmen, ergiebt sich nun in Prop. V und zwar auf Grund der Gleichheit, welche für den Schwingungsmittelpunkt als solchen zwischen den miteinander verglichenen Erhebungen resp. Senkungen statthaben muss. Es braucht wohl kaum bemerkt zu werden, dass die in Frage kommenden Höhen nach dem Galileischen Fallgesetz durch die Quadrate der Geschwindigkeiten repräsentirt werden, und dass diese Geschwindigkeiten den Abständen von der Drehungsaxe proportional sind. Hieraus erklärt sich die Gestalt des Endergebnisses, welches in jenem fünften Satz dahin formulirt ist, dass der Abstand des Oscillationscentrums von der Axe gefunden werde, indem man die Summe der Producte der Massen mit den

Quadraten der Geschwindigkeiten durch das Product der Gesammtmasse und des Abstandes ihres Schwerpunkts von der Axe dividirt. Wie man sieht, drehte sich die ganze Herleitung dieses Resultats um die Anwendung des Princips, dass die Erhebung des Schwerpunkts auch nach der Trennung dieselbe bleiben müsse, als wenn die Verbindung fortbestände.

Es ist nicht zu leugnen, dass die Huyghenssche allgemeine Lösung des Problems auch abgesehen von der Eigenschaft ihres principiellen Ausgangspunkts dem Gedankengang einigen Zwang auferlegt und die entscheidenden Wendungen des Raisonnements durch die erforderlichen Umwege etwas verdeckt. Diese Artung der Exposition ist eine Folge des ursprünglichen Lösungsprincips selbst, welches ungeachtet seiner Richtigkeit und Tragweite dennoch eine Zerlegung in einfachere Vorstellungen verlangt. Die Thatsache, dass nach beinahe einem Jahrzehnt eine Controverse über die Richtigkeit der Huyghensschen Theorie erst begann, und dass noch mehr als ein weiteres Jahrzehnt verstreichen musste, ehe man sich befriedigend orientirte und durch andere Methoden über die völlige Zuverlässigkeit der ursprünglichen Auflösung beruhigte, — diese Thatsache ist sicherlich ein Zeichen, dass der eingeschlagene Weg nicht ohne grosse Schwierigkeiten zu controliren gewesen war. Andernfalls hätte sich wenigstens eine Capacität wie Jacob Bernoulli nicht bei dem ersten selbständigen Auflösungsversuch in einem erheblichen Punkt irren und einen falschen Weg einschlagen können, während die Huyghenssche Lösungsart vorlag. Jacob Bernoulli betrachtete nämlich, wie wir später genauer zu untersuchen haben werden, die totalen Geschwindigkeiten da, wo deren Elemente ins Auge zu fassen waren. Obwohl er nun später selbst von dieser Verwechselung zurückkam und aus einfachen Principien eine Auflösung des Problems zu Stande brachte, so hatte er doch durch die That bewiesen, dass die Huyghenssche Darstellung ihn ursprünglich nicht völlig überzeugt haben konnte. Die sehr subalternen Einwendungen, denen die Huyghenssche Auflösung zuerst im Journal des savants 1682 durch eine jetzt völlig obscure Persönlichkeit ausgesetzt war, und welche später zu der Intervention Jacob Bernoullis führten, griffen zwar vollständig fehl, bewiesen aber doch durch die Beachtung, welche sie erfuhren, dass man sich im Allgemeinen nicht befriedigt fand. Auch hatten sie ihre Ursache in dem principiellen Ausgangspunkt, der theils an

sich, theils in der Handhabung zu Bedenken und Zweifeln führen musste und zu einer voreiligen Bestreitung verleiten konnte.

Hier, wo wir nur die principielle Wendung, die Huyghens eigenthümlich war, ins Auge zu fassen hatten, können wir noch nicht den allgemeinen Erörterungen vorgreifen, welche zur vollständigen Einsicht in die Ausbildung des Princips der Erhaltung der lebendigen Kräfte erforderlich sind. Doch wird man bei einer vorurtheilsfreien Erwägung des Princips von Huyghens und der Art, wie er die Producte der Massen und der Quadrate der Geschwindigkeiten mit einander in Beziehung setzt, anerkennen müssen, dass die berühmte Idee von der Erhaltung der lebendigen Kräfte bei ihm zum ersten Mal einen bestimmten, wenn auch nicht in völliger Allgemeinheit formulirten Ausdruck gefunden hat. Der Grund, durch welchen Huyghens zu dieser Fassung seines Princips veranlasst worden sein muss, ist offenbar in der Anlehnung an die Vorstellungsart Galileis zu suchen.

Um jedoch diesen Ursprung des Huyghensschen Princips und hiemit auch zugleich den Kern des Grundsatzes von der Erhaltung der lebendigen Kräfte über jeden Zweifel erhaben zu wissen, muss man in der Entwicklung ein Zwischenglied aufsuchen, welches seiner Unscheinbarkeit ungeachtet für den Gang der Ideen in eminenter Weise charakteristisch ist.

59. So befremdlich es erscheinen mag, so sah Huyghens den Satz, dass ein schwerer Körper vermöge einer gewissen Geschwindigkeit auf einer schiefen Ebene zu derjenigen Höhe aufsteige, von der er durch den Fall jene Geschwindigkeit erlangen konnte, als eine Wahrheit an, die in der Reihenfolge der Deductionen der von Galilei gemachten und erst später bewiesenen Voraussetzung über die Gleichheit der aus gleichen Höhen erlangten Geschwindigkeiten vorausgehen müsse. Im zweiten Theil des Horologium oscillatorium wird die sechste Proposition, welche für den Fall auf verschiedenen schiefen Ebenen die berühmte Galileische Voraussetzung von dem Erwerb gleicher Geschwindigkeiten aus gleichen Höhen formulirt und einen ganz strengen Beweis liefern will, auf die vierte zurückgeführt, in welcher das Wiederaufsteigen zur Fallhöhe und der dabei stattfindende Verlust gleicher „Geschwindigkeitsmomente“ in gleichen Zeittheilen ausgesprochen und mit einem Beweise versehen worden war. Huyghens bemerkt sogar vor jenem sechsten Satz, dass er den nachgelassenen Beweisversuch Galileis hier durch eine bessere Ableitung ersetzen

wolle. Er nennt jenen Beweis, den wir Nr. 26 beigebracht haben, nicht stark genug (parum firma), genügt indessen selber den Anforderungen, die man im Hinblick auf den bedenklichsten Punkt machen muss, gar nicht, indem er das wahre Fundament der Galileischen Deduction nicht im Mindesten prüft und ergänzt. Dieses Fundament war, wie wir an der angeführten Stelle gefunden haben, die wesentlich unbewiesene Voraussetzung von der statischen Reducirung einer Kraft auf der schiefen Ebene. Anstatt dieses Hauptbedenken hervorzuheben, wendet sich Huyghens vielmehr dazu, den Satz vom gleichen Aufsteigen zu gleichen Höhen auf schiefen Ebenen als eine einfachere Wahrheit anzusehen und aus ihm das Erwerben gleicher Geschwindigkeiten aus dem Fall von gleichen Höhen indirect abzuleiten. Wären nämlich, so schliesst er, die erlangten Geschwindigkeiten nicht gleich, so würde ein von den ursprünglichen Erhebungen abweichendes Aufsteigen erfolgen müssen, was unmöglich ist. Indessen liegt diese Unmöglichkeit in einem Satz, der selbst eine unbegründete Uebertragung von den Verhältnissen des freien Aufsteigens auf diejenigen an der schiefen Ebene einschloss. Mit eben demselben Recht, mit welchem das Aufsteigen zu gleichen Höhen ohne Beweis für schiefe Ebenen geltend gemacht wurde, hätte sich auch sofort das Erlangen gleicher Geschwindigkeiten bei dem freien Fall aus gleichen Höhen auf schiefe Ebenen übertragen lassen. Der Sprung wäre in dem einen Fall nicht grösser gewesen als in dem andern. Es kann daher die Huyghenssche Deduction, die an Stelle der Galileischen treten sollte, nicht als Ausfüllung einer Lücke, wohl aber als Erklärungsgrund für das gelten, wonach wir augenblicklich am meisten zu fragen haben.

Wir sehen nämlich, wie Huyghens auch in jener Nachweisung der einfachsten Gesetze des Fallens und Aufsteigens sein Augenmerk bereits von vornherein auf die Unmöglichkeit der Erhebung über den ursprünglichen Ausgangspunkt des Fallens als auf eine Art Princip gerichtet hatte. Galt es auch für den freien Fall als bewiesen, so figurirte es doch schon für die schiefe Ebene ohne specielle Begründung[1]). Man kann daher kaum der Annahme ausweichen, dass der fragliche Satz von Huyghens schon früh weit weniger im Lichte eines speciellen Gesetzes als aus dem Gesichtspunkt einer Nothwendigkeit angesehen worden sei,

[1]) Vgl. die Vorbemerkung zu prop. VI, partis II Horol. oscill.

vermöge deren die Kraft zum Aufsteigen als eine durch das entsprechende Fallen gleichsam angesammelte Grösse betrachtet werden müsste. Die spätere, oben angeführte Bemerkung über die Unmöglichkeit der perpetuirlichen Bewegung, d. h. der Bewegung aus Nichts, macht die angedeutete Gedankengestaltung fast zur völligen Gewissheit. Gleichviel, ob die Kraft zum Aufsteigen ihren Ursprung wirklich in einem vorgängigen Fallen habe, so lässt sich eine ihr gleiche Grösse doch immer auf diese Weise entstanden denken, und im Hinblick hierauf würde sich, wenn der Satz des Aufsteigens zur fingirten Fallhöhe nicht zuträfe, im Anschluss an die einfachen Galileischen Fundamentalüberlegungen über Erzeugung und Verlust der Geschwindigkeiten ein Ueberschuss oder aber ein unverbrauchter Bestandtheil an Kraft nachweisen lassen, der entweder ohne Ursache entstanden, oder ohne Wirkung geblieben wäre. Beide Annahmen widersprechen aber den Grundvoraussetzungen, denen zufolge die irgendwo nachweisbare Bethätigung allein das Recht giebt, von dem Vorhandensein einer ihr entsprechenden Kraft zu reden. War aber einmal diese Idee im Hinblick auf mehrere besondere Fälle in das Bewusstsein getreten, so musste sie selbst zu immer weiterer Verallgemeinerung veranlassen, sobald sich neue analoge Verhältnisse darboten. Nachdem sie zunächst, wie wir bei Gelegenheit der cykloidalen Bewegung bereits angedeutet haben, für beliebige Formen des Aufsteigens in den verschiedensten Bahnen auf jedweder Oberfläche als gültig erkannt worden war, konnte es sich im Hinblick auf das Problem des zusammengesetzten Pendels nur noch um einen einzigen Schritt handeln, der aber freilich erheblicher war, als es zunächst den Anschein haben mochte. Dieser Schritt bestand darin, anstatt eines einzigen schweren Körpers mehrere oder, was den Hauptpunkt bereits entscheidet, wenigstens zwei und deren gegenseitiges Verhältniss ins Auge zu fassen.

Wurde nämlich die Idee vom Aufsteigen zur gleichen Höhe auf zwei unverbundene Massen übertragen, so liess sich das Princip sowohl für jede einzelne als für beide geltend machen. Im letzteren Fall, wo jedoch noch der ganze Zusammenhang als ein blos ideeller gedacht wurde, war es natürlicherweise der Schwerpunkt, nach dessen Höhe man zu fragen hatte. Galt aber einmal der Schwerpunkt als der Gegenstand, auf den das Princip vom Aufsteigen zu beziehen sei, so fragte es sich nun weiter, ob dieses Princip nicht auch gelten müsse, wenn die Verbindung der

beiden oder mehreren Massen mit irgend einem statischen Hinderniss ihrer Bewegung eine feste Bahn vorschriebe. Die Bejahung konnte nicht zweifelhaft sein; denn der Grundsatz, um dessen erweiterte Anwendung es sich handelte, war ja schon für den einzelnen Körper, dessen Bewegung durch eine schiefe Ebene statisch bestimmt wird, ausgemacht und erprobt worden. Jede relative Fixirung liess sich aber als Vorschreibung einer Bahn nach dem Princip der schiefen Ebene betrachten und wurde von Huyghens in allen Fällen, wo wir seine speciellen Auslassungen darüber haben, auch wirklich so angesehen. Es war also für den die Zwischenglieder der Beweisbestandtheile überspringenden Verstand eines bahnbrechenden Forschers sicherlich keine zu kühne Vorwegnahme, wenn er sofort jenes Princip vom Aufsteigen als eine Nothwendigkeit erkannte, an welcher eine statische Determination, d. h. die Vorschreibung einer Bahn, nichts zu ändern vermöge. Die Verbindung der Massen selbst hatte aber zunächst nur dadurch Bedeutung, dass vermöge dieses Zusammenhangs auch die Fixirung für jede Masse oder vielmehr jeden Massentheil vermittelt wurde. Andernfalls hätte es sich nur um einen einzigen freien Körper gehandelt.

Der einzige Umstand, der in Alledem noch als bedenklich gelten konnte, war die gegenseitige Einwirkung derjenigen Art, welche zwischen den Massen statthatte und noch mehr enthielt, als die blosse Vorschreibung einer Bahn. Da nämlich jede Masse nicht blos für sich allein an eine Bahn, sondern auch noch an eine künstliche Geschwindigkeit gebunden wurde, so musste, um das Fundamentalprincip anzuwenden, zuvor noch eine sichernde Ueberlegung platzgreifen, die aber ebenfalls keine grosse Schwierigkeit haben konnte. Diese gegenseitige Ausgleichung der schnelleren oder langsameren Antriebe der Schwere auf die verschieden liegenden Massentheile konnte ja ebenfalls wie eine statische Einschränkung angesehen werden, vermöge deren ebensowenig wie auf der schiefen Ebene in der Hauptsache eine Abänderung des Gesammtaufsteigens angenommen werden dürfte. Wenn nämlich auch die einzelnen Theile vermöge der ihren speciellen Bahnen angehörigen Geschwindigkeiten zu andern Höhen gelangen müssen, als im gegenseitig gebundenen Zustande, so kann doch von der bewegenden Kraft der Schwere dadurch nichts für das Ganze verloren gehen, dass diese Kraft einen Theil ihrer Wirkung nicht unmittelbar, sondern erst vermöge

einer statischen Beziehung zwischen den verschiedenen Massen ausübt und vertheilt. Es wird ihr hiedurch auf das Ganze nur eine analoge Wirkungsart vorgeschrieben, wie auf der schiefen Ebene. Der Umstand, dass eine horizontale Axe alle Theile nöthigt, in bestimmten Bahnen und zugleich in festen Lagen zu einander aufzusteigen, veranlasst zwar nicht blos eine Reducirung der Schwerkraft nach gegebenen Richtungen, sondern auch eine Bethätigung derselben nach relativ vorgeschriebenen Geschwindigkeiten. Diese Geschwindigkeitsverhältnisse bieten jedoch für die Gesammtbethätigung der Schwerkraft an dem ganzen Körper kein eigentliches Hinderniss der vollen Einwirkung, sondern nur einen Vertheilungsgrund dar. Der Schwerpunkt wird daher als Vertreter des ganzen Körpers ebenfalls dem Gesetz des Aufsteigens als unterworfen gedacht werden können, und wenn auch hiebei die ursprüngliche Analogie nicht mehr ohne Weiteres einleuchtet, so konnten derartige Ueberlegungen doch genügen, um das Princip als vorläufig motivirt erscheinen zu lassen. Die Thatsache, dass Huyghens es in dieser Ausdehnung nicht als Axiom einführte, sondern wenigstens formell von seinem einfacheren Bestandtheil abhängig machte, ist Beweis genug, dass er selbst Niemand zumuthete, die für die eigne Untersuchungsmethode zunächst hinreichende Art von Evidenz als definitiven Beweis gelten zu lassen. Nur für den Gang der Ideen kann kein Zweifel obwalten, dass Galileis einfacher Satz den Typus abgegeben habe, nach welchem Huyghens seine Vorstellungen zu einem allgemeinen Princip mehr und mehr ausprägte, und dieses sehr natürliche Verhältniss ist das für den Zusammenhang in den Fortschritten der Mechanik so ungemein Bedeutsame. Ohne die Nachweisung dieser Entwicklungsbeziehung würde die Stetigkeit als unterbrochen und der später immer erheblicher werdende Grundsatz von der Erhaltung der lebendigen Kräfte als eine plötzlich gemachte Entdeckung erscheinen, während er in der That im Wesentlichen schon bei Huyghens und zwar im engsten Anschluss an die Galileischen Fundamentalsätze zur Ausbildung gelangte.

Drittes Capitel.

Zusammensetzung der Kräfte und Gesetze des Stosses.

60. Die verhältnissmässige Unvollkommenheit in der Zurückführung der verwickelteren Sätze auf die einfacheren Wahrheiten hatte in der Zeit, in welcher Huyghens seine besten Ergebnisse zu Tage förderte, ihren Hauptgrund in dem Umstande, dass man nicht einmal für die Statik geschweige für die Dynamik ein allgemeines Zusammensetzungs- und Zerlegungsprincip der Kräfte besass. Soweit die Zusammensetzung der Bewegungen auch unmittelbar eine Zusammensetzung der Kräfte war, hatte allerdings schon Galilei bei der Behandlung der parabolischen Bewegung davon Gebrauch gemacht. Huyghens hatte ebenfalls nach dieser Seite hin einer wichtigen Idee einen bestimmten Ausdruck gegeben, indem er es als Fundamentalvoraussetzung hinstellte [1]), dass bei der Verbindung irgend einer gleichförmigen Bewegung mit der Wirkung der Schwere beide sich unabhängig von einander bethätigten, d. h. einander „nicht hinderten“ und so wirkten, als wenn sie getrennt wären. Hiedurch sprach er im Wesentlichen jenes später immer mehr betonte Axiom aus, dass sich in einer Combination von Bewegungsursachen die einzelnen Elemente an ihrem Theil so zur Geltung bringen, als wenn die übrigen Bestandtheile gar nicht vorhanden wären. Doch war hiemit immer noch kein Schritt geschehen, welcher über die einseitige Auffassung der Zusammensetzung blosser Bewegungserscheinungen hinausführte. Im Gegentheil leitete diese Idee insofern von dem fraglichen Ziel etwas ab, als sie grundsätzlich über die gegenseitigen statischen Beziehungen der combinirten Kräfte hinwegsehen liess und sich nur um den freien Bewegungseffect kümmerte. Eine eigentliche Zusammensetzung der Kräfte musste sich aber vor allen Dingen auf die statischen Verhältnisse beziehen, und in dieser Gestalt finden wir das Princip derselben zum ersten Mal von Varignon in seinem Projet d'une nouvelle mécanique (Paris 1687) als leitenden Gesichtspunkt einer neuen Behandlungsart der Statik vertreten und in der posthumen, sehr umfangreichen Schrift desselben Verfassers [2]) in der ausführlichsten Weise auf die einfachen Maschinen angewendet.

---

[1]) Horol. oscill. pars II, hypothesis III.

[2]) Varignon, Nouvelle Mécanique etc., 2 Bde. Paris 1725.

In demselben Jahr, in welchem Varignon sein Project einer neuen Mechanik veröffentlichte, erschien auch in den berühmten Newtonschen Principien eine Darstellung der Art, wie die Kräftezusammensetzung auf die Maschinen, d. h. statisch auf alle möglichen Verhältnisse anzuwenden sei. Newton legte jedoch auf dies Princip keinen besondern Ton und stellte es fast wie eine selbstverständliche Sache hin. So wird von ihm im zweiten Corollar zum dritten Bewegungsgesetz die Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte zwar als Basis der ganzen Mechanik bezeichnet; aber nirgend findet sich eine Andeutung, dass Newton diese universelle Anwendung des Princips als etwas von ihm Ausgehendes habe angesehen wissen wollen. Erinnert man sich ausserdem, dass die als Stevinscher Satz überkommene Vorstellung von dem Gleichgewicht dreier Kräfte, die nach Grösse und Richtung den drei Seiten eines Dreiecks entsprechen, dem statischen Zusammensetzungsprincip nahekam, so wird man geneigt sein, die ganze Entwicklung als einen Vorgang zu betrachten, der gar nicht den Charakter eigentlicher Entdeckungen hat und daher auch nicht ausschliesslich einer einzigen Persönlichkeit zugeschrieben werden kann.

In der That nimmt auch Varignon selbst nichts weiter als eine neue, universellere Gestaltung der Anwendungen des Princips für sich in Anspruch. Er weist selbst darauf hin[1]), dass die Physiker das Princip bereits bei dem schiefen Stoss gebraucht hätten, und dass er selbst vermöge eben dieses Princips nur die Erklärung der Maschinen als etwas bis dahin noch nicht Geschehenes in Angriff genommen habe. Von Interesse ist sein Bericht über die Art, wie er zu seiner Unternehmung angeregt worden sei. In der Vorrede, die für seine erste kürzere Schrift, das erwähnte Project, gearbeitet ist, erzählt er, dass ihn zuerst die Aeusserung von Cartesius, es sei lächerlich, den Flaschenzug auf den Hebel zurückführen zu wollen, frappirt und in die eigenthümliche Untersuchungsrichtung gelenkt habe. Indem er nun danach strebte, die Erzeugungsart (génération) des Gleichgewichts kennen zu lernen, erkannte er zuerst an der schiefen Ebene die Zusammensetzung der Kräfte und den Begriff der Resultante. Auch ist dieser Ursprung der natürlichste, der sich denken lässt. An der schiefen Ebene drängt sich die Zerlegung oder, mit andern

---

[1]) Ibid. Bd. I, S. 8.

Worten, die Reducirung der Kraft am unmittelbarsten auf, und dieses Verhalten einer Kraft in Beziehung auf eine feste gegebene Richtung ist eine noch einfachere Vorstellung, als die Zusammensetzung von zwei freien Kräften. Auch ist diese Vorstellung von uns bisher stets als der Urtypus aller statischen Beziehungen hervorgehoben worden, und wir haben gesehen, wie Galileis Beweis der Gesetze des Fallens auf der schiefen Ebene und sogar sein Beweisversuch des statischen Verhältnisses an derselben wesentlich nur darum mangelhaft ausfiel, weil die fundamentale und principielle Natur der Kraftreduction verborgen blieb.

61. Das erwähnte posthume Werk Varignons verwendet zwei Quartbände, um die einfachen Maschinen durch das Parallelogramm der Kräfte erklärlich zu machen. Der erste Abschnitt enthält die principielle Einleitung; die andern Abschnitte sind den verschiedenen einfachen Potenzen gewidmet. Das Zusammensetzungsprincip wird [1]) zunächst für die Phantasie veranschaulicht, indem ein Punkt vorgestellt wird, welcher auf einer mit sich selbst parallel bewegten graden Linie noch ausserdem selbständig fortschreitet. Die ausdrückliche Erweiterung dieser noch unbestimmten und auch allein auf phoronomische Bewegungen beziehbaren Idee auf eigentliche Kräfte findet sich erst in der posthumen Schrift, und der Verfasser sagt uns selbst, dass er zu einer solchen besondern Wendung [2]) erst durch die Einwürfe von Physikern veranlasst worden sei. Doch leistet er im Grunde auch nicht viel mehr als früher; denn seine ganze Nachweisung an der angegebenen Stelle gipfelt in der Berufung auf den Umstand, dass die bewegliche Linie und der Punkt nur die Veranschaulichung zum Zweck hätten, und dass die Kräfte in ihrem Verhalten von diesem Hülfsmittel der Imagination unabhängig wären. Dennoch ist diese Hinweisung auf die selbständigen Beziehungen der statischen Kräfte werthvoll, indem sie zur Erkenntniss des Unterschiedes zwischen phoronomischen Bewegungserscheinungen und vorgängigen Kräftecombinationen hinleitet.

Wie unsicher es zur Zeit Varignons mit der durchgängigen Anerkennung des Parallelogramms der Kräfte bestellt war, zeigt die Art von Einwendungen, denen der Verfasser der neuen Mechanik zu begegnen hatte. So war z. B. von Seiten der Cartesianer geltend gemacht worden, das fragliche Princip sei mit

---

[1]) Ibid. Bd. I, S. 13 in Lemma I. [2]) Ibid. S. 14 in Lemma II.

dem Gesetz der Erhaltung der Bewegung nicht vereinbar. Hierauf erwidert Varignon [1]), es gehe nicht blos bei der Zusammensetzung Bewegung verloren, sondern es könne auch bei der Zerlegung solche gewonnen werden, die vorher nicht gegeben war, und so finde eine Compensation statt. Diese Ausflucht ist um so merkwürdiger, da sie zeigt, wie Varignon selbst das partielle Gleichgewicht, in welches sich die bewegenden Ursachen setzen, nicht zu berücksichtigen vermochte. Noch heute ist im Hinblick auf die in einer ganz neuen Gestalt wieder lebendig gewordenen und erweiterten Ideen über die Erhaltung der Kräfte jene Cartesianische Frage zu erledigen. Ohne hier späteren Entwicklungen vorzugreifen, sei bemerkt, dass die partielle Umwandlung einer eventuellen Bewegung in eine statisch wirksame Kraft der Gesichtspunkt ist, aus welchem sich eine höhere, mit dem Princip der Erhaltung der Kräfte in jeder Richtung vereinbare Anschauungsweise gestalten lässt.

Ein eigenthümlicher geometrischer Uebergang, durch welchen Varignon von der Kräftezusammensetzung zu der Lehre von den Momenten im neuern Sinne dieses Worts gelangt, darf hier nicht übergangen werden, obwohl auch hiebei von einer eigentlichen Entdeckung mechanischer Art nicht geredet werden kann. Dieser Uebergang hat aber ein besonderes principielles Interesse, weil er zugleich den Kunstgriff vorbereitet, durch welchen das Hebelprincip auf das Parallelogramm der Kräfte zurückgeführt werden soll. Es wird nämlich [2]) zunächst der geometrische Satz festgestellt, dass in Bezug auf die Diagonale und zwei zusammengehörige Seiten eines Parallelogramms ein beliebiger, innerhalb oder ausserhalb gelegener Punkt mit den drei fraglichen Linien als Grundlinien solche Dreiecke bestimme, dass die Differenz oder Summe der Seitendreiecke dem Diagonaldreieck gleich sei. Diese Relation findet nun offenbar auch statt, wenn man die drei Linien auf ihren Richtungen beliebig verschiebt. Es ist also nicht nöthig, dass dieselben thatsächlich in der Ecke eines Parallelogramms zusammenlaufen, sondern es genügt, dass ihre Richtungen dies thun. Endlich ist auch dies nicht einmal nöthig, wenn man parallele Linien voraussetzt. Man hat mithin den ganz allgemeinen Satz, dass in einer Ebene drei beliebig gelegene Linien,

---

[1]) Ibid. in einem Scholium zu Lemma II der 1. Sect. S. 24.
[2]) Ibid. Lemma XVI, S. 84.

deren Richtungen in einem Punkt zusammentreffen oder aber gleich sind, in Beziehung auf einen beliebigen Punkt die erwähnte Eigenschaft haben, vorausgesetzt, dass die Grössen dieser Linien ein Verhältniss haben, wie es sich in einem Parallelogramm unter Beibehaltung derselben Richtungen zwischen der Diagonale und den Seiten gestalten würde. Diese Relation zwischen den Dreiecken ist nun nichts weiter als eine Beziehung zwischen den Producten, die man aus der Grösse der Linien und dem jedesmal zugehörigen Abstand des beliebigen Punktes bildet. Liegt also der Punkt ausserhalb der die Seitenkräfte vertretenden Linien, so sind jene Producte zu addiren, andernfalls aber zu subtrahiren, um die dem Product mit der Diagonale gleiche Grösse zu ergeben. Wie man sieht, ist diese geometrische Zurüstung nichts weiter als die Construction der mathematischen Form der Momente von drei convergirenden oder aber parallelen in derselben Ebene gelegenen Kräften. Die Voraussetzung, dass man den Angriffspunkt der Kräfte auf ihrer Richtung beliebig verschieben könne, ohne die Wirkung zu ändern, ist bei einem derartigen Uebergang von einem gemeinsamen Combinationspunkt zu einem System von Angriffsörtern nicht zu umgehen, und doch ist grade ein solcher Sprung von einem gemeinschaftlichen Angriffspunkt zu einer Verbindung von drei Angriffspunkten das der Rechtfertigung am meisten Bedürftige. Ohne eine principielle Erläuterung, die sich grade auf diesen Punkt richtet, ist es ganz unmöglich, zu der Zusammensetzung der Kräfte an einer Angriffslinie, d. h. zur Erklärung des Hebels zu gelangen.

Im fünften Abschnitt der neuen Mechanik behandelt Varignon den Hebel und zieht sich dadurch aus der Verlegenheit, dass er zunächst für convergirende Kräfte feststellt, dass ihre Resultante durch den Unterstützungspunkt gehe. Die Kräfte werden also so betrachtet, als wenn sie auf dem Durchschnittspunkt ihrer Richtungen angriffen und so eine Mittelkraft lieferten. Bei parallelen Kräften, dem eigentlichen und ursprünglichsten Fall des Hebelproblems, ist nun aber ein solcher Durchschnittspunkt gar nicht vorhanden. Hier hilft sich nun Varignon dadurch, dass er die Annäherung an den Parallelismus benutzt, um auf den Fall der streng parallelen Kräfte selbst zu schliessen. Hierin liegt natürlich ein stillschweigender Rückgang auf das, was man etwa aus der Stetigkeit des Uebergangs oder, wie man sich auch ausdrücken kann, aus der unbegrenzten Approximation an den Grenzfall des

strengen Parallelismus folgern möge. So fruchtbar indessen auch derartige, neuerdings besonders in der projectivischen Geometrie gebrauchte Schlussarten sein mögen, so haben sie doch an sich niemals vollkommen befriedigt, und man muss, so geneigt man ihnen auch übrigens sein möge, einen allgemeinen und strengen Beweis der Zuverlässigkeit ihrer Methode verlangen. Der Sprung ist in solchen Wendungen unverkennbar, weil die Stetigkeit der Beziehungen zwar in einem gewissen Sinn bestehen bleibt, aber in einer besondern Hinsicht eine Unterbrechung oder mindestens, um ein vielleicht passenderes Wort zu brauchen, eine Formveränderung erfährt. Die Voraussetzung, dass parallele Kräfte so betrachtet werden können, als wenn sie sich in unendlicher Entfernung schnitten, bedarf nicht nur einer Erläuterung, sondern auch eines Beweises. Sie hat nur insofern einen haltbaren Sinn, als man ernstlich darauf verzichtet, die Fiction eines Widerspruchs zur blossen Bequemlichkeit der Redeweise festzuhalten und von vornherein davon ausgeht, dass eine unbegrenzt kleine Richtungsabweichung nicht selbst Parallelismus, sondern nur eine Beziehung ist, die dem Parallelismus unbeschränkt nahekommt. Alsdann wird aber auch irgend eine Ueberbrückung der Kluft nöthig, welche dem strengen Begriff nach zwischen Richtungsgleichheit und Richtungsungleichheit, zwischen Schneiden und Nichtschneiden besteht. Die Stetigkeit des quantitativen Uebergangs muss freilich das Vehikel bleiben; aber der Uebergang zu Null ist für eine tiefere Betrachtung derselbe Sprung, wie die Voraussetzung eines Verhaltens oder einer Beziehung im unendlich Grossen. Wir lassen hier jedoch das Weitere auf sich beruhen, da der geeignete Ort für die allgemeine Erledigung dieser und ähnlicher Bedenken sich erst da finden wird, wo die Infinitesimalanalysis mit den ihr eigenthümlichen, auf die Mechanik anzuwendenden Begriffen in Frage kommt.

62. Die Theorie der Momente im heutigen Sinne des Worts ist nichts weiter als eine erweiterte Lehre vom Hebel. Wenn man daher von dem vorher angeführten geometrischen Satze über die Beziehung eines beliebigen Punkts zu jenen drei Parallelogrammlinien ausgeht und unter Festhaltung der zugehörigen Grössenverhältnisse den Grenzfall des Parallelismus mit unbeschränkter Approximation erzeugt, so kann man den beliebigen Punkt auf der Linie der Mittelkraft wählen, und es ergiebt sich auch nach dieser Anschauungsweise der Satz vom Hebel, d. h.

von der Gleichheit der statischen Momente. Die Differenz der oben erläuterten Producte (der Abstände mit den Linien der Seitenkräfte) muss dann nämlich gleich Null sein, weil die Entfernung des Punkts von der Linie der Mittelkraft Null ist. Im Grunde ist diese Auffassungsart von der bereits angeführten gar nicht verschieden; denn indem Varignon vom Hebel ausgeht und die etwa rechtwinklig angreifenden parallelen Kräfte erst in einer unendlich kleinen Abweichung von dieser Lage betrachtet, thut er ganz dasselbe, als wenn zur Gewinnung des Satzes von der Gleichheit der Momente die beiden Abstände des beliebigen Punkts in ihrer unendlichen Approximation an die Formirung einer nicht mehr gebrochenen, sondern streng graden Linie zu Grunde gelegt werden. In jedem Fall muss der Durchschnittspunkt der Linien der drei Kräfte unbegrenzt in die Ferne rücken, und hiebei ist eine Verschiebung des ursprünglichen Angriffsortes der Kräfte unvermeidlich. Im Parallelogramm selbst kann man nämlich durch stetigen Uebergang die Richtungsgleichheit nur als Zusammenfallen in einer und derselben Linie, aber nicht als Parallelismus aussereinander belegener Kräfterichtungen herstellen. Nur wenn man sich erlaubt, aus einem Angriffspunkt drei zu machen, kann man den Uebergang vollziehen.

Die eben gemachten Bemerkungen zeigen, wie unter allen Umständen die Zurückführung des Hebelprincips auf dasjenige der Zusammensetzung der Kräfte eine Rechenschaft über die Vermittlung der Kräftebeziehung zwischen den verschiedenen Angriffspunkten erfordert. Wollte man nämlich auch die Verlegung der Kraft auf ihrer Richtung als Hülfsmittel in Anwendung bringen, so müsste man sich doch irgendwie darüber auslassen, wie der neue Angriffspunkt mit dem ursprünglichen verbunden zu denken sei und wie auf diese Weise identisch dieselbe Wirkung erzielt werde, als wenn die Anbringung nicht verändert worden wäre. In einem andern Sinn als in demjenigen der Erhaltung der völligen Einerleiheit des ursprünglich ins Auge gefassten Effects würde das Princip der Kräfteverlegung gar nicht streng haltbar sein. Nimmt man daher etwa an, dass zwischen dem gegebenen und dem veränderten Angriffspunkt eine unbiegsame und unzusammendrückbare Linie befindlich sei, so dass der Zug oder Druck der Kraft nach Richtung dieser Linie den neuen Punkt nicht afficiren oder bewegen kann, ohne zugleich den ursprünglichen Anbringungspunkt in gleicher Weise zu erregen, so hat

man allerdings für diese eine zunächst in Frage stehende Kraft eine deutliche Ueberleitung hergestellt. Allein eine der andern beiden Kräfte, die nicht nach Richtung der starren Linie wirkt, muss durch Vermittlung derselben den ursprünglichen Angriffspunkt ganz anders afficiren. Man muss also, wenn man überhaupt die drei Kräfte in Beziehung setzen will, einen Sprung machen, und die nächste Kraft unmittelbar auf den neuen Angriffspunkt, der als Durchschnittspunkt bestimmt ist, wirken lassen und hiebei zugleich ohne nachgewiesene Berechtigung voraussetzen, dass der neue Angriffspunkt in jeder Beziehung und vollständig den alten in Rücksicht auf alle möglichen Kräfte vertrete. Letzteres ist aber offenbar eine Vorstellung, die nicht die Klarheit eines selbstverständlichen Axioms hat. Die ganze Wendung bekundet hiemit ihre Bedenklichkeit, ja Unzulässigkeit, und es bleibt mithin principiell die Aufgabe bestehen, die gegenseitigen Einwirkungen der Kräfte, die an einem System, welches nicht ein einziger Punkt sondern zunächst etwa eine feste Verbindung von zwei Punkten durch eine starre Linie ist, in strengster Form begreiflich zu machen. Wie wir bei Gelegenheit des neueren Poinsotschen Begriffs der Kräftepaare sehen werden, ist die Lösung der bezeichneten Aufgabe für die völlig durchsichtige Gestaltung des Systems der Mechanik von nicht geringer Bedeutung, und es mag gleich hier bemerkt werden, dass man viel früher die Eigenthümlichkeit einer Verbindung von zwei gleichen parallelen, aber entgegengesetzten Kräften erkannt haben würde, wenn man die Fundamentalbeziehungen am Hebel tiefer erforscht und das Zusammensetzungsproblem für parallele Kräfte in seiner allgemeinsten und einfachsten Gestalt als eine selbständige Aufgabe betrachtet hätte. Indem man sich dagegen theils bei der Archimedischen Art und Weise beruhigte, welche von vornherein einen Hebel voraussetzt, nicht aber zwei verbundene Punkte als das nach dem einzelnen Punkt einfachste System untersuchte, theils die Kräftezusammensetzung an einem und demselben Punkt fast ohne Weiteres auf eine Mehrheit von Angriffspunkten übertrug, verlor man mehr und mehr die Nothwendigkeit anderer Rechtfertigungsarten aus dem Auge. Namentlich verlegte man sich die Einsicht in die Nothwendigkeit einer weit grösseren Abstraction. Man glaubte an dem Zusammensetzungsprincip in der gewöhnlichen Anwendungsart eine letzte Einsicht gewonnen zu haben, während in der That grade die Zusammensetzung von Kräften, die nicht

an demselben Punkt angreifen, in Rücksicht auf Strenge der Nachweisungen noch das Meiste zu thun übrig liess.

Aus diesem Grunde und nicht blos der Nothwendigkeit wegen, vermittelst unbegrenzter Annäherung zum Grenzfall des Parallelismus überzugehen, erklärt sich sehr leicht die alte und noch heute gültige Thatsache, dass in den gegenseitigen Beziehungen des Hebelprincips und des Zusammensetzungsprincips grade das, was sich aus dem Gesichtspunkt des einen am einfachsten gestaltet, aus dem des andern die grössten Schwierigkeiten macht. Am Hebel hat man verschiedene Angriffspunkte, und die Zusammensetzung paralleler Kräfte ist der einfachere Fall. In der freien Vorstellung der Zusammensetzung der Kräfte nach Maassgabe des Parallelogramms ist aber derjenige Fall der leichteste, in welchem die Kräfte in einem gemeinsamen Punkt angreifen, mithin nicht parallel sein können. Bei tieferer Betrachtung zeigt sich freilich, dass es gar nicht zwei Ausgangspunkte der strengen Einsichtsvermittlung geben kann, und dass man stillschweigend und unbewusst etwas von dem andern Princip einmischt, obwohl man nur das eine vor sich zu haben glaubt. Die in dieser Beziehung erforderliche Zergliederung geht uns jedoch hier noch nicht an.

63. Im Allgemeinen musste sich das Princip der Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte als ein sehr bequemer Ausgangspunkt der statischen und der dynamischen Untersuchungen empfehlen. Der Umstand, dass es sich in Newtons epochemachendem Werk in der principiellen Einleitung auseinandergesetzt fand, trug sicherlich noch mehr als Varignons Bemühung dazu bei, es fortan mehr und mehr zur wissenschaftlichen Grundlage der systematischen Darstellungen werden zu lassen. Es war nicht nur hinreichend vorbereitet gewesen, sondern entsprach auch dem allernatürlichsten Bedürfniss, insofern es lehrte, nicht etwa blos die Grösse der Kräfte als Ergebniss von Additionen und Subtractionen vorzustellen, sondern auch die Richtung derselben als Vereinigung verschiedener Richtungsantriebe aufzufassen. In einerlei Richtung hatte man die Grössen der Kräfte schon früher ganz unbedenklich zusammengesetzt oder von einander abgezogen, wie dies z. B. auch in einem nicht einfachen Fall 1668 durch Wallis in seiner Feststellung der Gesetze des unelastischen Stosses geschehen war. Eben derselbe Autor hatte auch schon damals erwähnt, dass der schiefe Stoss analog zu

behandeln sei. Varignon selbst hatte darauf hingewiesen, dass die Physiker den schiefen Stoss nach dem Princip der Zusammensetzung der Bewegungen behandelt hätten. Es war mithin als neuer Schritt eigentlich nur eine allgemeinere Formulirung und eine erweiterte Anwendung auf die einfachen Maschinen erforderlich gewesen. Von drei Ausgangspunkten her, nämlich von der Galileischen Zusammensetzung der Kräfte in der parabolischen Bewegung, dann von dem Stevinschen Kräftedreieck und endlich von den Fragen nach der Kräftecombination im Stosse drängte sich die abstractere Erfassung des mechanischen Zusammensetzungsprincips als eine Nothwendigkeit auf, und es darf daher die Vollziehung dieser Verallgemeinerung wohl als eine Frucht der Zeit, nicht aber der besondern schöpferischen Begabung einer einzelnen Person angesehen werden. Fragen nach der Priorität oder der ursprünglichen Urheberschaft haben daher hier fast kein Interesse. Bei Lagrange[1]) findet man jedoch die Nachweisung, dass Varignon das Princip nicht schon 1685 besass, wie irrthümlich an der Spitze seines posthumen Werks behauptet wird, sondern dass er sogar damals noch das Hebelprincip auf den Flaschenzug anwendete. Grade aber die Einmischung des Hebelprincips in die Behandlung des Flaschenzugs sollte ja nach Varignons eigner Bemerkung der Punkt gewesen sein, von welchem ihn Descartes' Ausspruch abgebracht und auf die Bahn des Zusammensetzungsprincips geführt hätte. Es ist also das Jahr 1687, in welchem das Project der neuen Mechanik erschien, als der Zeitpunkt der Veröffentlichung festzuhalten. Merkwürdigerweise kommt jedoch für dasselbe Jahr nicht blos Newtons Hauptwerk, sondern auch noch eine kleine Schrift von Lami in Frage, deren sehr rationeller Titel Nouvelle manière de démontrer les principaux théorèmes des éléments des mécaniques ihrem Inhalt entspricht. Der von Lagrange an der angeführten Stelle anerkannte Gedankengang ist nämlich ein Zeugniss für die Natürlichkeit der Entwicklung. Es wird davon ausgegangen, dass die Vereinigung von zwei Bewegungen in einer mittleren auf ein Hinderniss stosse. Alsdann werden sich die Kräfte, welche diese Bewegungen oder vielmehr deren Mittelbewegung erzeugt haben würden, grade so verhalten, wie wenn die Bewegung in einem ersten Augenblick wirklich statthätte. Diese virtuelle Wendung, welche vermöge einer Art von Stetigkeit

---

[1]) Méc. anal. Bd. I, 2. Ausg. 1811, erste Abth. Sect. I, Art. 13.

die statische, ruhende Beziehung an den ersten gleichsam benachbarten Bewegungszustand anknüpft, bekundet, dass der Urheber derselben den Hauptpunkt getroffen hatte, um den es sich jederzeit bei dem Parallelogramm der Kräfte handeln wird. Auf eine andere Weise wird die Brücke zwischen der Bewegungserscheinung und dem streng statischen Verhalten wohl schwerlich jemals geschlagen werden. Dieses Mittel ergab nun aber sofort das Gleichgewicht dreier Kräfte an einem Punkt oder, wenn man will, ein statisches Aequivalent der beiden in ihrer Combinationswirkung gehemmten Kräfte. Auch die Formulirung, dass sich diese Kräfte nach dem Gesetz der blossen Bewegungscombination umgekehrt wie die Sinus der Winkel, die sie mit der Richtung der mittleren Bewegung bildeten, verhalten müssten, war gut gewählt. Die Anwendung richtete sich ebenfalls auf die schiefe Ebene und auf den Hebel. Diese übereinstimmende Richtung in der Bethätigung des Princips ist mindestens ein Zeugniss für die Verwandtschaft desselben mit dem Gesetz der schiefen Ebene. Uebrigens aber bestätigt sie auch noch unsere allgemeine Annahme, dass keine ungewöhnliche Virtuosität, geschweige ein genialer Aufschwung erforderlich war, um den Schritt zu thun, der den Satz von der statischen Zusammensetzung der Kräfte ergab. Schon der blosse Begriff des Gleichgewichts dreier oder mehrerer Kräfte in einem Punkt hätte den Gedanken der statischen Aequivalenz nahelegen können. Thatsächlich ist indessen die Betrachtung der Bewegungen in ihrer phoronomischen Erscheinung der Ausgangspunkt gewesen, und wie eingehend man sich mit dieser Seite der Sache bereits befasst hatte, ist uns in Robervals genialer Behandlung des Gegenstandes klar geworden.

64. Die Archimedische Ueberlieferung hatte das Hebelprincip auch in der neuern Zeit als eine Grundlage der ganzen Mechanik ansehen lassen. Galilei war dieser Auffassung gefolgt, obwohl er nebenbei seine natürlicheren Vorstellungsarten zur Geltung gebracht hatte. Huyghens, der die antike Tradition besonders hochschätzte, hat durch den Versuch, den Archimedischen Beweis des Satzes vom Hebel zu verbessern, deutlich genug bewiesen, dass er das fragliche Gesetz noch als den Grundstein der Mechanik betrachtete. Seine von uns Nr. 36 angeführte Demonstratio aequilibrii bilancis ist jedoch ganz und gar im Sinne der starren Beweisart gehalten. Es wird von dem Gleichgewicht einer Ebene ausgegangen, die sich um eine in ihr liegende

Axe dann im Gleichgewicht befinden soll, wenn die Gewichte auf beiden Seiten dieser Axe symmetrisch vertheilt sind. Die Archimedische Voraussetzung vom Gleichgewicht des gleichbeschwerten gleicharmigen Hebels wird hier natürlich ebenfalls und zwar auch ausdrücklich zu Grunde gelegt. Die Axe ist die Hebellinie, für welche das Gleichgewicht um einen in ihr belegenen, noch zu ermittelnden Punkt bewiesen werden soll. Dieser Punkt wird als Durchschnitt einer zweiten Axe bestimmt, um welche die Ebene ebenfalls vermöge einer gewissen Vertheilung der Gewichte im Gleichgewicht sein muss. Diese Vertheilung ist aber die Archimedische selbst, nur mit dem wesentlichen Unterschied, dass sie nicht auf der Hebellinie, für welche der Beweis geführt werden soll, sondern auf zwei in den beiden Angriffspunkten rechtwinkligen und in der betrachteten horizontalen Ebene liegenden Linien statthat. Da auf diese Weise in Bezug auf die Hebellinie als Axe die vollständigste Symmetrie stattfindet und jede der beiden rechtwinklig gezogenen Linien nach der Fundamentalvoraussetzung im Gleichgewicht sein muss, so wird es auch die Ebene selbst sein und zwar in Bezug auf die fragliche Axe. Der Nachweis der Art, wie das Gleichgewicht um eine zweite Axe und hiemit um den Unterstützungspunkt selbst bestimmt wird, setzt bereits mehr voraus, als blosse Consequenzen der Symmetrie und der Fundamentalannahme, indem es nicht unmittelbar einleuchtet, dass der gleiche Abstand von einer Axe bei übrigens unsymmetrischer Lage das Gleichgewicht einer Ebene bestimmen müsse. Denkt man sich nämlich auch die schiefwinklig schneidende Verbindungslinie solcher zwei Gewichte gezogen, so sind sie allerdings auf dieser durch die Axe halbirten Linie im Gleichgewicht; aber es ist nicht unmittelbar klar, dass sie nun auch die Ebene um die schief liegende Axe ins Gleichgewicht setzen. Auch Lagrange[1]) findet sich durch den Huyghensschen Versuch nicht befriedigt. Aber selbst wenn eine solche Nachweisungsart streng sein könnte, würde sie keineswegs dem natürlichen Gange vom Einfacheren zum Zusammengesetzteren entsprechen. Die Linie und die Verhältnisse an derselben sind ein einfacherer Gegenstand, als die Ebene mit ihrem grössern Spielraum von Möglichkeiten. Nichtsdestoweniger hat aber die Bestimmung des Gleichgewichts um einen Punkt vermittelst der Nachweisung des Gleich-

---

[1]) Méc. anal. Bd. I, erste Abth. Sect. I, Art. 1.

gewichts um zwei sich in diesem Punkt schneidende Axen an sich selbst ein grosses Interesse, sobald man an gewisse mathematische Methoden denkt, welche in allen Raisonnements den Punkt nicht als das Erste und Einfachste, sondern als Ergebniss der Combination unbestimmterer Oerter ansehen. Eine solche Auffassungsart hat auch in der Mechanik ihre Berechtigung; aber dieser Weg, welcher den Punkt in einem gewissen Sinne als das Concreteste, die meisten Bestimmungen in sich Vereinigende, die grade Linie und die Ebene aber als abstractere Gebilde anzusehen lehrt, kann nur dann mit Sicherheit betreten werden, wenn man sich durch den entgegengesetzten Gang des Verfahrens bereits mit den erforderlichen Principien abgefunden hat. Andernfalls würde man in der Mechanik etwas Aehnliches unternehmen, als wenn man die Principien der Geometrie dadurch sicherer machen wollte, dass man von vornherein die grade Linie als Durchschnitt zweier Ebenen und den Punkt als Durchschnitt von zwei graden Linien auftreten liesse.

In den eben angestellten Betrachtungen liegt schon die Entscheidung über das principielle Rangverhältniss, welches zwischen der Kräftezusammensetzung und dem Hebelgesetz besteht. Die erstere ist ein Schritt zu dem Einfacheren und führt zur Erkenntniss der maschinenmässigen Combination. Der Hebel selbst ist aber bereits eine Maschine, während die blosse Zusammensetzung von zwei Kräften an einem Punkt entweder gar nicht als eine solche, oder wenigstens nur als der allereinfachste Typus der gesammten Gattung zu betrachten ist. Ein Punkt, vermöge dessen sich zwei Kräfte vereinigen, ist allerdings auch schon eine Art System und so zu sagen eine mechanische Vorrichtung. Er ist die Ursache, dass beide Kräfte in gegenseitige Beziehung treten, und dass sie zum Theil gegen einander, zum Theil aber in demselben Sinne wirken können. Indessen schon zwei Kräfte, die durch Vermittlung einer starren Linie in gegenseitige Beziehung treten, bilden ein weniger einfaches System, und so wird denn wohl der Hebel, welcher, wie man ihn auch auffassen möge, niemals weniger als ein solches durch die Linie vermitteltes System repräsentirt, in seiner zusammengesetzteren Natur in keinem Fall auf die Rolle als letztes Princip Anspruch machen können. Das Gleichgewicht des gleicharmigen Hebels ist offenbar keine so einfache Vorstellung, als das Gleichgewicht gleicher und entgegengesetzter Kräfte an einem und demselben Punkt. Die

Vorstellung vom Vorgang am gleicharmigen gleichbeschwerten Hebel lässt sich auch in der That in Theilvorstellungen auflösen, in denen das Gleichgewicht entgegengesetzter Antriebe an demselben Angriffspunkt nicht zu umgehen ist. Dieser Umstand beweist die zusammengesetzte Natur des nur relativ einfachen Axioms, welches daher in seiner Eigenschaft als eigentliches und strenges Axiom nicht aufrechterhalten werden kann. Indem Galilei fast unwillkürlich auch hiebei auf das virtuelle Princip zurückgriff, hatte er die wahre Richtung, in welche sich der Zug der natürlichen Vorstellungsweise getrieben findet, deutlich genug durchblicken lassen, ohne jedoch selbst die weiteren Consequenzen zu ziehen und vollständig mit den blos relativen Principien zu brechen.

65. Man könnte die Frage aufwerfen, ob das Zusammensetzungsprincip auch lehre, wie Kräfte, die nicht an derselben, sondern an verschiedenen Massen wirken, sich gegenseitig bestimmen. Für den einzelnen Körper oder materiellen Punkt, an den man bei dem Kräfteparallelogramm zu denken pflegt, ist von einer Doppelheit der afficirten Masse nicht die Rede, wenn auch die etwaigen Zug- oder Druckkräfte, die auf ihn wirken, selbst durch verschiedene Gewichte vertreten sein können. Dagegen zeigt uns die Zusammensetzung der Kräfte am Hebel die Doppelheit oder Mehrheit der Massen, an denen die Kräfte wirken, als den gewöhnlichsten Fall, während die abstractere Vorstellung von den angreifenden Kräften, die ja auch durch Federn repräsentirt sein können, mehr in den Hintergrund tritt. Es wird daher nicht die Hebellinie gleich dem Punkt oder einzelnen Körper als System angesehen, sondern man denkt sich unmittelbar die beiden Gewichte oder überhaupt die beiden Massen als den eigentlichen Angriffsgegenstand der Kräfte. Aus diesem Gesichtspunkt werden die Verschiedenheiten der Massen als die Vermittler gedacht, vermöge deren die übrigens gleichen oder ungleichen Kräfte zueinander in Beziehung treten. In entsprechender Weise könnte man auch für das Parallelogramm der Kräfte anstatt eines einzigen Körpers zwei einführen, die miteinander unmittelbar und untrennbar verbunden sind, und man könnte bei aller Verschiedenheit der Massenverhältnisse die Dimensionen und Massen doch unbegrenzt klein nehmen. Man würde sich alsdann jeden Theil eines solchen Systems von einer verschiedenen Geschwindigkeit afficirt denken und, um den Einwurf zu vermeiden, dass

dieses System eigentlich doch nur eine einzige Masse sei, die beiden verschiedenen Massentheilchen isolirt afficiren lassen. Da die Ueberleitung der Bewegung von einem Theilchen auf das andere, als ein zeitlicher Vorgang, nothwendig eine, wenn auch noch so kleine Dauer erfordert, so können beide Körperchen, jedes in seiner Weise, erregt sein, ehe eine Ausgleichung stattgefunden hat; und die Zerlegung eines Massentheilchens, welches sonst als gemeinschaftliche Materie für die Bethätigung zweier Kräfte dient, in ein so zu sagen dualistisches System wird begreiflich. Erhebt man sich aber in das Gebiet der reinsten mechanischen Abstraction und operirt mit blossen Angriffspunkten, so kann man jeden Punkt, der Object zweier Kräfte ist, auch ebensogut in zwei Punkte auflösen, die unbeschränkt nahe aneinanderliegen, und deren jeder von einer der Kräfte afficirt wird. Die feste Verbindung, in der man sich die unbegrenzt nahen Punkte denkt, bildet das System, und der Druck oder Zug, welcher zwischen den beiden Punkten bestehen muss, macht das partielle Gleichgewicht recht anschaulich, welches zwischen zwei nicht congruirenden oder einander total aufhebenden Kräften noch ausser dem freien Bewegungseffect in Frage kommen kann. Solange man nur einen gleichsam untheilbaren Gegenstand der vereinigten Kräftewirkung in das Auge fasst, hat man nicht die gleiche Veranlassung, an die innern Spannungen und an die Verwandlung von Bewegungseffect in statischen Effect zu denken.

Jedoch soll hier dieser sehr moderne Gesichtspunkt nur dazu dienen, die durch doppelte Massen vermittelte Kräftewirkung als dasjenige Schema kenntlich zu machen, welches in verschiedenen Gestaltungen eine neue und wesentliche Grundform des mechanischen Wissens repräsentirt. In der Statik hatte die Beziehung verschiedener Massen aufeinander in der Form der Vermittlung rein statischer Kräfte bereits längst ihre Vertretung, und der Hebel kann als einfachster Typus dieser Art von Relationen angesehen werden. Indessen erst die Feststellung der Gesetze des Stosses unelastischer Körper lieferte einen noch einfacheren Weg, die Rolle der Menge der Materie in der Kräfteverbindung zu bestimmen. Erst mit ihr wurde der technische Begriff der Bewegungsgrösse, d. h. der nach der Menge der bewegten Theile und nach der Geschwindigkeit bestimmten Effectsumme unmittelbar verständlich und nachweisbar. Obwohl dieser Begriff eine statische Abstraction war und sich schon in Anknüpfung an das

virtuelle Princip ergeben hatte, so konnte er seine allgemeinste Bewahrheitung doch erst durch die Theorie der vereinigten Bewegung annähernd unelastischer Körper finden. Im Fall des Stosses solcher Körper sind es zwei vorher ganz isolirte Bewegungsgrössen, die eine dritte äquivalente Bewegungsgrösse ergeben, d. h. mit andern Worten, es sind zwei Bewegungsgrössen vorhanden, die sich zu einer dritten zusammensetzen und hiebei bekanntlich dem allgemeinen Zusammensetzungsprincip folgen, wie es sich im Parallelogramm der Kräfte für jede schiefwinklige Beziehung ausgedrückt findet. Bei dem Stoss ist man allerdings gewohnt, zunächst an ein centrales Zusammentreffen, also an Gleichheit oder völlige Entgegensetzung des Richtungssinnes zu denken. Dies hindert aber nicht, sich allgemeiner auszudrücken und im Hinblick auf den graden wie auf den schiefen Stoss von einer Zusammensetzung der Kräfte oder Bewegungsgrössen genau nach Analogie des allgemeinen Zusammensetzungsprincips zu reden. Auch dieses letztere ist ja so zu verstehen, dass es die besondern Fälle, in welchen der Winkel Null oder gleich zwei Rechten ist, einschliesst.

Nach dieser Erörterung wird man einsehen, dass die Aufgabe der Zusammensetzung der Kräfte in einem sehr allgemeinen Sinn gefasst werden kann, der weit über die Vorstellungen hinausführt, die sich an das Parallelogramm zu knüpfen pflegen. Indessen der wichtigste Schritt muss noch weiter tragen und sogar die Zusammensetzung der lebendigen Kräfte als eine analoge Grundform der Vereinigung dynamischer Wirkungen erkennen lassen. Hiedurch wird die Lehre vom Stoss der elastischen Körper die Brücke zu principiellen Einsichten, und die gesammte Theorie des Stosses zeigt sich in ihrem fundamentalen Charakter und in ihrer Bedeutung für das gesammte mechanische Denken. Ihre geschichtliche Entwicklung erhält zugleich hiemit die rechte Stelle, indem sie uns über den Fortschritt der allernöthigsten Principien aufklärt. Die ganze Dynamik Galileis beruhte auf der Voraussetzung, dass es sich zunächst nur darum handle, die Kräftewirkungen an einer einzigen, einheitlich gedachten Masse darzustellen. Die Einführung einer Doppelheit der Massen, vermöge deren die Kräfte aufeinander wirken, musste Vorstellungen und Aufgaben von einer zweiten und höhern Ordnung erzeugen.

66. Die Aufgabe, die Gesetze des Stosses zu bestimmen, fällt mit dem allgemeineren Problem zusammen, die erheblichsten

Bewegungsgesetze von zwei aufeinander wirkenden Massen festzustellen. Die Trennung der elastischen Körper und die kurze Dauer der gegenseitigen Einwirkung sind charakteristische Umstände desjenigen Stosses, bei welchem die Elasticität eine entscheidende Rolle spielt. Will man nun diese letztere Art nicht etwa als den eigentlichen Stoss behandeln, wie Huyghens gethan hat, so wird die andere Gattung des Stosses, bei welchem die Massen bei einander bleiben, offenbar dazu berechtigen, diese Vereinigung der Kräfte ebenso zu betrachten, als wenn sie irgend eine andere Ursache hätte, als grade das vorgängige Zusammentreffen. Zwei ungleiche Gewichte, deren Verbindungsschnur über eine Rolle gelegt ist, und welche der verticalen Wirkung der Schwere ausgesetzt sind, stellen ebenfalls ein Grundschema der Kräftevermittlung durch zwei Massen dar. Wir haben also auch in diesem Fall denjenigen allgemeinen Typus vor uns, der auch bei dem Stoss in Frage kommt, wenn der letztere nur in gehöriger Allgemeinheit und unabhängig von den mannichfaltigen, mittelbaren oder unmittelbaren Beziehungen gedacht wird, vermöge deren die Massen aufeinander wirken mögen. Die Vergleichung der Stossbeziehung mit dem Oscilliren der Gewichte am Hebel, — eine Vergleichung, die Wren in seiner Darstellung der Stossgesetze (1668) anstellte, zeigt deutlich genug, um welchen allgemeinen Begriff es sich eigentlich handelte. Dennoch wird es aber zweckmässig sein, den eigentlichen Stoss zunächst in seiner besondern Gestalt im Auge zu behalten und eingedenk zu bleiben, dass sich von ihm nur dann reden lässt, wenn nur die kleine Zeit der ausgleichenden Uebertragung von Bewegungen als vorübergehender Vorgang zu untersuchen ist. Liegt dagegen ein Verhältniss vor, in welchem die Mittheilung der Bewegungskräfte stetig geschieht und sich gleichsam in ununterbrochenen Strömungen unterhält, dann wird zwar das allgemeinere analoge Schema, aber nicht der specielle Fall des eigentlichen Stosses vorhanden sein.

Was nun den eigentlichen Stoss als eine plötzliche und ihrer Natur nach vorübergehende Einwirkung betrifft, so hat sich schon Galilei grosse Mühe gegeben, das innere Wesen desselben zu ergründen. Ausser ihm hat dann Descartes fehlschlagende Versuche gemacht und eine Reihe von Stossgesetzen aufgestellt, in denen nichts Erhebliches mit der Wahrheit zusammentrifft. Endlich wurden die wahren Stossgesetze auf Veranlassung der

englischen Gesellschaft (1668) von drei Forschern mitgetheilt und dann in dem Organ jener Gesellschaft, den Philosophical Transactions, veröffentlicht. Obwohl Huyghens sich einige Wochen später gemeldet hatte, als die beiden andern Einsender, Wallis und Wren, nämlich erst Anfangs Januar 1669, so kann doch der kleine Nachtheil des Mangels einer sachlich unerheblichen Priorität nicht hindern, seine Arbeit als die Hauptvertretung des Gegenstandes anzusehen. Dies wird sich aus innern Gründen als nothwendig erweisen. Zunächst müssen wir jedoch Galileis interessante Bemühungen etwas näher betrachten und die Cartesischen Gesichtspunkte berühren, ehe wir auseinandersetzen können, wie der am weitesten tragende Schritt seit der Begründung der Dynamik auch in dieser schwierigen Frage durch Huyghens geschehen ist.

67. Obwohl Galilei, aller Anstrengung ungeachtet, nicht zu den Stossgesetzen selbst gelangte, so sind doch einige seiner Ideen richtig, mehrere derselben aber trotz des Mangels eines directen Resultats von hohem Interesse für die weiteren Schicksale der dynamischen Vorstellungsarten.

Am ausführlichsten behandelt Galilei die Natur der Wirkung eines Stosses im posthumen sechsten Tag der Discorsi, von welchem Viviani nach dem Tode des Autors von dessen Sohn eine Abschrift genommen hatte. Einige Seiten über den Stoss finden sich jedoch auch am Ende der ebenfalls posthumen Schrift Della scienza meccanica. Am wichtigsten, wenn auch nicht am eingehendsten, ist jedoch das gelegentlich schon im vierten, also nicht posthumen Tag der Discorsi Gesagte. Dort[1]) wird die Vorstellung dargelegt, dass sich die Energie des Stosses, den ein Körper ausübt, auch nach dem andern Körper bestimme. Sie richte sich nach der Differenz der Geschwindigkeiten. Die Stärke des Stosses werde also 6 sein, wenn die Geschwindigkeiten in gleichem Sinne 10 und 4 sind. Die dieser Stelle zu Grunde liegenden Ideen werden deutlicher, wenn wir sie an der Hand der posthumen Erörterungen untersuchen.

Im sechsten Tag wird an das virtuelle Princip im weitern Sinne dieses Begriffs angeknüpft[2]). Ueberall sei es die Ge-

---

[1]) Discorsi e dimostrazioni etc., Bd. XIII der früher angef. Ausg. der Werke, S. 246. [2]) Ibid. S. 315 fg.



schwindigkeit, welche die Schwere (d. h. die Masse) des Gewichts gleichsam ersetze. Ueberall sei die überwiegende Geschwindigkeit und deren Verhältniss zur geringern Geschwindigkeit oder annähernden Ruhe die Ursache der Bewegung grosser Massen durch kleine. Die Energie setze sich aus Zweierlei zusammen, nämlich aus Geschwindigkeit und Gewicht. Dieser letztere Gedanke, den wir schon früher als denjenigen kennen gelernt haben, der die ganze Mechanik Galileis beherrscht, hat in dem fraglichen Zusammenhang mit dem Stoss eine besondere Bedeutung. Sein Auftreten zeigt nämlich, dass der Stoss nicht als etwas Besonderes betrachtet werden sollte, was den gewöhnlichen, bisher bekannten Gesetzen der gegenseitigen Kräftemessung nicht ebenfalls anheimfiele [1]). Der Gedanke, dass der nach derselben Richtung gemessene Geschwindigkeitsunterschied die Energie des Stosses bestimme, hat einen bemerkenswerthen Grund. Galilei geht nämlich, wie sehr häufig, so auch in diesem Fall von der Empfindung oder subjectiven Vorstellung des Muskelgefühls aus, welches dem mechanischen Vorgang entsprechen würde. Durch diesen Leitfaden der Vorstellung, welche die vorausgesetzte subjective Widerstandsempfindung liefert, wird er im Falle des Stossproblems grade von demjenigen Effect abgelenkt, den die Späteren mit Erfolg ins Auge fassten. Neben der dynamischen Wirkung kann nämlich noch, wie bei allen mechanischen Aufgaben, das innere statische Verhalten oder, mit andern Worten, die Pressung in Frage kommen, mit welcher die Körper gegeneinander drücken. Dieser gegenseitige Druck, vermittelst des Begriffs, den uns die eigne Empfindung unter ähnlichen Verhältnissen liefert, als ein objectiver Vorgang vorgestellt, — das ist die Galileische Intensität des Stosses. Sie ist nach ihm am grössten bei völliger Entgegensetzung des Sinnes gleicher Geschwindigkeiten, da in diesem Fall die Differenz, nach einerlei Sinn genommen, die doppelte Geschwindigkeit ergiebt. Dieses Maass des Unterschiedes bezieht sich nun aber, wie man sieht, gar nicht auf das dynamische Resultat des Stosses, welches bei unelastischen Körpern Null ist, sondern auf den innern Vorgang, der mit dem plötzlichen Zusammentreffen verbunden sein muss. Da in dem fraglichen Beispiel kein freier, wenigstens nicht ein an den Gesammtmassen

---

[1]) Vgl. Della scienza meccanica, am Schluss, der jedoch ursprünglich nicht von Galilei selbst herrührte, aber von ihm zu dem seinigen gemacht wurde.

sichtbarer translatorischer Bewegungseffect übrigbleibt, und da auch nach dem Stoss keine Pressung mehr besteht, so müssen sich die beiden Kräfte durch vorübergehenden Druck und Gegendruck aufgehoben haben. Die modernen Vorstellungen gestatten allerdings hier nur die Annahme einer Verwandlung oder, mit andern Worten, einer Uebertragung der Kräfte auf Objecte von einer solchen Beschaffenheit, dass hiedurch keine Massenwirkung, sondern nur eine subtilere Molecularwirkung hervorgebracht wird. In der Galileischen Anschauungsweise konnte es sich aber noch nicht um Wärmeerzeugung und ähnliche Wirkungen handeln, sondern es musste von Zweierlei Eines, entweder nämlich die innere statische Beziehung oder der frei werdende Bewegungseffect untersucht werden, ohne dass ein Drittes ins Spiel kam. Der Begründer der Dynamik ist nun bei dem Nächsten stehengeblieben, was sich als Maass der Intensität des Stosses an der Hand der subjectiven Vorstellungen am unwillkürlichsten aufdrängte. Hiedurch ist er verhindert worden, in die Bahn einzulenken, auf welcher sein grösster Nachfolger später glücklicher war; aber er hat nichtsdestoweniger einen wesentlichen Schritt gethan, indem er eine Seite des Stosses ins Auge fasste, die nachher in Vergessenheit gerieth. Aus letzterem Grunde mag auch hier noch sein einfaches Beispiel platzfinden. Das Auffangen eines Balles[1]) liefert das Schema für die verschiedenen Intensitätsverhältnisse. Weicht nämlich die Hand mit derselben Geschwindigkeit zurück, mit welcher der Körper ihr in unmittelbarer Berührung folgt, so ist kein Stoss vorhanden, da es an der Differenz der Geschwindigkeiten fehlt. Bewegt sie sich aber langsamer in demselben Sinn zurück, oder ruht sie, oder kommt sie gar mit irgend einer Geschwindigkeit dem Körper entgegen, so wird der Unterschied der respectiven Bewegung, welcher nichts Anderes als die oben bezeichnete algebraische Differenz der auf einerlei Richtungssinn bezogenen Geschwindigkeiten ist, den Stoss in seiner geringeren oder bedeutenderen Intensität bestimmen. Wollte man diesen Gesichtspunkt bei zwei gleichen, von denselben, aber entgegengesetzten Geschwindigkeiten afficirten Körpern geltend machen, so würde man in ein Gebiet gerathen, womit sich die Theorie des unelastischen Stosses, die zuerst von Wallis gegeben wurde, nicht beschäftigt hat. Die Bewegungen heben sich auf;

---

[1]) Discorsi, Bd. XIII der Werke, S. 318.

es tritt Ruhe ein, und hiemit ist unter Voraussetzung unelastischer Körper Alles abgemacht, was die Theorie seit Wallis wesentlich zu sagen vermochte. Was aber die gegenseitige statische Aufhebung der Kräfte zu bedeuten habe, blieb auf sich beruhen. Galilei mit seinem gänzlich verschiedenen Ausgangspunkt hätte sich, grade wenn er auf die richtige Theorie gekommen wäre, bei dieser einen Seite der Sache nicht beruhigen können.

Während die Art, wie sich der Begründer der Dynamik die innere Stossintensität dachte, ohne sicher nachweisbare Folgen blieb, entwickelte er noch mehrere andere Vorstellungen, die den Späteren offenbar zur Grundlage gedient haben, wenn sie auch nur einzelne Theile im Vorgange des Stosses und im Wesen dieser Einwirkungsart erläuterten. Hieher gehört besonders die mit Vorliebe gepflegte Idee[1]), dass die Kraft des Stosses im Verhältniss zu dem ruhenden Gewicht gleichsam unendlich sei, da letzteres gar keine Geschwindigkeit habe. Hiemit soll die antike Frage beantwortet sein, wie es komme, dass ein kleiner Stoss auf einen Keil so viel ausrichte, während eine blos statische Belastung dieses Keils so wenig thue.

Noch wichtiger ist die Zerlegung des Stosses in eine Summe von Elementarimpulsen. Ausdrücklich[2]) wird „das Moment eines schweren Körpers im Acte des Stosses" als „ein Aggregat unendlicher Momente" betrachtet, in welchen die eigne Schwere bethätigt werde. Solche Momente häufen sich und erhalten sich, wie es bei dem freien Fall der Körper die Antriebe der Schwere thun. Diese Vorstellung, von der man für den elastischen Stoss später Gebrauch machte, ist noch ausserdem durch den Gegensatz, der in ihrer unmittelbaren Nachbarschaft auftritt, von historischer Bedeutung. Es wird nämlich in der Gegend der angeführten Stellen nicht nur häufig auf den blossen Druck und auf das ohne Geschwindigkeit gedachte Gewicht als auf einen Gegensatz zu der Bethätigung der Geschwindigkeiten hingewiesen, sondern es werden auch diese beiden Gattungen von Wirkungen dadurch gekennzeichnet, dass ihr gegenseitiges Verhältniss als ein so zu sagen nicht endliches dargestellt wird. Fügt man hiezu noch den Umstand, dass überdies auch der äusserst bezeichnende Ausdruck peso morto mehrfach in den fraglichen

---

[1]) Ibid. S. 332. [2]) Ibid. S. 330.

Erörterungen vorkommt, so kann man nicht umhin, in Alledem bereits den Begriff des Unterschiedes der todten und der lebendigen Kraft zu erkennen. Von dem „todten Gewicht“ im Gegensatz zu den gehäuften Elementarimpulsen war, was die Idee an sich betrifft, zur Vorstellung der todten Kräfte kein weiterer Schritt als höchstens ein metaphysischer Rückschritt erforderlich. Hieran werden wir uns zu erinnern haben, wenn wir die stufenweise mathematische Ausbildung und Handhabung des Begriffs der lebendigen Kräfte untersuchen, und wenn wir bei Leibniz und Johann Bernoulli die metaphysische Formulirung und Fixirung jener Vorstellungsart erörtern.

68. Descartes' Aufstellungen über den Stoss sind insofern von geschichtlichem Interesse, als sie für die Verschiedenheit seiner Methode Zeugniss ablegen und bekunden, wie die vorwiegend metaphysischen Betrachtungsarten zu leichtfertigen Anticipationen veranlassen. Die vermeintlichen Stossregeln finden sich in den „Principien der Philosophie“ (Theil II, Nr. 46 fg.) als Naturgesetze hingestellt. Ein bemerkenswerther leitender Gesichtspunkt ist in dem Cartesischen Denken die Erhaltung derselben Bewegungsgrösse. So richtig indessen auch der allgemeine Gedanke ist, welcher den Erhaltungsvorstellungen zu Grunde liegt, so gestaltete sich doch die Anwendung dieses Princips auf den Stoss irrthümlich. Eine Kraft ist erst durch die Richtung das, was sie in den Verbindungen repräsentirt, und diese Richtung war es, die von Cartesius als etwas relativ Gleichgültiges behandelt wurde. Der reflectirte Körper sollte von vornherein ein Vermögen in sich tragen, auch trotz eines Hindernisses in anderer Richtung seinen Weg fortzusetzen. Diese Vorstellungsart hat etwas Vages und sogar Unrichtiges. Es ist erst die Combination der Kräfte und Richtungen, welche die neue Richtung bestimmt. Zwischen elastischem und unelastischem Stoss wird bei Descartes gar nicht unterschieden, indem er stets nur den Gegensatz zu den flüssigen Körpern im Auge hat. Erst wenn man diese Unterscheidung einführt, erhalten zwei der Cartesischen Gesetze einen zutreffenden Sinn. Gleiche Körper, die mit gleichen entgegengesetzten Geschwindigkeiten (centrisch) aufeinandertreffen, gehen in analoger Weise zurück, vorausgesetzt, dass sie völlig elastisch sind. Dieser Satz wurde später von Huyghens als nicht zu beweisendes Axiom an die Spitze seiner Theorie gestellt, die es thatsächlich nur mit dem elastischen Stoss zu thun hat. Die

andere Cartesische Aufstellung, welche durch die Hinzufügung der nöthigen Voraussetzung exact gemacht werden kann, bezieht sich auf den Stoss unelastischer Körper. Wenn eine grössere Masse gegen eine kleinere ruhende anläuft, so sollen beide vereinigt mit einer Geschwindigkeit fortgehen, die der bekannten Reduction entspricht. Dies ist freilich nur ein besonderer Fall des allgemeinen Gesetzes, demzufolge das Product der vereinigten Massen mit der neuen Geschwindigkeit der Summe der Producte der einzelnen Massen mit ihren zugehörigen Geschwindigkeiten gleich sein muss. Da Descartes nicht zu dieser Verallgemeinerung gelangte, so blieb er noch weit davon entfernt, auch nur sein eignes Princip von der Erhaltung der Bewegungsgrössen durchschlagend anzuwenden. Seine sämmtlichen übrigen Sätze sind aber falsch, und es lässt sich bei ihnen auch nicht einmal mit einer Unterschiebung der gehörigen Distinctionen, wie in den beiden angeführten Fällen, nachhelfen.

69. Die Nachweisung der Schritte, durch welche die Stossgesetze von Huyghens aufgefunden wurden, ist insofern positiv unthunlich, als seine hinterlassenen Beweise über diesen Punkt kein Licht verbreiten und höchstens zu einigen Vermuthungen Raum geben. Ursprünglich erschienen die Stossgesetze ganz ohne Beweis. In dieser Gestalt wurden dieselben der englischen Gesellschaft auf deren Aufforderung hin gegen Ende 1668 und Anfangs 1669 in knappester Form vorgelegt. Der Secretär dieser Gesellschaft, Oldenburg, sprach sich im Anschluss an die Veröffentlichung der drei Arbeiten im Sinne der vollständigen gegenseitigen Unabhängigkeit derselben aus. Wie schon oben erwähnt, hatte Wallis seine Feststellungen zuerst präsentirt. Sie waren nur für den unelastischen Stoss gültig, aber zugleich von der Darlegung der principiellen Ausgangspunkte begleitet. Hienach berührten sie sich mit denjenigen von Huyghens nicht einmal im eigentlichen Gegenstande, und nur Wren konnte von den beiden Engländern als Concurrent von Huyghens in Frage kommen. Nun sind die Huyghensschen Darlegungen die klarsten und vollständigsten, und es ist daher in ihnen grade in principieller Hinsicht der entscheidende Schritt zu suchen. Die Erhaltung der lebendigen Kraft im Stoss ist darin besonders ausgesprochen, wenn auch noch der spätere technische von Leibniz herrührende Name fehlt. Diese rein principiellen Elemente sind um so bedeutsamer, als es sich ja nach der adoptirten Ausdrucks- und Vorstellungsart

in den fraglichen Lösungen im Allgemeinen um die „Gesetze der Bewegung“ handeln sollte. Dies ersieht man namentlich auch aus der Art, wie Wallis seinen Gegenstand in Angriff nahm, da grade die vorangeschickten Formulirungen seines Aufsatzes noch nicht sofort absehen lassen, dass schliesslich die Stossregeln das eigentliche Ziel bilden sollen.

Da wir die ganze Lehre vom Stoss in dem eben bezeichneten Sinn, nicht aber als einen Inbegriff besonderer Sätze zu berücksichtigen haben, so mögen vor dem Eingehen auf die höchst eigenthümliche Huyghenssche Methode ein paar Bemerkungen über Wallis' Gedankengang vorausgeschickt werden. An die Spitze seines Artikels stellt derselbe die Proportionalität der Wirkung mit der Kraft. Nachdem er alsdann das Product der Masse mit der Geschwindigkeit als Ausgangspunkt für die Vergleichung der Wirkungen gekennzeichnet hat, bemerkt er, dass auf diesem Verhältniss der Kräfte das Gleichgewicht an allen Maschinen beruhe und weist hiemit auf den Kern des virtuellen Princips hin. Er dachte sich dasselbe auch, wie Galilei, als blosse Folge des Kraftbegriffs. Die Behandlung des unelastischen Stosses erschien nun nach diesen Einleitungen als eine blosse Anwendung der gegenseitigen Messung der Kräfte. Der ruhende Körper wird als eine Masse angesehen, welche von der Geschwindigkeit oder Kraft des andern anlaufenden Körpers nun auch noch bewegt werden muss, und diese Geschwindigkeit muss sich daher auf beide Massen so vertheilen, dass die Kraft im Sinne von Wallis oder, mit andern Worten, die Bewegungsgrösse dieselbe bleibt. Hier ist offenbar die Materie, wie es auch ganz in der Ordnung ist, als blosser Gegenstand der Kraftaffection gedacht. Sobald man die innern Kräfte der Körper in Betrachtung zieht, trifft die Vorstellungsart in der angegebenen Weise nicht mehr zu, und nicht etwa blos bei dem elastischen, sondern auch schon bei dem unelastischen Stoss, für den Wallis die Theorie aufstellt, entstehen berechtigte Bedenken über die allzu schnelle Unmittelbarkeit jener Schlussweise. Es muss also, um zu den exacten Resultaten auch eine exacte Vorstellungsart ihrer Gründe zu haben, noch hinzugefügt werden, dass die Wallisschen abstracten Entwicklungen nur insoweit für wirkliche Naturkörper gelten, als die letzteren annäherungsweise den ideellen oder, wenn man will, schematischen Voraussetzungen entsprechen. Diese Voraussetzungen bestehen aber in der Annahme einer Materie, welche eine Geschwindigkeit

gleichsam passiv annimmt, und bei welcher es sich, ganz wie in den Fällen, wo die Uebertragung der Bewegung ohne Stoss erfolgt, nur darum handelt, eine afficirende Geschwindigkeit oder überhaupt Bewegungsursache auf ein unbedingt träges Object zu übertragen und zu vertheilen. Jeder Körper, der an der Bewegung eines andern Theil nimmt, weil er mit demselben irgendwie verbunden ist, liefert hiefür ein Beispiel. Der Gegenstand auf einem Schiff erfährt nicht eigentlich einen Stoss in dem gewöhnlichen Sinne dieses Begriffs. Namentlich wird bei ruhiger Entwicklung der Bewegung die Mittheilung derselben nur solche innere Vorgänge erzeugen, die im Verhältniss zu dem Haupteffect eine secundäre Rolle spielen. Das streng statische Verhalten ist allerdings in diesem Beispiel auch nur dann vorhanden, wenn keine Veränderung der Bewegung platzgreift und des Beharrungsgesetzes wegen gar keine neue Mittheilung nöthig wird. Indessen lässt sich auch der Fall der eigentlichen Mittheilung so denken, dass die innern Kräfte des Körpers nur in untergeordneter Weise ins Spiel kommen. Alsdann ist die Vorstellungsart, welche die vereinigten Massen als Object derjenigen Kraft ansieht, welche zunächst nur als in der einen Masse befindlich gedacht wurde, vollkommen zutreffend. Man erklärt, indem man dieser Vorstellungsart folgt, die innern Vorgänge nicht etwa für Nichts, sondern nur für quantitativ unerheblich in Rücksicht auf das Hauptresultat, d. h. auf die sichtbar werdende Massenbewegung.

70. Ganz entgegengesetzt gestaltet sich nun aber das Verhältniss, wenn die innern Kräfte in der Form der Elasticität die entscheidende Hauptursache der Bewegungsgestaltung bilden. Hier muss es auffallen, dass die Hauptlösung des Stossproblems, wie sie bei Huyghens in einem posthumen Aufsatz vorliegt, den erdenklich indirectesten Weg eingeschlagen hat. Während nämlich aus der oben erwähnten Einsendung die Auffindungsmethode nirgend zu errathen war, tritt uns aus der fraglichen nachgelassenen Abhandlung[1]) die Methode der Scheinbewegungen als überall leitendes Princip entgegen.

Diese Methode hat an sich selbst für die Principien ein hohes Interesse, obwohl sie für den Stoss diejenige ist, deren Anwendung man bei einem solchen Problem am wenigsten erwarten sollte. Nur die grossen Schwierigkeiten, mit denen eine natür-

---

[1]) De motu corporum ex percussione, in den Opuscula postuma, 1703.

lichere und directe Lösung der Aufgabe grade für Huyghens verbunden gewesen sein mag, dürften den Anstoss dazu gegeben haben, die Bewegungsgesetze durch eine Methode festzustellen, die man als diejenige einer für den objectiven und sachlichen Vorgang gleichgültigen Variation der phoronomischen Erscheinungen bezeichnen könnte. Die Urtheile und Festsetzungen über das reale Geschehen können sich nicht ändern, wenn man zwei verschiedene Erscheinungsformen eben dieses Geschehens ins Auge fasst. Dies ist der Grundsatz, der, wenn auch unausgesprochen, dem Huyghensschen Verfahren zum Fundament dient. Stillschweigende Voraussetzung ist natürlich bei der Anwendung eines solchen Princips ein derartiger Sachverhalt, dass es nicht auf die phoronomischen Phänomene als solche, sondern auf die Kräfte oder Ursachen ankommt, deren Ausdruck sie sind. Die Ursache einer Geschwindigkeit braucht nicht stets zu einer Bewegungserscheinung zu führen, sondern kann auch dazu dienen, die Ursache einer andern Geschwindigkeit aufzuwiegen. Alsdann liegt ein rein statischer Effect vor. Aber man kann auch noch mit Huyghens einen Schritt weiter gehen und zwei unverkennbar wirksame Bewegungskräfte, deren jede sich wahrnehmbar bethätigt, zur Hervorbringung der absoluten Ruhe zusammenwirken lassen.

Wenn sich Jemand auf einem Schiff vermöge seiner eignen Muskelkraft so bewegt, dass seine Bewegung durch die entgegengesetzte Bewegung des Schiffs bei jedem Schritt genau aufgehoben wird, und man sich diese Aufhebung, wie man dies wenigstens ideell darf, bis in die kleinen Theile der Bewegung, mithin im strengsten Sinne durchgängig vorhanden denkt, so findet vermöge dieser beiden afficirenden Ursachen gar keine Ortsveränderung statt. In Rücksicht auf das Wasser oder Ufer ist Ruhe vorhanden, und diese Ruhe würde eine in jeder Beziehung absolute sein, wenn nicht Wasser und Ufer noch andere Bewegungen hätten, und wenn nur jene beiden afficirenden Ursachen in Frage kämen. Aus diesem Grunde sind auch die Vorstellungen, die man über die Möglichkeit oder Thatsächlichkeit einer absoluten Ruhe in Bezug auf die Gesammtheit aller mechanischen Vorgänge der Welt hegen möge, für den vorliegenden Fall gleichgültig. Es ist genug, dass man einsehe, wie zwei bewegende Kräfte relative Ortsveränderungen wirklich hervorzubringen vermögen und dennoch in ihrer Verbindung nur Ruhe gegen ein drittes Object als das eigentliche Resultat bemerken lassen können. Auf

dieser für das tiefere Nachdenken eminent wichtigen Thatsache beruht nun die Gleichgültigkeit des Gesichtspunkts oder Standpunkts, aus welchem derselbe reale Vorgang, also im fraglichen Fall der Stoss der Körper, betrachtet werden kann. Dasselbe identische Object, nämlich die Kräftecombination, wird das eine Mal in der einen, das andere Mal in der andern Erscheinungsform untersucht. Da nun die Bewegungserscheinungen die einzige Gestalt sind, unter welcher die Wirkung der Kräfte sichtbar wird, so beruht auch hier der Kunstgriff der Methode darauf, nach Belieben, wie es das Bedürfniss mit sich bringt, den Fall der wahrnehmbaren Bewegungserscheinung mit dem äquivalenten Fall ihrer statischen Unterdrückung zu vertauschen. Es ist also im letzten Grunde auch hier eine ähnliche Wendung im Spiele, wie diejenige, welche zuerst dazu geführt hat, die eventuellen Bewegungen an die Stelle rein statischer Kräfte zu setzen. Nur erfährt in diesem Fall die Aequivalenz beider eine noch entscheidendere Bestätigung. Die Bewegungen sind nämlich nicht blos hypothetische, sondern der realen Affection nach vorhandene und als solche erkennbare. Wenn ich mich vermöge meiner Kraft bewege, so wird Niemand die Realität dieser Bewegung als Bethätigung einer bewegenden Kraft bestreiten können, wenn sie auch gegen ein drittes Object keine Ortsveränderung hervorbringt. Man wird vielmehr sagen müssen, dass zwei Kräfte, und zwar nicht etwa blos als statische, zur Wirksamkeit gelangt sind, dass sie sich aber in Rücksicht auf Ortsveränderung, die an einem dritten Object gemessen wird, aufgehoben haben. Man wird ausserdem diese Aufhebung von derjenigen unterscheiden, welche im eigentlichen Gleichgewicht statthat, da unter Voraussetzung des letzteren nie eine Bewegungserscheinung hervortreten darf, wie man auch den Standpunkt wählen möge.

Da man gegenwärtig eine allgemeine Methode besitzt, durch die Einführung scheinbarer Bewegungen das Aussehen mechanischer Vorgänge zu verändern und auf diese Weise die Probleme zu bearbeiten, so hat die älteste und fruchtbarste Production dieser Art als der Urtypus der ganzen Gattung offenbar Anspruch auf sorgfältige Beachtung und Zergliederung, und wir werden daher, ohne weitläufig auf die allerspeciellsten Anwendungen einzugehen, die Huyghenssche Verfahrungsart in allgemeinerer Weise, d. h. nicht ausschliesslich im Interesse des Stossproblems, zur Darstellung bringen.

71. Huyghens verschmäht nirgend die Mittel der Veranschaulichung, und wie er in der Behandlung der Centrifugalkraft sich einen Menschen denkt, der auf einem rotirenden Rade steht und das Gewicht an einer Schnur in der Hand hält, so nimmt er in seiner Behandlung des Stosses den Schiffer und einen Mann am Ufer in Anspruch. Nach der besondern Voraussetzung soll der letztere sogar die Hände des ersteren ergreifen können, damit die Ruhe oder veränderte Bewegung, die vom Standpunkt des Ufers statthat, vollkommen anschaulich werde. Wir sehen von dieser Handgreiflichkeit der Erläuterungen ab, die für eine erste Darstellung ihren guten Sinn hatte, heute aber, wo man in den fraglichen Abstractionen sich vollkommen heimisch bewegt, nur der Schärfe und Allgemeinheit des Gedankenausdrucks durch gleichgültiges Nebenwerk Eintrag thut.

Der Kern der Huyghensschen Methode lässt sich für den Zusammenstoss gleicher Körper in eine leicht verständliche Regel fassen. Zunächst wird von dem Axiom ausgegangen, dass gleiche Körper, die mit gleichen Geschwindigkeiten centrisch gegeneinander laufen, in derselben symmetrischen Weise auch wieder von einander abprallen, so dass also die Geschwindigkeiten des Zurücklaufens dieselben bleiben. Hat nun das Schiff eine Bewegung, welche die Geschwindigkeit des einen Körpers völlig aufhebt, so dass derselbe vom Standpunkt des Ufers aus ruht, so hat der andere zugleich vom Standpunkt des Ufers um ebensoviel Bewegung mehr. Es liegt mithin der Fall vor, dass der eine Körper ruht, während der andere mit einer gewissen Geschwindigkeit gegen ihn anläuft. Wie die Voraussetzung, so muss nun auch die axiomatische Folgerung für den Standpunkt des Ufers umgewandelt werden. Jeder der beiden Körper entfernt sich auf dem Schiff von der Stelle des Zusammentreffens mit gleicher Geschwindigkeit. Diese Geschwindigkeit ist dieselbe wie vorher; aber die Bewegung findet im grade entgegengesetzten Sinne statt. Auf diese Weise wird vom Standpunkt des Ufers aus die Bewegung desjenigen Körpers durch die Bewegung des Schiffs aufgehoben, der vorher, als er sich in der entgegengesetzten Richtung bewegte, den Zuwachs erhalten musste, und auf der andern Seite wird derjenige Körper seine eigne Bewegung zu derjenigen des Schiffs addiren, der vor dem Stoss die aufhebende Einwirkung übte oder, wenn man will, erfuhr. Vom Standpunkt des Ufers wird also aus dem Axiom der bekannte Satz, dass der an

einen ruhenden anlaufende gleiche Körper seine Bewegung auf den ersteren überträgt und nach dem Stoss selbst in Ruhe verbleibt. Allerdings hatte Huyghens noch ausdrücklich postulirt, dass der Stoss zweier Körper derselbe bleibe, auch wenn beide Körper an einer gemeinsamen Bewegung theilnehmen[1]). Hiemit wollte er jedoch nur sagen, wie das gegenseitige Verhalten von einer gemeinsamen, gleichsam äusserlichen und als etwas Drittes zu betrachtenden Affection unabhängig sei. Er wollte sich den Einwendungen entziehen, die man sonst grade vom Standpunkt seiner Methode hätte erheben können.

Eine weitere Bearbeitung des erwähnten Axioms ergiebt den allgemeinen Fall für den Stoss gleicher Körper, die mit beliebigen ungleichen Geschwindigkeiten einander an der Bewegung in centraler Richtung hindern. Mögen sie im entgegengesetzten Sinne gegen einander laufen oder der eine den andern einholen; — alle diese Gestaltungen lassen sich vom Standpunkt des Ufers dadurch hervorbringen, dass man dem Schiff eine passende Geschwindigkeit ertheilt. Die letztere addirt sich und subtrahirt sich, oder verbindet sich, wenn man von vornherein beide Geschwindigkeiten auf irgend einen gemeinsamen Ausgangspunkt ihrer Richtung bezieht, unter Rücksicht auf Positivität und Negativität mit jenen ursprünglichen Geschwindigkeiten zu zwei algebraischen Summen. Zieht man nun eine solche algebraische Summe für jeden Körper auch in Rücksicht auf seinen durch das Axiom gegebenen Zustand nach dem Stoss, so erhält man auch die zugehörige Erscheinung vom Standpunkt des Ufers, oder im Allgemeinen die Thatsache, dass die gleichen Körper ihre Geschwindigkeiten austauschen. Man kann diese Beziehung auch mit Huyghens sehr kurz dadurch veranschaulichen, dass man von ungleichen Geschwindigkeiten am Ufer ausgeht, und deren Differenz durch eine entsprechende Geschwindigkeit des Schiffs ausgleichen lässt. Indessen tritt der Sinn der Methode deutlicher hervor, wenn man in allen Fällen das Axiom als den wahren Ausgangspunkt bemerklich macht und hiemit zugleich zeigt, dass jeder der gewonnenen Sätze nur auf einer Verwandlung jenes Grundsatzes beruht.

Zur Behandlung der ungleichen Körper bedarf Huyghens noch der Einführung einer weiteren, nicht zu beweisenden An-

---

[1]) A. a. O. dritte Voraussetzung.

nahme[1]), dass nämlich der grössere dem kleineren ruhenden Körper von seiner Bewegung mittheile.

Aus den dann gewonnenen Ergebnissen müssen folgende besonders hervorgehoben werden. Im vierten Satz der angeführten Abhandlung wird die Gleichheit der relativen Geschwindigkeiten, die abgesehen von dem Richtungssinne vor und nach dem Stoss statthat, ausdrücklich formulirt. Besonders wird auch noch hervorgehoben, wie die Bewegungsgrössen vor und nach dem Stoss nicht zusammenfallen. In Proposition XI findet sich die berühmte Wahrheit ausgesprochen, dass die Summen der Producte der Massen mit den Quadraten der zugehörigen Geschwindigkeiten vor und nach dem Stoss gleich sind. Da man solche Producte seit Leibniz lebendige Kräfte zu nennen anfing, und da man noch heute von der lebendigen Kraft keine andere als diese analytische, in der Formel enthaltene Definition zu geben pflegt, so darf man behaupten, dass die Huyghenssche Ausdrucksweise genau den Satz enthält, den wir gewöhnlich als denjenigen der Erhaltung der lebendigen Kräfte bei dem völlig elastischen Stoss bezeichnen. Obwohl Huyghens nirgend von völliger Elasticität spricht, so bezeugt doch sein Axiom von dem gegenseitigen Zurückprallen der gleichen und mit gleichen Geschwindigkeiten gegeneinander anlaufenden Körper, welche Eigenschaft er stets vorausgesetzt wissen wollte. Ob sich diese Eigenschaft in der Natur rein oder nur annäherungsweise vorfinde, thut nichts zu der Richtigkeit der Folgerungen. Derartige Folgerungen wollen eben nur in Anwendung auf Erfahrungsfälle gelten, wenn die Voraussetzungen, von denen sie ausgehen, in der Wirklichkeit gegeben sind. Können aber die Voraussetzungen des Falles nur annäherungsweise oder gar nur in einem gewissen quantitativen Maass gegeben werden, so gelten unter diesen modificirten Voraussetzungen auch die deductiv festgestellten Consequenzen ebenfalls nur annäherungsweise oder in dem entsprechenden Maass oder in einer Art von Mischung mit den Wirkungen der veränderten Eigenschaften des Falles. Nur wenn man diese Geltungsart allgemeiner Gesetze im Auge behält, wird man einerseits weder der Strenge und Sicherheit der aus den reinen, ungemischten Voraussetzungen gezogenen Folgerungen, noch andererseits den Ansprüchen einer erfahrungsgemässen Behandlung der

---

[1]) A. a. O. vierte Voraussetzung.

complicirten Naturvorgänge zu nahe treten. Diese Bemerkung war grade bei Gelegenheit der Theorie des Stosses fast unumgänglich, da sonst der Schein entstehen konnte, als wenn die Mechanik in diesem Fall unfähig wäre, völlig strenge Sätze aufzustellen.

72. Es ist wichtig, darauf zu achten, dass Huyghens alle seine Hauptsätze bereits Anfangs 1669 der englischen Gesellschaft einreichte; denn später lässt sich bei den verschiedenen Bearbeitungen, welche die Stossgesetze erfuhren, kaum mehr zwischen dem unterscheiden, was den ersten Urhebern angehört, und dem, was, wenn auch in veränderter Form, nur als eine Reproduction oder Mischung der älteren Auffassungsarten anzusehen ist. In dieser Hinsicht können sogar die eignen Abhandlungen Derjenigen, die zuerst die Gesetze des Stosses mittheilten, nicht ohne Weiteres als ihr rein persönliches Werk gelten, da diese ausführlicheren Behandlungen der Sache erst weit später erschienen. So hat z. B. auch Wallis später den elastischen Stoss ausführlich dargestellt; aber nachdem einmal die Regeln desselben durch Wren und in der vollkommensten Weise durch Huyghens bekannt geworden waren, konnte es sich nur noch um die grössere oder geringere Zweckmässigkeit der Beweismethoden handeln. Die Schwierigkeit lag hier aber weniger in der Frage nach der Combination der Kräfte, als in den Vorstellungsarten, die man sich von der Mittheilung der Bewegung und besonders von den elementaren Antrieben zu bilden hatte. Nun nimmt man aber gewöhnlich an, dass die Gesetze der Mittheilung der Bewegung erst in Johann Bernoullis Preisabhandlung über diesen Gegenstand (1723) einer tieferen Untersuchung unterworfen worden wären. Wie man aber auch das Verhältniss dieser Arbeit zu dem Früheren betrachten möge, man wird in jedem Fall zugestehen müssen, dass die Rücksichtnahme auf die kleinen Theilvorgänge, aus denen sich der Stoss wie jede Mittheilung der Bewegung zusammensetzt, erst recht eigentlich herrschend werden konnte, als sich die fluxionistischen und differentiellen Methoden Eingang verschafften. Die Erhebung eines Streits darüber, wer zuerst den Stoss in seinen Elementarvorgängen betrachtet habe, hat insofern kein Interesse mehr, als sie eigentlich schon durch die Hinweisung auf Galileis Vorstellungsart erledigt ist. Wie der Begründer der Dynamik so vieles Andere vorwegnahm, was erst in der Sprache der infinitesimalen Analysis ein bequemes Organ fand,

so hat er, wie wir gesehen haben, auch schon den Stoss als eine in unbegrenzter Anzahl denkbare Häufung von Antrieben aufzufassen gelehrt. Wo man daher auf eine solche oder ähnliche Vorstellungsart trifft, ist sie nicht als völlig neu anzusehen.

Durch die Bemerkungen von Huyghens war ausser der Gleichheit der relativen Bewegung vor und nach dem Stoss auch noch die Gleichheit der Bewegung des Schwerpunkts hervorgehoben worden. Dieser Satz sowie derjenige, durch welchen die Cartesischen Vorstellungen von der Erhaltung der Bewegungsgrösse berichtigt wurden, müssen als die Ausgangspunkte zu ganz allgemeinen Wahrheiten gelten. Ganz besonders wichtig war es nämlich, dass Huyghens sich nicht darauf beschränkte, zu bemerken, dass die Bewegungsgrössen nicht gleich bleiben, sondern dass er auch noch den positiven Satz hinzufügte, dass die algebraische Summe der Bewegungsgrössen allerdings nicht verändert werde. Diese wichtige Wahrheit offenbart den Mangel der Cartesischen Idee in seinem ganzen Umfang. Die Bewegungsgrösse ist wie [die Kraft, deren Repräsentant sie nach jener Idee sein soll, niemals in Abstraction von einer Richtung denkbar. Sie hat ohne Richtung ebensowenig einen realen Sinn, als irgend ein Zug oder Druck ihn haben kann, wenn man bei ihm von dem Vorhandensein eines Sinnes, in welchem er wirkt, gänzlich absehen will. Nun kann man allerdings eine jede Grösse absolut nehmen; aber die Frage ist die, ob sie in der Natur auf solche Weise vorhanden sei. Dies ist nun bei keiner Kraft der Fall, welche in Beziehung auf irgend eine andere wirksam gedacht wird. Eine einseitige und absolut freie Kraftwirkung, die nicht zu einer Gegenkraft in Beziehung stände, giebt es aber nur insoweit, als man etwa die blosse Beharrung der nämlichen Geschwindigkeit für sich ins Auge fasst. Für alle Kräftecombinationen kommt mithin das Richtungsverhältniss nicht nur als wesentliches Element in Betracht, sondern es ist sogar derjenige Umstand, durch den allein die eigentliche Kraftwirkung denkbar wird.

Diese letztere Ueberlegung lässt zugleich bemerken, wie der ebenfalls Huyghens zu verdankende Satz von der Gleichheit der lebendigen Kräfte vor und nach dem Stoss, sowie überhaupt die weitere Verallgemeinerung, welche dieser Satz in Verbindung mit dem gleichartigen bei dem Problem des Schwingungsmittelpunkts angewendeten Princip später erfuhr, in einer interessanten Unabhängigkeit von den Vorzeichen der Geschwindigkeiten stehen

müsse. Was der analytische Ausdruck d. h. der Umstand, dass es die Quadrate der Geschwindigkeiten sind, die in Frage kommen, sofort erkennen lässt, ist nicht ohne Weiteres klar, sobald man den Sachverhalt auf einem andern Wege feststellen will. Negative Geschwindigkeiten können im Quadrat stets nur positive oder vielmehr absolute lebendige Kräfte liefern. Dies ist die analytische Nothwendigkeit. Wenn nun alle Kräfte in ihren Wirkungen in dieser Weise repräsentirt sind, so kann der Gegensatz des Sinnes in den Geschwindigkeiten nirgend jene Repräsentationen berühren. Hieraus scheint unmittelbar zu folgen, dass in Rücksicht auf die lebendigen Kräfte ein Gesetz der Erhaltung platzgreifen kann, wo für die sich statisch verhaltenden Geschwindigkeiten dies nicht der Fall ist. In der That handelt es sich auch nur dann um jene quadratischen Grössen, wenn die so zu sagen freie, über den statisch aufgehobenen Theil hinausgehende Kraftwirkung in Betracht gezogen wird. Insoweit aber eine solche Art von Wirkung vorhanden ist, hat der gegensätzliche Theil einer widerstehenden Kraft bereits irgendwie eine statische Aufhebung und gleichsam Bindung erfahren, so dass es bei dem jedesmaligen Widerstreit der Kraftelemente immer nur der für jeden Augenblick gleichsam frei gewordene Ueberschuss ist, welcher einen eigentlichen Bewegungseffect hervorbringt. Soweit die Kräfte in einem strengen Zeitpunkt genau gleich sind, kann keine Bewegung entstehen. Alle Bewegung ist also nur insofern vorhanden, als in irgend einem Maass das statische Verhalten und mit ihm die Wesentlichkeit des innerhalb der Combination vorhandenen Gegensatzes des Sinnes aufgehoben ist. Indessen können diese Ueberlegungen, die nur zum Theil den Cartesischen Irrthum angehen, erst mit der späteren Untersuchung des völlig verallgemeinerten Princips der Erhaltung der Kraft ihre volle Rechtfertigung finden.

Was sich durch die Stossgesetze, namentlich aber auch durch die Wallisschen Positionen über den unelastischen Stoss, in Rücksicht auf das Cartesische Princip herausgestellt hat, lässt sich kurz und allgemein dadurch ausdrücken, dass man sagt, es sei klar geworden, wie das Verhalten der Kräfte statisch werden und so ein Theil der Bewegungsgrösse nicht nur verschwinden könne, sondern auch müsse. Sie verschwindet nämlich in der Form der actuellen d. h. wirklich vorhandenen Bewegung, während sie als eventuell zur Bewegung führende Kraft auch in

der statischen Bindung fortbesteht. In dieser Beziehung hatte also die allgemeine Grundidee Recht; nur war sie einerseits unbestimmt und andererseits fehlerhaft angewendet worden. Erst die modernsten Gedanken haben es möglich gemacht, hier die wahrhaft historische Kritik zu üben und zu zeigen, wo die haltbaren Bestandtheile jener allgemeinen Vorstellung von der Erhaltung derselben Kraftsumme zu suchen sind. Manches, was eine frühere Generation an ihnen noch mit Gleichgültigkeit betrachtete, ist gegenwärtig für uns ein Gegenstand von dem höchsten Interesse.

Im Allgemeinen erscheint die Auffindung der Gesetze des Stosses als eine Angelegenheit, in welcher das Nachdenken eine entscheidendere Rolle gespielt hat, als die Erfahrung. Allerdings hatte schon Mersenne eine Art roher Versuche angestellt, indem er Körper auf eine Waage fallen liess. Ebenso sind bei den definitiven Feststellungen der Stossgesetze Experimente, wie man zum Theil positiv weiss, wohl nirgend ganz verschmäht worden. Allein das Verhältniss, in welchem die geringe Ausdehnung der Versuche zu der mathematischen Tragweite der Theorie steht, lässt nicht verkennen, dass man bereits gelernt hatte, das rein rationelle Element der Mechanik zu würdigen. Die ausführlichere Darstellung bei Huyghens ist auch darin besonders gelungen, dass sie durch die Hervorhebung des Axioms von dem gegenseitigen Abprallen eine Art Grundphänomen und im Gegensatz zu demselben die rein rationelle Ableitbarkeit der übrigen Vorgänge sichtbar macht. Man würde indessen wohl noch zu weit gehen, wenn man jenes Axiom als einfache Erfahrungsthatsache gleich jeder andern ansehen wollte. Die Symmetrie der Verhältnisse, die in ihm gewahrt ist, deutet darauf hin, dass zugleich auch ein Element reiner Gedankennothwendigkeit bei der Vorstellung desselben mitwirken sollte.

Umfangreiche und systematische Versuche über den Stoss sind von Mariotte angestellt worden und finden sich in einer an der Spitze des ersten Bandes seiner Werke stehenden, umfassenden Abhandlung dargestellt[1]). Doch haben sie nicht sowohl für die Fortschritte der fundamentalen Theorie als vielmehr für die speciellen Anwendungen und die Experimentalkunst hervorragende Bedeutung.

---

[1]) Mariotte, Oeuvres, Leiden 1717, unter der Ueberschrift: Traité de la percussion etc.

Viertes Capitel.

Die Gravitationsmechanik Newtons.

73. Wie wir schon bei der Angabe des allgemeinen Entwicklungsganges (Nr. 52) bemerkt haben, kann die Bedeutsamkeit eines neuen Anwendungsgebiets nicht an sich selbst eine principielle Aenderung vertreten, und man hat sich daher zu hüten, die kosmische Grösse des Gegenstandes mit dem Gewicht der wirklich neuen Elemente des mechanischen Wissens zu verwechseln. Die Leistungen Newtons in unserm Gebiet sind allzu häufig nur unter dem Eindruck der Anwendungen der Mechanik auf das Planetensystem gewürdigt und so namentlich von den Engländern relativ überschätzt worden. Hiedurch hat man nicht nur an Galilei und Huyghens ein Unrecht begangen, sondern sich auch überhaupt jener vulgären Beurtheilungsart überlassen, die statt der Erwägung der principiellen Fortschritte die vollendete Thatsache einer grossartigen Anwendung und das Staunen über die Riesendimensionen und über die in ihrer Unmotivirtheit überraschenden Aufschlüsse zum Maass der Werthschätzung macht. Nun ist es aber für uns schon der Gegenstand unserer Nachforschungen selbst, der uns einen andern Ausgangspunkt nahelegt. Wir haben die allgemeinen Principien und die principiellen Bereicherungen der Mechanik zu untersuchen. Aus diesem Gesichtspunkt gehen uns die Erfolge der planetarischen Mechanik nur insofern an, als sie wirklich auf neuen grundsätzlichen Einsichten oder auf entscheidenden Wendungen in der Handhabung des ältern Wissensstoffes beruhen. Hiebei werden die Erkenntnisse an sich selbst gewogen, und es macht keinen Unterschied, ob die Pendeluhr oder das Sonnensystem den Gegenstand bildet. Im Gegentheil kann ein Princip, welches, wie im Fall des Huyghensschen Oscillationscentrums, bei der Untersuchung des zusammengesetzten Pendels festgestellt wird, für den Fortschritt der Mechanik eine grössere Bedeutung haben, als der Inbegriff derjenigen Grundsätze, die für die Mechanik des Himmels noch als specifische Eigenthümlichkeiten in die Wissenschaft eingeführt werden mussten.

Newton selbst hatte die Anwendung seiner mechanischen Erkenntnisse auf das Weltsystem als etwas Besonderes aufgefasst

und sogar in seinem Hauptwerk die gesonderte, weit abstractere Darstellung einer die Attraction einschliessenden allgemeinen Bewegungslehre zum vornehmlichen Gegenstand gemacht. Er hat die Anwendung der Attractionsmechanik auf das Sonnensystem derartig am Ende seiner Arbeit dargestellt, dass die Rangbeziehung zwischen den rein mechanischen Einsichten und der speciellen Bethätigung derselben deutlich genug hervortritt.

74. Es sind drei Hauptpunkte, die wir für unsern Zweck im Newtonschen Gedankenkreise ins Auge zu fassen haben, nämlich die Gravitationsidee, die mechanische Constitution und Erklärung der krummlinigen Bewegungen und die Formulirung einiger einfacher Fundamentalprincipien und Begriffe des dynamischen Verhaltens. Wir werden sehen, dass in dieser letzten Beziehung zwar viel neue Formulirungen älterer Grundgesetze, dagegen wenig entscheidende Fortschritte vorhanden sind. Sieht man daher auf den rein mechanischen Gehalt, so steht die Theorie der krummlinigen Bewegungen, welche durch die Verbindung einer centripetalen Kraft mit irgend einer tangentialen Beharrungsgeschwindigkeit entstehen, unzweifelhaft im Vordergrunde, und es tritt zu derselben die specielle Vorstellung von der quadratischen Abnahme der Gravitation sowie die Feststellung der Einerleiheit der letztern mit der auf der Erde wahrnehmbaren Schwere nur als eine physikalische Thatsache, wenn auch als eine Thatsache von eigentlich universaler Tragweite hinzu.

Hienach können wir, um sofort an die Stetigkeit der geschichtlichen Gedankenentwicklung zu erinnern, zwei Stämme der Wissensüberlieferung unterscheiden, auf welchen die Newtonschen Ideen erwachsen sind. Der eine wird von der eigentlichen Astronomie repräsentirt, und es ist der Deutsche Kepler, der die thatsächlichen Feststellungen soweit gefördert hatte, dass die Zergliederung derselben nach mechanischen Principien die Gravitationslehre liefern musste. Der andere Stamm stellt die eigentliche Mechanik dar, und hier ist es ausser der entscheidenden Grundlegung Galileis zunächst die Huyghenssche Theorie der Centralbewegung gewesen, woran Newton seine Erklärung der mechanischen Entstehungsursachen krummliniger Bewegungen knüpfen konnte. Der Gedanke der Combination einer Beharrungsgeschwindigkeit mit dem freien Fall war aber schon in der Galileischen Wurfparabel vorgebildet gewesen, und es kam nun nur darauf an, die Idee einer solchen Verbindung nach Maassgabe der neuen Vor-

stellung von dem centralen Gravitiren mathematisch durchzuführen und so zu der Nothwendigkeit der Kegelschnittbahnen und speciell zu den innern Gründen der thatsächlich schon feststehenden elliptischen Bewegung zu gelangen. Ausser den mechanischen Hauptaufgaben selbst ist bei Newton als ein hochwichtiger Punkt jene berühmte Gestaltungsform des mathematischen Denkens in Anschlag zu bringen, die unter dem Namen der Fluxionsmethode als eine entscheidende Grundlegung der später für die Mechanik mehr und mehr dienstbaren höhern Analysis dasteht. Sie ist um so bedeutsamer, als sie nicht blos ein äusserliches Hülfsmittel für verschiedene reale Aufgaben repräsentirt, in welchen überhaupt stetige Grössenveränderungen in Betracht kommen, — sondern sich bei Newton selbst im engsten Anschluss an die Bedürfnisse des mechanischen Denkens und dessen Vorstellungsformen entwickelt hat. Die Veränderung der Grössen wird nämlich in diesem Calcül von vornherein als ein Erzeugniss der Bewegung gedacht, und die Verschiedenheiten des Wachsthums werden als Geschwindigkeiten vorgestellt. Durch diesen intimen Anschluss des Hülfsmittels an seinen nächsten Hauptzweck unterscheidet sich die Newtonsche Conception von der abstracteren Auffassung, welche in den Leibnizschen Lineamenten des differentiellen Algorithmus vertreten ist und den Ausgangspunkt für die festländische Entwicklung des reinen Calcüls gebildet hat. Jedoch ist für die Newtonsche Mechanik selbst nicht zu übersehen, dass es sich bei der Anwendung des neuen mathematischen Hülfsmittels nicht blos um die Theorie der krummlinigen Bewegung, sondern um jene verwickelteren Aufgaben gehandelt hat, welche sich um die Fragen nach der Bewegung in widerstehenden Mitteln gruppiren und erst im zweiten Buch des Newtonschen Hauptwerks auftreten. In diesen Problemen ist die mathematische Zurüstung das Ueberwiegende, und es tritt der Gehalt an neuen materiellen Principien mehr zurück. Aus diesem Grunde haben wir uns für unsern Zweck in dieser Richtung auch nur weniger einzulassen. Dagegen wird es nöthig sein, die allgemeinen Beziehungen der mathematisch analytischen Vorstellungsarten zu den mechanischen Fundamentalvorgängen nicht blos im Hinblick auf die Newtonsche Fluxionenmethode, sondern später für die Ausbildung der auch in der äussern Form rein analytischen Gestaltungen der Mechanik eingehend zu untersuchen.

75. Isaak Newton (1642—1727) gelangte erst in reiferem Alter, etwa 1684, zur definitiven Feststellung seiner schon früh, vielleicht schon 1665 im Keime vorhanden gewesenen Vorstellungen über die Gravitation. Sein Hauptwerk, die „Mathematischen Principien der Naturphilosophie" (Philosophiae naturalis principia mathematica), arbeitete er in den Jahren 1685 und 1686. Es erschien auf Kosten Halleys 1687 und erfuhr zu Lebzeiten des Verfassers noch zwei Ausgaben, deren Veränderungen jedoch wenig ins Gewicht fallen. Diesem Werk war ein kleiner Aufsatz über die Bewegung für die englische Gesellschaft der Wissenschaften zur Constatirung der neuen Einsichten vorangegangen, und auch das Hauptwerk selbst hätte sehr wohl als ein Tractat über die Bewegung der Körper bezeichnet werden können. Drei Viertel seines Inhalts fallen ohnedies unter diese Rubrik, indem das erste Buch ebenso wie das zweite „über die Bewegung der Körper" überschrieben ist und erst das dritte den besondern Titel „vom Weltsystem" erhält. Da das letztere nach der Anlage des ganzen Werks und auch seinem geringen Umfang nach als eine Art Anhang betrachtet werden kann, der sich mit einer speciellen Anwendung der abstracteren Theorien beschäftigt, so erscheint der Stamm der Gesammtarbeit als eine Lehre von der Bewegung der Körper oder, mit andern Worten, als eine rationelle Mechanik, die ausser dem Neuen, was sie bietet, auch die wesentlichen Principien der früheren Errungenschaften zur Darstellung bringt. Sie beginnt mit einer Einleitung zur Feststellung der Definitionen der mechanischen Grundbegriffe und zur Erörterung der allgemeinsten Bewegungsgesetze. Diese principiellen Präliminarien, welche dem ersten Buch vorangehen, sind für uns von nicht geringer Wichtigkeit, indem sie nicht nur neue Formulirungen bieten, sondern auch zeigen, wie sich die alten Ueberlieferungen in der Newtonschen Denkweise gestalteten. Doch werden wir uns nicht an den äusserlichen Gang der Newtonschen Darstellung binden, sondern das eigentlich Principielle da aufnehmen, wo wir es, gleichviel ob abgesondert und ausgeworfen oder nicht, in irgend welcher Form antreffen. Indem wir daher unserer Disposition in der vorigen Nummer folgen, werden wir die Oerter der Behandlung der entscheidenden Lehren ohne Rücksicht auf die Newtonsche Anordnung und Abfolge nach Bedürfniss angeben. Der genetische Zusammenhang wird hiebei unser hauptsächlichstes Augenmerk bilden müssen. Wir beginnen deswegen mit der Gravitationsidee und

den verschiedenen Graden von Allgemeinheit oder Specialität, deren dieser Gedanke bis zur letzten Individualisirung fähig ist.

76. Die Vorstellung von einer Festhaltung, Heranziehung oder Hinneigung von Himmelskörpern zu einem Mittelpunkt ist etwas so Allgemeines und Naheliegendes, dass sie in ihrer unbestimmten Gestalt unmittelbar mit dem Gedanken des Umlaufs oder Umschwungs selbst gegeben zu sein scheint. Indem man die Bewegungsbahn um ein Centrum denkt, stellt man sich zugleich unwillkürlich vor, dass eben dieses Centrum den maassgebenden Beziehungspunkt für die Wendungen in jedem Theil des Weges bilde, und es ist nur ein sehr geringer, sich fast von selbst ergebender Schritt, auch den Grund, d. h. die reale Ursache und, specieller ausgedrückt, die Kraft als in der Richtung auf den Mittelpunkt thätig vorauszusetzen. Da die Begriffe von Ursachen oder Kräften nichts als die Correlate der Bewegungserscheinungen sind, so enthält der Typus der Bewegung selbst schon die Hinweisung auf Richtung und Ursprung seiner besondern Gestaltung. Die Umlaufsbewegung denken, heisst daher schon so viel, als die Tendenz zum Centrum mitvorstellen. Etwas Anderes als der Gedanke dieser vagen Tendenz ist es aber auch wesentlich nicht, was schon in den ältesten Ideen und in den Speculationen des Alterthums angetroffen werden kann. Von dieser schweifenden und fast noch ganz bedeutungslosen Vorstellungsart bis zur völligen, allseitigen Bestimmtheit der specifisch Newtonschen Gravitationsidee ist aber noch ein weiter Weg und sind mehrere Zwischenstufen zu unterscheiden. Will man also nach den Vorgängern Newtons fragen, so muss man zwischen den verschiedenen Stadien des Attractionsbegriffs sorgfältig unterscheiden. Thut man dies, so erhält man mit den Entwicklungsstufen des Gedankens zugleich die Einsicht in die Stetigkeit der ideellen Geschichte und in die gleichsam eine Stetigkeitsunterbrechung einschliessenden originalen Wendepunkte, durch welche die bestimmte und entscheidendere Physionomie der Wahrheiten herbeigeführt wird.

Nach diesen Ueberlegungen kann man nicht besonders überrascht sein, schon in einem Gespräch über den Mond in Plutarchs Moralia [1]) Aeusserungen zu finden, welche ein wenig an unsere Vorstellungen über die Combination zweier Tendenzen der Mondbewegung streifen und allenfalls als unbestimmte und gelegentlich

---

[1]) De facie quae in orbe lunae apparet, Ausg. Didot, Bd. II, S. 1130.

zufällige Vorwegnahmen der späteren Conceptionen über ein Fallen des Mondes gelten können. Es wird nämlich die Vergleichung mit der Schleuder herbeigezogen und gesagt, dass man sich nicht darüber zu wundern hätte, dass der Mond, der doch durch die Bewegung fortgerissen würde, nicht fiele, sondern im Gegentheil nur dann zur Verwunderung Anlass haben würde, wenn er unbewegt wäre und alsdann nicht gegen die Erde fiele. Aus diesen und ähnlichen Spuren und Berichten über antike Vorstellungen wird man nicht sofort auf bestimmte Einsichten schliessen, wohl aber entnehmen dürfen, dass die Ideen der Alten über die Wirbelbewegungen, seitlichen Ablenkungen u. dgl. nicht so unmotivirt und unrationell gewesen sein können, als man heute noch vorauszusetzen geneigt ist. Jene antiken Ideen haben ihre zugleich psychologische und objective Ursache gehabt, wie die modernen Conceptionen, und sie haben daher nicht umhin gekonnt, den Phänomenen und Erkenntnissantrieben in irgend einem Maasse zu entsprechen. Da der Gedanke der Anziehung ein fast unwillkürliches Zubehör der Vorstellung von einer Umlaufsbewegung ist, und da sogar ein sehr natürlicher Anthropomorphismus dazu führen kann, den Naturvorgang als ein selbständiges, aber von einem Thätigkeitscentrum aus gehemmtes Bestreben der translatorischen Fortbewegung zu denken, so haben wir noch weit weniger Ursache, die Erheblichkeit der antiken Meinungen zu überschätzen. Vom Standpunkt der uns heute geläufigen Begriffe nehmen sich die vereinzelten Stellen leicht bestimmter aus, als sie ursprünglich gemeint sein konnten, und wir werden mithin einfürallemal am besten thun, derartige Ansätze zu Analogien unseres modernen Wissens als zunächst ohne weitere Wirkung bleibende Regungen des natürlichen, aber vagen Denkens auf sich beruhen zu lassen.

77. Der Begriff von einem Herabkommen auf die Erde oder überhaupt derjenige von der Annäherung an ein Centrum kann noch sehr weit davon entfernt sein, mit der bestimmteren Idee des eigentlichen Fallens zusammenzutreffen. Was das Fallen auf der Erde sei und was so zu sagen die Fallkraft hier zu bedeuten habe, war in dem Gedankenkreis eines Galilei schon in einer ganz andern Weise festgestellt, als in den schweifenden Vorstellungen der vorangehenden Zeiten und des Alterthums. Die Vergleichung kosmischer Bewegungen mit dem Fallen konnte erst einen strengeren Sinn erhalten, wenn die Erscheinung, mit der man das Unbekannte

verglich, selbst tiefer erkannt und in ihrer Wirkungsform untersucht war. Hienach begreift sich, dass erst diejenigen Attractionsvorstellungen den Sinn einer eigentlichen Gravitation haben konnten, die den Galileischen Errungenschaften nachfolgten. Als Beispiel für eine frühere, noch sehr unvollständige Vorstellung von den Functionen der Schwerkraft kann die Idee des grossen Begründers der neuern Astronomie dienen. Copernicus stellte sich vor, dass die Schwere in einem Bestreben (appetentia) nach dem Centrum bestehe, wodurch die Massen ihre kugelige Gestalt erhielten, und dass die Existenz dieser Gestaltungsart ein Zeugniss für die allgemeine Verbreitung einer solchen Art von Schwere sei. Er sagt[1]) wörtlich: „Ich bin der Ansicht, dass die Schwere nichts Anderes sei, als eine Art den Theilen beigegebenes . . . . natürliches Bestreben (appetentiam quandam naturalem partibus inditam), sich zu einem einheitlichen Ganzen in Kugelgestalt zu formiren; und es ist zu glauben, dass diese Affection auch der Sonne, dem Monde und den übrigen Planeten zukomme, und dieselben hiedurch in ihrer runden Gestalt verbleiben."

Was Kepler anbetrifft, der grade diejenigen astronomischen Thatsachen feststellte, welche eine eigentliche Gravitationstheorie möglich gemacht haben, so hatte er von einer kosmischen Schwere schon sehr bestimmte Vorstellungen. Berühmt ist seine Ansicht, dass bei einer gegenseitigen Annäherung des Mondes und der Erde der erstere $^{53}/_{54}$ des Weges zurücklegen werde, während sich die Erde ihrer grösseren Masse wegen nur um den verhältnissmässig kleinen Rest gegen den Mond hin bewegen würde[2]). Da jedoch Kepler in seinen umfassenden speculativen Versuchsvorstellungen die Ursache des Umschwungs selbst erklären und auf die Sonne als Thätigkeitsmittelpunkt zurückführen wollte, so verfiel er nebenbei auch in magnetische Abstossungsideen, welche die zutreffenderen Gedanken wieder verdarben[3]). Die Verschiedenheiten in den Umlaufsgeschwindigkeiten der Planeten wurden von ihm als Wirkungen der verschiedenen Grössen der Massenträgheit aufgefasst, die von der in der rotirenden Sonne entspringenden Umschwungskraft zu überwinden wären.

---

[1]) Astronomia instaurata, Buch I, Cap. 9.

[2]) Astronomia nova seu de motu stellae Martis, introductio. Ausg. der Keplerschen Werke von Frisch, 8 Bde. Frankf. 1858—71, Bd. III, S. 151.

[3]) Ibid. cap. 33—34, S. 300 fg.

Weit wichtiger als die mannichfaltigen Vorstellungen, in denen sich Kepler versuchte, ist für uns der Umstand, dass ihn seine schliesslichen glänzenden Ergebnisse weder zur Festhaltung einer ungemischten Vorstellung von der allgemeinen Schwere noch zur dauernden Annahme der quadratischen Verringerung einer solchen Centralkraft befähigt haben. Er, der 1619 in der Harmonia mundi das entscheidende Gesetz [1]) veröffentlicht hatte, nach welchem sich die Quadrate der planetarischen Umlaufszeiten wie die Kuben der grossen Axen, also wie die Entfernungen von der Sonne verhalten, verwarf selbst die quadratische Abnahme, um die einfache Proportionalität mit der Entfernung an deren Stelle zu setzen. Er gelangte nie zu jenem einfachen Schluss, der das fragliche Gesetz selbst sofort in die Formel zu verwandeln erlaubt, dass sich die centripetalen oder, wenn man will, auch centrifugalen Bewegungsbestrebungen umgekehrt wie die Quadrate der Distanzen verhalten, und dass auf diese Weise die Action nach dem Mittelpunkt als mit der Entfernung quadratisch abnehmend zu denken sei. Was hat ihn hieran gehindert? Offenbar nicht der Mangel an Genie, welches er nach der empirischen Seite und in seinen Speculationen, ja selbst in den schweifenderen Imaginationen in vollem Maass bekundet hatte! In Rücksicht auf die persönlichen Eigenschaften wäre daher kein Grund vorhanden gewesen, für die Begründung der Gravitationstheorie erst auf Newton zu warten. Die Ursache des Mangels war objectiv und lag ganz wo anders. Für Kepler waren die Errungenschaften seines ihn überlebenden Zeitgenossen Galilei so gut wie nicht vorhanden, und noch viel weniger stand ihm etwas wie die erst ein Menschenalter nach seinem Tode von Huyghens formulirte Theorie der Centralbewegung zu Gebote. Ohne die letztere liess sich aber das Gesetz der Umlaufszeiten nicht in zweckentsprechender Weise umformen und keine eigentlich mechanische Idee von den gegen das Centrum gerichteten Kraftgrössen gewinnen. Man muss das Quadrat der Geschwindigkeit, dividirt durch den Radius, bereits als Form für das Maass der centralen Kraft besitzen, um aus dem Keplerschen Gesetz über die Quadrate der Umlaufszeiten durch einfache algebraische Operationen eine Formel herzustellen, welche die quadratische Abnahme der Attraction mit der wachsenden Entfernung zum Ausdruck bringt. Mehr als ein halbes Jahr-

[1]) Harmonices mundi liber quintus, cap. 3, in d. angef. Ausg. Bd. V, S. 279.

hundert sollte aber vor der Combination der beiden Gesichtspunkte verstreichen, und es ist diese Hinausschiebung nur dadurch zu erklären, dass demjenigen, der die zulängliche Astronomie und nöthige Kühnheit der nach Gesetzen ausspähenden Speculation besass, die erforderlichen Zergliederungsmittel des mechanischen Denkens noch nicht zur Verfügung standen. Erinnern wir uns der oben (Nr. 74) erwähnten zwei Hauptstämme der Wissensüberlieferung, so können wir sagen, dass die ursprüngliche Isolirung des einen von dem andern, nämlich der eigentlichen Mechanik von den Gesetzen der Astronomie, den verhältnissmässig verspäteten Fortschritt der in ihren Ansätzen bereits bemerkbaren Gravitationsidee verschuldet habe. Wie wenig Kepler selbst in dieser Beziehung mit den erforderlichen elementaren Vorstellungen ausgerüstet war, zeigt sich sehr charakteristisch darin, dass er zwar die Trägheit der Materie im Ruhezustande als etwas auffasst, was der Bewegung einen der Masse proportionalen Widerstand entgegensetze, — dass er aber die Trägheit in der Form der Beharrungsgeschwindigkeit nicht kennt und daher einer stetigen Ursache zu bedürfen glaubt, um das Translatorische im Umschwunge der Planeten zu erklären.

78. Ungefähr um die Zeit, als sich auch Newton in der Richtung auf die Gravitationsidee zu beschäftigen anfing, also ein paar Jahrzehnte zuvor, ehe er mit der vollendeten Theorie hervortreten konnte, zeigten sich bei verschiedenen Autoren sehr deutliche Spuren der Energie, mit welcher die Thatsachen und Gedanken auf die neue Entdeckung hindrängten. Besonders muss in dieser Beziehung A. Borelli genannt werden, der in seiner Arbeit über die Jupiterstrabanten[1]) davon ausgeht, dass die Planeten und Trabanten sich mit der Kugel, die sie umkreisen, vereinigen wollen, und dass die Kreisbewegung das Bestreben (impetum) begründe, sich vom Centrum zu entfernen. Das Gleichgewicht zwischen den beiden Tendenzen wird von ihm als die Ursache der Möglichkeit der Umläufe angesehen.

Weit näher als Borelli kam dem Gravitationssystem ein Landesgenosse Newtons, der gradezu die eigentlich mechanischen Verhältnisse ins Auge fasste und sogar in dieser Richtung experimentirte. Hooke entwickelte seine Gedanken über die Gravitation

[1]) Theoricae Mediceorum planetarum ex causis physicis deductae, Florenz 1666.

in einer besondern Schrift[1]), gelangte jedoch erst später zu der Voraussetzung der quadratischen Abnahme. Nimmt man diese letztere Vorstellung hinzu, so ist ersichtlich, dass für Newton nur noch der Nachweis der thatsächlichen Einerleiheit der Erdschwere und der Attraction übrigblieb. Hookes grosser Vorzug vor allen seinen Vorgängern bestand darin, dass er von vornherein die allgemeinen mechanischen Gesetze als den Schlüssel zum Verständniss der planetarischen Bewegungen ansah. Er unterschied nicht nur die gradlinige Beharrungsgeschwindigkeit, die er wie durch einen ursprünglichen Antrieb einfürallemal entstanden dachte, von dem ablenkenden Attractionsprincip, sondern erwog auch den Einfluss der Grössenverschiedenheit dieser beiden Tendenzen. Er nahm die Nothwendigkeit des Entstehens der elliptischen Bewegung an. Uebrigens sagte er voraus, dass derjenige, welcher genauer auf die Quantitätsverhältnisse eingehen würde, dazu gelangen müsste, die planetarischen Erscheinungen mit der grössten Genauigkeit bestimmen zu können. Das mechanische Problem der kosmischen Gravitation war ihm also vollkommen klar geworden. Auf seinen Streit mit Newton wirft die Beilage eines Briefs des Letztern an Halley vom 20. Juni 1686[2]) viel Licht, und es zeigt sich hiebei auch zugleich, dass die Voraussetzung der quadratischen Abnahme an sich selbst ohne weitere Verfolgung der Consequenzen noch nicht entscheidend sein konnte. Newton selbst beruft sich an dieser Stelle darauf, dass diese Art der Abnahme auch schon weit früher von Bouillaud[3]) vorausgesetzt worden war. Wenn also auch Hooke ziemlich weit gekommen war, so fehlte ausser dem Nachweis der Einerleiheit der Erdschwere und der Attraction auch noch die genauere Vorstellung, welche das Gravitiren jedem Theilchen der Materie als einem solchen beilegt und die Entwicklung der Anziehungsgesetze innerhalb der geballten Massen möglich macht. Ebenso mussten die streng mathematischen Gründe der Entstehung elliptischer Bahnen noch erst entwickelt werden, und hier bot sich für Newton grade das seiner Geistesart angemessenste Feld der Nachforschungen dar.

---

[1]) An attempt to prove the motion of the earth etc. London 1674.

[2]) Abgedruckt bei Brewster, Memoirs of the life of Newton, 2 Bde. London 1855, Bd. I, S. 442 fg.

[3]) Gemeint ist Ism. Bullialdi Astronomia Philolaica. Paris 1645. Lib. I, cap. XII.



79. Wir können uns hier nicht auf die Untersuchung der besondern Umstände einlassen, unter welchen Newton selbst nach und nach dem schliesslichen Resultat näher gekommen ist, und es liegt ausser unserer Aufgabe, die Frage zu entscheiden, inwieweit er den Winken Hookes etwas zu verdanken gehabt habe. Weit wichtiger, als diese Controverse, ist der klar zu Tage liegende Zusammenhang mit den Keplerschen Leistungen. In einem Brief an Halley vom 14. Juli 1686[1]) erklärt Newton selbst, dass er die quadratische Abnahme vor etwa 20 Jahren aus dem Keplerschen Gesetz geschlossen habe. In diesem Punkt war also die Erfahrung nebst der zugehörigen rein inductiven Speculation des deutschen Denkers den Erwägungen der innern Ursachen vorangegangen, und die Art, wie Newton zu seinem Ergebniss gelangte, befand sich im entschiedensten Contrast zu dem Verfahren, durch welches Galilei den Grund zur Dynamik gelegt hatte. Bei dem Italiener war der anticipirende Gedanke der Führer zur Auffindung der thatsächlichen Fallgesetze gewesen; bei dem Engländer musste umgekehrt das bereits als Thatsache festgestellte Gesetz über das Verhältniss der Umlaufszeiten zu den Entfernungen den Leitfaden und zwar den Leitfaden für ein blos zergliederndes Denken abgeben. Das entscheidende Verdienst dieser Zerlegung einer erfahrungsmässig gegebenen Thatsache in ihre constituirenden Elemente oder Partialthatsachen bestand nun bei Newton darin, dass die mechanischen Factoren dabei wirklich sichtbar wurden. Hiezu leistete, wie schon früher angedeutet, der Ausdruck für die Centrifugalkraft, wie ihn Huyghens als dem Quadrat der Geschwindigkeit direct und dem Radius oder Abstande umgekehrt proportional bestimmt hatte, die unentbehrliche Hülfe. Indem das Keplersche Verhältniss der Quadrate der Umlaufszeiten in seiner Gleichheit mit demjenigen der Kuben der (mittleren) Entfernungen dazu benutzt wurde, durch einfache Substitutionen einen Ausdruck für das Verhältniss der Centrifugalkräfte herzustellen, ergab sich das letztere als in Bezug auf die Entfernungen umgekehrt quadratisch. Dies ist die äusserst einfache Erzeugung der Einsicht in die allgemeine Form der Gravitation oder vielmehr Attraction; denn ob die in dieser Weise zwischen den Planeten, den Trabanten und der Sonne wirksame Anziehung oder centripetale Action mit der auf der Erde wahrnehmbaren

[1]) Abgedruckt bei Brewster, Memoirs of the life of Newton, Bd. I, S. 449.

Schwere etwas gemein habe, war durch jenes Gesetz der quadratischen Abnahme noch nicht festgestellt. Diese Abnahme hatte die Gestalt einer Thatsache, deren Allgemeinheit auch vermöge der unmittelbaren Analogie nicht über das Verhalten der kosmischen Körper als ganzer Massen hinausreichte. Um daher das Wesen der Attraction als wirkliche Gravitation zu erkennen, musste eine Brücke geschlagen werden, welche eine Vergleichung der von Galilei erkannten Eigenschaften des freien Falles an der Oberfläche der Erde mit den Eigenschaften der kosmischen Attraction ermöglichte.

Die Herstellung dieser Brücke wird nun als eine Eigenthümlichkeit des Newtonschen Verfahrens gelten müssen, und erst bei diesem Punkt beginnt seine Entdeckung diejenige Gestalt anzunehmen, durch welche sie sich unstreitig von allen vorangegangenen oder gleichzeitig concurrirenden Conceptionen unterscheidet. Es ist bekannt, wie Newton die centripetale Bewegung des Mondes während des Durchlaufens eines Bahntheilchens, also das Fallen desselben, d. h. die Ablenkung von der sonst einzuschlagenden Tangente mit dem derselben Zeit entsprechenden Fallraum an der Oberfläche der Erde unter Voraussetzung der quadratischen Abnahme verglich und so schliesslich die Identität der beiden Phänomene feststellte. Es zeigte sich nämlich, dass sich die beiden Erscheinungen des Fallens in nichts Anderem, als in ihrer besondern Grössengestaltung nach Maassgabe des Gesetzes der quadratischen Abnahme unterschieden. Hiemit war die Einerleiheit der Kraft, welche den Erscheinungen der Erdschwere und der allgemeinen Attraction zu Grunde liegt, so zwingend als nur irgend möglich erwiesen; denn man hatte nunmehr nur zwei quantitativ differenzirte Wirkungen vor sich, die sich unter eine allgemeine Wirkungsform und deren Gesetz subsumiren liessen. Was man sich bei dem Begriff der Kraft und hier speciell der allgemeinen Schwerkraft, allgemeinen Attraction oder Gravitation übrigens noch denken mochte, blieb für die Haupterkenntniss und den Beweis der Einerleiheit des Princips ganz gleichgültig; denn man hatte die besondern Wirkungen unter eine allgemeine Wirkungsform gebracht, und mehr war weder möglich noch nöthig. Aus diesem Grunde braucht auch nur im Vorbeigehen daran erinnert zu werden, dass Newton, der sich thatsächlich das Verhältniss des Gravitirens unter dem Bilde einer eigentlichen Anziehung vorzustellen liebte und deswegen angegriffen wurde,

grundsätzlich eine solche Anschauungsart als unerheblich angesehen und die Begründung der Gravitationslehre als von solchen Ideen über die innere Beschaffenheit der Kraft unabhängig beurtheilt wissen wollte. Hiemit hatte er offenbar Recht; denn was die Ursache der fraglichen Erscheinungsgruppe oder des fraglichen Systems von Vorgängen auch noch sonst für Eigenschaften und Beziehungen haben mochte, so war sie durch ihre Wirkungen nicht nur unzweideutig gekennzeichnet, sondern auch ausschliesslich in diesen Wirkungen der Gegenstand des Wissens. Unsere Generation hat z. B. eine neue Beziehung der Schwere kennen gelernt, durch welche ein intimes Verhältniss zu den Wärmeerscheinungen nahegelegt ist; aber diese Erkenntniss kann trotz ihrer Tragweite nicht den geringsten Einfluss auf die Gültigkeit der einfürallemal festgestellten Principien der Gravitation üben.

Der Newtonsche Nachweis einer identischen Gravitation in den Erscheinungen der gewöhnlichen Schwere und in dem Attrahirtwerden des Mondes hat, wie allbekannt ist, eine längere Reihe von Jahren hindurch eine Hemmung erfahren, indem Newton bei der ersten, schon sehr frühen Anstellung der Rechnung einen unexacten Erdradius zu Grunde legte und erst später nach Maassgabe der Picardschen Gradmessung den Fehler verbesserte. Der ursprüngliche Calcül hatte keinen hinreichend übereinstimmenden Zusammenhang zwischen dem Fallraum der ersten Secunde an der Erdoberfläche und dem Fallen des Mondes ergeben, und Newton hatte sich sogar durch dieses Resultat zu der Idee verleiten lassen, die Gravitation sei nur zum Theil im Spiele und das Uebrige werde auf eine Wirbelbewegung zurückzuführen sein. Diese ursprüngliche Unentschiedenheit der Vorstellungsart zeigt noch besonders deutlich, wie der ganze Nerv des Beweises einer identischen Gravitation in der quantitativen Uebereinstimmung der verschiedenen Wirkungen der als gleichartig oder analog vorausgesetzten Ursachen gelegen habe.

80. Mit dem Vorangehenden haben wir den Punkt erreicht, bei welchem die Gravitationsidee hinreichende Bestimmtheit erlangt hat, um sich zu einer Gravitationsmechanik ausbilden zu können. Wenn jeder beliebig kleine Körper an der Erdoberfläche gravitirte, so war hiemit eigentlich schon die Vorstellung gegeben, dass jedes materielle Theilchen attrahirt wurde, und es war kaum noch ein besonderer Schritt nöthig, es Angesichts der allgemeinen Gegenseitigkeit der Massenanziehung auch als attrahirend zu

denken. Die Planeten zogen die Trabanten an und wurden selbst von der Sonne angezogen. Es lag daher auch ohne Hinblick auf Ebbe und Fluth oder gar auf gegenseitige Störungen sehr nahe, die Attraction mit der Materie überall verknüpft und daher jede Masse als zugleich angezogen und anziehend vorzustellen. Eine Schranke liess sich aber für die Grösse der Körper, bei welcher die allgemeine Schwere noch statthätte, gar nicht ziehen. Es war kein Grund vorhanden, warum, wenn eine Masse gravitirte, nicht auch die Hälfte derselben diese Eigenschaft haben sollte, und hiemit war die Gravitation der Elemente als solcher eine unumgängliche Idee. Hiezu kam noch der allgemeine mechanische Gedanke, demzufolge überall die Masse einen multiplicativen Factor jeder Kraft bildete und daher jede bewegende Kraft als von den Theilchen der Masse getragen angesehen werden musste. Die Untersuchungen über die Resultante der Erdschwere und deren Abweichungen sowie über die Anziehung im Innern der Massen mussten den Gesichtspunkt einer von Element zu Element stattfindenden Gravitation bestätigen. Indem Newton die Consequenzen in dieser Richtung zog, schlug er einen Weg ein, auf welchem sich später die analytische Gravitationsmechanik bis ins Kleinste ausbildete und aus den Störungen die Existenz noch nicht gesehener Planeten erschliessen lehrte.

Nachdem wir auf diese principielle Eröffnung eines neuen Spielraums der Mechanik hingewiesen haben, müssen wir uns nun nach der Theorie der krummlinigen Bewegung umsehen, durch welche Newton die Grundzüge des Verhaltens der neuen Kräftegattung bemeisterte und die Keplerschen Thatsachen aus innern Gründen verständlich machte. Wir werden jedoch in dieser Beziehung kurz sein können, da es sich in der fraglichen Angelegenheit trotz ihrer Tragweite doch für uns nur um die Nachweisung handeln kann, dass unter Voraussetzung der Gravitationsidee die ganze übrige Entwicklung einen rein mathematischen Charakter habe und kein einziges neues Princip der Mechanik erfordere. Streng genommen ist sogar diese ganze Abzweigung der Theorie in ihrer höchsten Abstraction rein phoronomisch, indem eine Massenverschiedenheit zunächst gar nicht in Frage kommt und die Anziehung nichts weiter bedeutet als eine Tendenz zur Annäherung von gegebener Form und Grösse.

Erinnern wir uns, dass Huyghens die gleichförmige Kreis-

bewegung in jedem Punkt als eine centrale Tendenz dargestellt hatte, die dem Quadrat der Geschwindigkeit direct und dem Radius umgekehrt proportional ist. Erinnern wir uns ferner, dass diese Darstellung auch für jede andere ungleichförmige und beliebig krummlinige Bewegung die strengste Gültigkeit behielt, sobald man an die Stelle des Radius den allgemeineren Begriff des Krümmungsradius setzte. Eine krummlinige Bewegung mochte also beschaffen sein wie sie wollte, man hatte im unmittelbarsten Anschluss an die Huyghensschen Ideen einen Ausdruck für die in einem jeden Punkt derselben vorhandene centrale Tendenz nach Richtung der Normale. Insoweit war für Newton nicht mehr viel zu thun übrig, solange die Gravitationsbewegungen im Groben nach den mittleren Entfernungen betrachtet wurden, und es sich mithin nur um die durchschnittliche Messung einer centripetalen Tendenz handelte, die als mit dem Krümmungsradius zusammenfallend betrachtet werden konnte. Bei der relativen Geringfügigkeit der Excentricitäten konnte zunächst, wie z. B. bei dem Mond, in den ersten Ueberlegungen über die Wirkungen der Gravitation so verfahren werden, als wenn es sich um Kreisbahnen handelte. Eine andere Gestalt musste aber das Problem gewinnen, sobald über die allgemeine und durchschnittliche, gleichsam statische Beziehung der punktuellen Gravitationsgrösse hinausgegangen und die Frage beantwortet werden sollte, wie sich bei der für einen Punkt gegebenen tangentialen Beharrungsgeschwindigkeit und bei der ebenfalls gegebenen Anziehung nach einem festen Punkt, der nicht auf der Richtung der Normale zu jener Geschwindigkeit zu liegen brauchte, die Bahn gestalten müsse. Dies ist die Hauptaufgabe, und um sie zu lösen, musste die Anziehungskraft nicht etwa blos in ihrer Grösse für den Punkt, sondern auch in ihrer Form der Abhängigkeit von der Entfernung gegeben sein. Sie musste also als quadratisch abnehmend vorausgesetzt werden, wenn die Curven der freien Gravitationsbewegung und deren Position zum Actionscentrum ermittelt werden sollten. Newton fand, dass eine derartige Bewegung unter allen Umständen ein Kegelschnitt und zwar mit dem Actionscentrum als Brennpunkt sein müsse. Die Grösse der gegebenen tangentialen Geschwindigkeit entscheidet im Verhältniss zur Anziehung darüber, welcher besondere Kegelschnitt entstehen müsse. Auf diese Weise ergiebt sich die Ellipticität der Planetenbahnen als die Folge des Zusammenwirkens einer tangentialen

Beharrungsgeschwindigkeit mit der Anziehung im umgekehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernung. Der abstracte Theil der Newtonschen Bewegungstheorie richtet sich in dieser Beziehung auch noch besonders darauf, nachzuweisen, dass unter andern Bedingungen, also z. B. unter einem anders fingirten Anziehungsgesetz, keine Kegelschnittbahnen entstehen, die das Actionscentrum zum Brennpunkt hätten. Hienach ist die Beziehung reciprokabel; der Kegelschnitt mit dem Kraftmittelpunkt im Brennpunkt ergiebt die quadratische Anziehung als einzig mögliche Voraussetzung seiner gravitationsmässigen Entstehung, und das quadratische Anziehungsgesetz liefert als einzige Möglichkeit seiner Verwirklichung die Kegelschnittsform der Bahnen.

81. Wo, wie bei den Kometen, die Excentricitäten bedeutend sind, wird es besonders sichtbar, dass die Bahn gleichsam eine Falllinie sei, und dass die tangentialen Geschwindigkeiten in jedem Punkt zu einem grossen Theil von einem actuellen Fallen herrühren. Denkt man sich z. B. die seitliche Anfangsgeschwindigkeit verhältnissmässig sehr schwach, so wird der angezogene Körper fast dem Actionscentrum zuzueilen scheinen, d. h. er wird um dasselbe eine langgestreckte Ellipse beschreiben, in welcher ungefähr nach Richtung der grossen Axe das Anwachsen der Geschwindigkeiten, also die Existenz der tangentialen Geschwindigkeiten vorzugsweise auf Rechnung der beschleunigenden Kraft der Anziehung zu setzen ist. Auch wird in einem solchen Fall die schiefe Lage des Radius Vector sich für die Auffassung besonders markiren, und der Unterschied einer tangentialen und einer centripetalen Beschleunigung recht anschaulich hervortreten. Während nämlich in dem Huyghensschen Musterfall der Centrifugalkraft die letztere ganz und gar das repräsentirte, was ausser dem Beharren der Geschwindigkeit als ablenkende Kraft vorhanden war und mithin von einer Tangentialkraft nicht geredet werden konnte, lässt sich in jedem Bewegungstypus, bei welchem der centrale Zug nicht senkrecht auf die Tangente gerichtet ist, die Centralkraft, ohne Null zu werden, auf die Tangente projicirt denken, und so ergiebt sich die bekannte Zerlegung in eine tangentiale und eine centripetale Kraft.

Wir wollen an diese elementaren Begriffe nur erinnert haben, um die Hauptzüge der Newtonschen Theorie krummliniger Bewegungen zu bezeichnen. Diese Theorie ist von ihm derartig abstract in solchen Variationen ausgeführt worden, dass sie weit

mehr als den eigentlichen Zweck, nämlich die Darlegung der mechanischen Verfassung der Gravitationsbewegungen, zu behandeln scheint. Jedoch mussten, wenn man näher zusieht, allerlei benachbarte Möglichkeiten hypothetisch erwogen werden, um die Nothwendigkeit der excentrischen Bewegung in einem Kegelschnitt nachzuweisen. Ein sehr einfaches Beispiel kann uns zeigen, dass die centrisch elliptische Bewegung nicht den Bedingungen der Gravitation zu entsprechen vermag. Man braucht nämlich nur die Huyghenssche gleichförmige Kreisbewegung auf eine nicht parallele Ebene in allen ihren Verhältnissen projicirt zu denken, um die Bewegung in einer Ellipse um deren Mittelpunkt zu erhalten, bei welcher sich nach einigen Ueberlegungen zeigt, dass der centrale Zug im einfachen Verhältniss des Abstandes vom Mittelpunkt zunimmt. Offenbar veranschaulicht es die thatsächlichen Gravitationsverhältnisse, für deren quadratische Form man zunächst keine innern Gründe hat, wenn die Centralbewegung im Allgemeinen und für verschiedene Anziehungsgesetze behandelt wird. Auch gehörte es zu einer abstracten Theorie der krummlinigen Bewegung, die ganz allgemeinen Eigenschaften jeder Centralbewegung, wie z. B. den Satz der den Zeiten proportionalen Flächensectoren, unabhängig von einer besondern Gestaltung darzulegen. Newtons Entwicklung ist in dieser Hinsicht ein Stück allgemeiner Bewegungslehre. Im 3. Buch über das Weltsystem Satz 13 wird die elliptische Bewegung der Planeten und der Keplersche Satz von der Beschreibung der den Zeiten proportionalen Flächenräume ausgesprochen, und dieses ganze planetarische Bewegungsgesetz, welches zunächst als thatsächlich gegeben, d. h. von Kepler inductiv festgestellt auftritt, als „a priori“ aus den mechanischen Principien erweislich gekennzeichnet, indem einfach die Sätze I und XI sowie das Corollar I zu Satz XIII des ersten Buchs in Bezug genommen werden. Diese citirten Sätze fallen in den 2. und 3. Abschnitt, die von der Bestimmung der Centripetalkräfte und von der excentrischen Bewegung in Kegelschnitten handeln. Der erste Satz spricht die Proportionalität der Flächen mit den Zeiten aus; der elfte enthält die Aufgabe, aus der gegebenen excentrischen Bewegung in der Ellipse das Anziehungsgesetz abzuleiten, und das erwähnte Corollar enthält die allgemeine Formulirung der wechselseitigen Zusammengehörigkeit der Kegelschnittbahnen und der quadratischen Anziehung.

In der rein mechanischen Entwicklung dieser Grundformen

und Grundeigenschaften der freien Centralbewegung liegt zugleich eine Analyse der krummlinigen Bewegungen überhaupt, und dies ist die Seite der Theorie, vermöge deren bei Newton auch die Grundlagen oder Ansätze zu Principien zu suchen sind, die in ihrer völligen Allgemeinheit, wie z. B. das Princip der Flächen, erst später die Rolle von dynamischen Grundverhältnissen der gesammten Mechanik spielten. Die Erkenntniss solcher genereller Eigenschaften der Bewegungen von einem bestimmten Typus erhält aber erst ihr volles Interesse im Uebergang zu den höchsten Stufen der Abstraction der analytisch rationellen Mechanik, und wir werden daher erst später auf die Ausgangspunkte bei Newton zurückzugreifen haben. Hier müssen wir eingedenk bleiben, dass der Kernpunkt der neuen Theorie der Attractionsbewegungen in Satz XVII des ersten Buches zu suchen ist, wo die Aufgabe gelöst wird, bei gegebener Anfangsgeschwindigkeit und quadratischer Anziehung die Bahn zu bestimmen. In dieser Erzeugung der Bahncurve aus den punktuellen Elementen zeigt sich, wie wir dies schon oben erörtert haben, der entscheidende Fortschritt, indem das Verfahren der Zerlegung der Keplerschen Thatsachen in ihre mechanischen Bestandtheile einer entsprechenden Umkehrung unterworfen wurde. Heute ist dieser Process für uns nur ein wenig Integriren an ein paar Differentialformeln, während die blosse Zerlegung der vollständigen Thatsachen sogar nur ein blosses Differenziren erfordert. Hieraus ersieht man die Bedeutsamkeit der Umkehrung der Ableitungen. Die gleichsam construirende Genesis der Bahnen entspricht den mechanischen Erzeugungsacten der Natur, und der Weg der Auflösung der vollständigen Thatsachen in die constitutiven Elemente findet sich durch denjenigen der ideellen Hervorbringung dieser Thatsachen aus den Elementen ergänzt.

82. Die Verwandlung der Keplerschen Thatsachen in Attractionsnothwendigkeiten, wie wir sie bisher als Newtonsches System der Gravitationsmechanik vorgeführt haben, hatte sich zunächst noch gar nicht um die Massen zu bekümmern gehabt. Es waren so zu sagen phoronomische Phänomene, die Kepler beobachtet hatte, und die Zurückführung derselben auf eine centrale Annäherungstendenz im umgekehrten Quadrat der Entfernung veränderte die allgemeine Gestalt der Sache nicht. Die excentrische Bewegung in der Ellipse, also das scheinbar einfachste der Keplerschen Gesetze, enthielt die beiden andern, sobald es zum Gegenstand

der Zergliederung gemacht wurde. Die Analyse einer excentrisch elliptischen Bahn ergiebt, wenn die letztere phoronomisch in sich selbst betrachtet und analog wie die Kreisbewegung untersucht wird, alles Uebrige rein geometrisch. Die quadratische Abnahme der centralen Tendenz mit der Entfernung ist hiebei die constitutive Grundeigenschaft des Gebildes, während die Beschreibung gleicher Flächenausschnitte in gleichen Zeiten eine Eigenschaft ist, die es mit jeglicher Centralbewegung theilt. Verbindet man die Betrachtung mehrerer Ellipsen, in denen das bei der einen erkannte Gesetz der quadratischen Abnahme auch für den Zusammenhang der Gruppe d. h. für die Positionen zum gemeinsamen Brennpunkt zu Grunde gelegt wird, so erhält man das Keplersche Gesetz, dass sich die Quadrate der Umlaufszeiten wie die Kuben der grossen Axen verhalten. Hienach ist ersichtlich, dass wir es bis zu diesem Punkt mit einem Stück subtilerer Phoronomie zu thun gehabt haben, in welcher die Bewegung nur an sich selbst, d. h. nur als phänomenale Grösse betrachtet zu werden brauchte, um die wichtigsten Grundgesetze zu liefern. Es begreift sich aber hiemit auch zugleich, warum ein neues, eigentlich mechanisches Princip hier noch gar nicht in Frage kommen konnte, und wie selbst die Gravitationsidee in dieser Hinsicht nur insoweit erforderlich war, als sie den phoronomischen Gedanken einer gewissen Art der Annäherung einschloss.

Den specifisch mechanischen Principien begegnen wir aber sofort, wenn der Uebergang von den Bewegungserscheinungen zu den Massenverhältnissen vollzogen wird. Der Schluss auf die Mengen der Materie, mit welchen die verschiedenen Weltkörper ihre Attraction ausüben, ist derjenige Schritt, bei welchem sich die Gravitationsphoronomie erst in eine eigentliche Gravitationsmechanik verwandelt. Es wird hiebei eine Vorstellung von der Messung der Gravitationskräfte nothwendig, und diese Vorstellung muss zugleich ein Schema für die Kräftemessung überhaupt enthalten. Mit diesen Ueberlegungen sind wir sofort bei den Fundamentalprincipien und Grundbegriffen. Wir lassen den Schluss auf die Massen, in dessen Möglichkeit eine streng principielle Einsicht erst vorbereitet werden muss, vorläufig noch zur Seite, um die Gestaltung der leitenden Axiome bei Newton insoweit durchzugehen, als hierin etwas Eigenthümliches hervortritt.

Wie schon gesagt, geht den drei Büchern des Newtonschen Hauptwerks ein Inbegriff einleitender Präliminarien voran, die

man mit den Prota des Euklides einigermaassen vergleichen könnte. Sie bestehen in Definitionen und Bewegungsaxiomen (axiomata sive leges motus). Jedoch würde man, wie gleich unser erster principieller Fall zeigen wird, fehlgreifen, wenn man sich ausschliesslich an diese Zusammenstellung binden und die Grundbegriffe nicht auch anderwärts aufsuchen wollte. Diejenige von allen Conceptionen, welche den Platz an der Spitze wohl am ehesten in Anspruch nehmen könnte, muss z. B. schon in Lemma X des ersten Buchs aufgesucht werden, welches besagt, dass eine Kraft, auch wenn sie nicht constant ist, im Anfange Räume hervorbringt, die den Zeiten quadratisch proportional sind.

Die Galileische Schwere war eine durchaus constante Kraft gewesen, und mit den Fallgesetzen war überhaupt die allgemeine Wirkungsform einer constanten Kraft festgestellt. Diese Wirkungsform bestand in der Hervorbringung von Räumen, die den Quadraten der Zeiten proportional sind oder, wenn man die Wirkungen in ihren einfachen Elementen betrachtet, in nichts weiter als in der Ertheilung von Geschwindigkeiten nach Verhältniss der Wirkungszeit. Die constante Kraft war also nach der Geschwindigkeit zu messen, die sie in einer beliebigen Zeiteinheit dem Beweglichen ertheilte. Galilei selbst kam noch nicht in den Fall, die Kräfte mit Rücksicht auf die Materie anders als in statischen Beziehungen vergleichen und messen zu müssen. In seiner eignen Dynamik blieben die von den Mengen der Materie herrührenden Verschiedenheiten der Kräftewirkung gleichgültig. Seine Sätze über die Gleichheit der Kraft des Aufsteigens zu der Fallhöhe mit der durch den Fall erlangten Kraftgrösse bezogen sich stets auf denselben Körper von unbestimmter und gleichgültiger Masse. Nur in den statischen Beziehungen an den einfachen Maschinen oder bei den Flüssigkeiten trat der Grundsatz hervor, dass die beiden Factoren der Kraftgrösse die Menge der Materie und die Geschwindigkeit seien. Diese später technisch als Quantität der Bewegung bezeichnete Grösse, die besonders von Cartesius ins Auge gefasst worden war, spielte bis auf Huyghens' Untersuchungen über das Oscillationscentrum die Rolle eines Begriffs, welcher nur in nicht eigentlich dynamischen Beziehungen eine Anwendung erfuhr. Am sichtbarsten liess erst die Behandlung der Stossgesetze die Nothwendigkeit hervortreten, die specifisch dynamischen Kräfte in ihrer Wirkung auf verschiedene Massen zu veranschlagen. So entwickelte sich die Vorstellung, dass eine

constante Kraft durch die Geschwindigkeit gemessen werde, welche sie in irgend einer Zeiteinheit irgend einer Masseneinheit ertheile. Bis zu diesem Punkt hatte daher Newton nur die bereits entwickelten Vorstellungen aufzunehmen und in abgesonderter Form für das jetzt erst erschlossene Feld von Anwendungen zu fixiren. Seine sogenannte vis motrix ist nichts als diejenige Tendenz, welche im Gleichgewichtsverhältniss als Gewicht oder Spannung erscheint, und sie bedeutet mithin jenen elementaren Antrieb, der in seiner dauernden Entwicklung die Geschwindigkeiten erzeugt und durch die in der Zeiteinheit hervorgebrachte Geschwindigkeit gemessen wird. Sie ist das, was man heute in der Mechanik kurzweg Kraft nennt, was man von jeder Beharrungsgeschwindigkeit unterscheidet, und was auf diese Weise der Summe der Wirkungsresultate, d. h. der Arbeit der Kraft entgegengesetzt werden muss. Allgemeine Naturkräfte in ihrer generellen Wirkungsmöglichkeit sowie überhaupt alle Kräfte, insofern sie im Hinblick auf den allgemeinen Grund ihrer besondern Wirkungsgrössen gedacht werden, können nicht anders gekennzeichnet, bestimmt und gemessen werden, als indem man ihre einfachste Wirkungsform und Wirkungsgrösse nach dem Ablauf einer Zeiteinheit als Maass setzt. Die der Zeit proportionale Erzeugung von Geschwindigkeiten ist hier diese einfache Wirkungsart. Bei dieser Betrachtung ist es bis auf Lagrange und auch bis auf den heutigen Tag verblieben, und die Streitigkeiten über die Schätzungsart der Kräfte berührten eigentlich gar nicht die Kräfte in ihrer allgemeinen Form, sondern nur die Vergleichungsart der besondern Wirkungsgrössen.

Was uns hier interessirt, ist auch noch gar nicht die letztere Controverse, sondern greift tiefer, indem vor allen Dingen die Grundfrage zu beantworten ist, wie man sich den nicht constanten Kräften gegenüber verhalten solle. Newton hat die Antwort hierauf, die über den Galileischen Gesichtspunkt entschieden hinaustrug, in dem schon erwähnten 10. Lemma des 1. Buchs gegeben, während es sich in der That nicht um eine aus einem fremden Gebiet entnommene Hülfseinsicht, also nicht um einen Lehnsatz, sondern um eine Idee handelte, welche zur Sicherung aller Naturmechanik an die Spitze treten muss, da die Naturkräfte der Regel nach nicht constant sind, sondern nach Maassgabe der Positionen ihrer Angriffspunkte oder überhaupt der räumlichen Verhältnisse eine nothwendige Veränderung erfahren. Was Galilei für ein

annähernd constantes Verhalten als Wirkungsform der Kraft festgestellt hatte, musste nun auch für das veränderliche Verhalten untersucht werden. Die quantitative Auffassung der Kräfte musste solange bedenklich genirt bleiben, als man nicht einen von der Veränderlichkeit derselben unabhängigen Begriff ihrer Wirkungsart und Messbarkeit gesichert hatte.

83. Der letzte Grund, die mit der Distanz veränderlichen Kräfte zunächst genau so aufzufassen, als wären sie constant, liegt in der Stetigkeit ihrer Grössenveränderung. Keine Naturkraft, mit der man operirt, wird in irgend einem Augenblick als etwa erst entstehend, d. h. von Null anfangend gedacht, sondern hat in jedem strengen Zeitpunkt bereits eine bestimmte oder, wie man gewöhnlich sagt, endliche Grösse. Dieser gegebenen Grösse gegenüber muss sich nun jede Veränderung, die in der Kraft selbst statthaben soll, erst zeitlich entwickeln. Sie muss durch Hinzufügung von Grössen erfolgen, die jede beliebige Stufe repräsentiren, die man nach Null annehmen mag. Setzt man also das Zeittheilchen, während die Kraft wirkt, unbeschränkt klein, so wird auch die Abweichung von der Constanz unbeschränkt klein genommen werden können. Der constante endliche Bestandtheil der Kraft wird allein erheblich und maassgebend sein. Man wird von der Veränderung der Kraft innerhalb des Zeittheilchens ebenso absehen können, wie man von der Richtungsveränderung in einem unbegrenzt kleinen Curvenelement abstrahirt. Die Wirkungsart der Kraft in Rücksicht auf die Proportionalität der Geschwindigkeiten mit der Zeit wird innerhalb des Zeitelements mit unbegrenzter Approximation vorhanden sein, oder es wird, wie man sich gewöhnlich ausdrückt, jede noch so veränderliche Kraft während eines Augenblicks so behandelt werden können, als wenn sie innerhalb dieses Zeittheilchens constant wäre. Diese Möglichkeit wird nun das Fundament für die gewöhnliche Maassbestimmung. Die Wirkungsart, d. h. die Proportion zwischen Zeitverlauf und ertheilter Geschwindigkeit, ist an dem beliebig kleinen Zeittheilchen ebensogut wie an jeder andern Zeitausdehnung ersichtlich. Man kann sich dieses kleine Theilchen wiederum beliebig zerlegt denken; man kann es als Repräsentanten einer Fallzeit oder sonst eines Effects denken, ja man könnte, wenn es nöthig wäre, in ihm eine ganze Welt von Mannichfaltigkeiten vor sich gehen lassen. Hier ist es jedoch für uns nur der Vertreter der constanten Wirkung einer nicht constanten Kraft. Wir

können daher aus ihm unmittelbar die Wirkung ableiten, die erfolgen würde, wenn die Kraft während einer ganzen Zeiteinheit derartig constant wirkte, wie sie innerhalb dieses Theilchens als constant wirksam vorausgesetzt ist. Hieraus folgt denn auch der Newtonsche Satz, dass für den „Anfang“ die den Zeiten quadratisch proportionalen Räume erzeugt werden oder, mit andern Worten, dass die Galileische Wirkungsform für die erste Entwicklung jeder Kraft gültig ist.

Will man die Kräfte miteinander vergleichen, so hat ein solches Unternehmen, sobald es sich um allgemeine Ursachen und nicht um besondere Specialwirkungen während verschiedener Zeiten unter besondern Umständen handelt, nur dann einen Sinn, wenn die Kräfte aus einem gewissen Gesichtspunkt als gleichartig erscheinen. Man wird daher die nicht constanten Kräfte in irgend einer Position gleichsam fixiren müssen, um sie überhaupt mit constanten Kräften vergleichen und messen zu können. Nur auf diese Weise wird man sie unter das Schema der gewöhnlichen Wirkungsform bringen und sie unter den allgemeinen dynamischen Kraftbegriff überhaupt erst subsumiren. Die kunstmässige Abstraction, die hierin liegt, wird sofort ersichtlich, wenn man versuchsweise fingirt, dass man sich einer sehr grossen Zeiteinheit, z. B. des Tages anstatt der Secunde für die Angabe des Maasses der Schwerkraft auf der Erde bedienen wollte. An einem solchen Beispiel zeigt sich, was die für constante und nicht constante Kräfte gemeinsame Schätzung nach der Beschleunigungsgrösse zu bedeuten habe. Diese Messungsart ist mit der stillschweigenden Bedingung behaftet, dass es sich gar nicht um die Messung oder Bestimmung der allgemeinen Kraft in ihrer Totalität, sondern nur um ihre Grösse in einer bestimmten Position handeln solle. Streng genommen ist es daher nicht die Naturkraft überhaupt, sondern die Kraft an einem bestimmten Ort, was Gegenstand der gewöhnlichen Schätzungsart wird. Nichtsdestoweniger sind diese Bestimmungen der Kräfte ganz exact, sobald man nur immer eingedenk bleibt, dass ihrer Kennzeichnung durch die in der Zeiteinheit ertheilte Geschwindigkeit der Wirkungsort in seiner räumlichen Bestimmtheit stillschweigend als nähere Voraussetzung zu Grunde liegt. Für unbegrenzte Approximationen ist dieser Wirkungsort ein unbegrenzt kleiner Raum; für Approximationen von einem bestimmten Grade der Genauigkeit bestimmt sich auch die Weite der Umgebung, in welcher

die Constanz angenommen werden kann, in einer entsprechend begrenzten Weise. Streng und ohne Approximation würde der Wirkungsort nur als ausdehnungsloser Punkt gedacht werden können. In diesem Falle würde aber die Vorstellung von einer Entwicklung verschwinden und nur der gleichsam diesseits der Grenze der Entwicklung belegene und jeder Bewegung vorangehende Antrieb der Kraft als Gegenstand der gemeinsamen Messung für constante und veränderliche Actionsursachen übrigbleiben. In der That ist es auch dieser Antrieb, für den die Constanz oder Veränderlichkeit ganz gleichgültig ist, und auf dessen Grössenbestimmung es streng genommen einzig und allein ankommt. Dieser Antrieb heisst z. B. aus dem einen Gesichtspunkt Gewicht, aus dem andern bewegende Kraft. Die schon erwähnte vis motrix Newtons ist nichts Anderes, und was die Mechanik als Kraft bezeichnet und im Dividendus als zweites Differential des von der Zeit abhängigen Raumes ausdrückt, repräsentirt grade diesen Antrieb. Das Differential der Geschwindigkeit in Beziehung auf die Zeit, welches ebenfalls nur ein anderer Ausdruck für dieselbe Sache ist, zeigt dies noch deutlicher. Im ersteren Fall ist das Quadrat des Zeitelements, im letzteren das Zeitelement selbst die Dauer, durch welche das Raumelement dividirt werden muss. So entstehen die Differentialcoefficienten oder abgeleiteten Functionen, welche bei strenger Ablösung von jedem infinitesimalen Element jenen Antrieb selbst messen und in Beziehung auf bestimmte Zeit- und Raumeinheiten diejenige Wirksamkeit ausdrücken, die er haben würde, wenn er in der strengsten Unveränderlichkeit zur Bethätigung gelangte. Diese strenge Unveränderlichkeit hat aber nur für die Ruhe statt und ausserdem noch für den dauerlosen Moment, in welchem man eine gegenseitige Beziehung verschiedener Kräfte ähnlich dem Gleichgewicht denken mag, einen exact zutreffenden Sinn. Mehr ist aber für die Vergleichung und Messung auch gar nicht erforderlich, und es begreift sich, dass die Newtonsche Vorstellung von der Wirkung im „Anfang" einerseits eine Approximation und andererseits die Veranschaulichung eines in aller Strenge bestehenden Verhältnisses punktueller Art sei.

84. Nicht blos in der Gravitationsmechanik, sondern auch überall sonst in der Natur hat man es mit Kräften zu thun, deren Wesen darin besteht, sich mit der Entfernung der aufeinander wirkenden Massen zu ändern. Dieser Umstand berührt

aber die Galileische Entwicklungsform insofern nicht, als die letztere das Schema ist, die unmittelbar von der Zeitdauer abhängigen Ansammlungen der Geschwindigkeiten darzustellen. Diese Ansammlung beruht aber auf dem Beharrungsgesetz, und es ist daher nur das letztere in Verbindung mit den aufeinanderfolgenden als gleich vorausgesetzten Antrieben der Kraft zur Darstellung gebracht. Aendern sich diese Antriebe mit der Entfernung, so wird die allgemeine Form der von der Zeit abhängigen Entwicklung nicht unbrauchbar, sondern ist nur durch eine zweite Variabilität, welche den sonst constanten Kraftfactor selbst betrifft, zu modificiren. Die Vernachlässigung dieser zweiten Variabilität in der Galileischen Schwere macht die Formeln für die letztere sehr einfach, während schon der Fall aus kosmischen Höhen eine weniger einfache Gestalt ergiebt. Die Bewegungsveränderungen im Planetensystem sind aber nur besondere Gestaltungen des Falles aus kosmischen Höhen, verbunden mit einer seitlichen Geschwindigkeit, welche diesem Fallen nur einen bestimmten Spielraum verstattet und eine gleichsam pendulirende Reproduction von Fallen und Aufsteigen verursacht. Innerhalb dieses Spielraums variirt nun die Kraft mit dem Quadrat der Entfernung, und man sieht hieraus deutlich, dass nur die einfachsten, gleichsam statischen Probleme der Gravitationsmechanik mit den gewöhnlichen Vorstellungen von verschiedenen Kräften, deren jede für ihren Ort constant ist, aufzulösen waren. Mit solchen discreten Fixirungen constanter Kräfte, denen zufolge man die Schwere je nach dem Ort als eine isolirte selbständige Kraft mit einer eigenthümlichen Wirkungsgrösse für die Zeiteinheit auffasst, liess sich aber schon Vielerlei ausmachen und waren z. B. schon die Schlüsse auf die Massen von Körpern des Sonnensystems ausführbar. Die Gewichte derselben Menge von Materie konnten nach Verschiedenheit der Lage miteinander verglichen werden, und der durch den Hinblick auf die gewöhnliche nicht weiter unterschiedene Erdschwere beschränkte Begriff des Gewichts erweiterte sich unter Newtons Händen zu einer allgemeinen kosmisch gültigen Idee von der Ponderation nach Maassgabe der Masse und des jedesmaligen Kraftfactors. Dieser erweiterte Begriff ist derjenige, den wir heute sehr einfach durch die Formel $p = mj$ ausdrücken können, wo p das Gewicht, m die Masse und j die Beschleunigung bezeichnet. Für die Verhältnisse an der Oberfläche der Erde verwandelt sich diese Formel

in $P = mg$, wo P das Gewicht an der Oberfläche und g die Beschleunigung ebendaselbst, d. h. die während der Secunde ertheilbare Geschwindigkeit repräsentirt. Ob man den Fallraum der ersten Secunde oder die stets das Doppelte desselben betragende Endgeschwindigkeit nimmt, ist nicht wesentlich. Doch entspricht es einer rationellen Uebereinstimmung in der Vorstellungsart, den Geschwindigkeitszuwachs während einer Secunde zu wählen. Andernfalls würde man in eine Gedankenreihe eintreten, die der seit Galilei herrschenden Vorstellungsart nicht entspricht, und die erst vollständig consequent werden kann, wenn man überall und durchgängig statt des Geschwindigkeitszuwachses die Arbeit der Kraft, also als deren Einheit den während einer Secunde hervorgebrachten Raum zum Anknüpfungspunkt der Vergleichungen und Messungen macht.

Die Masse oder, mit andern Worten, die Menge der Materie ist zwar als Begriff ganz selbständig, aber in ihrer kosmischen Bestimmung etwas zunächst Unbekanntes, worauf aus der Grösse der Kraft geschlossen wird. In der wahrnehmbaren Wirkung kennt man nur den einen Factor, indem man z. B. weiss, welche Fallbewegung eine relativ nicht grosse Masse in einem bestimmten Abstande von der Sonne oder von der Erde oder von einem andern Planeten annehmen muss. Man weiss dies aus der Beobachtung der Planeten und Trabanten selbst, und man kennt auch bis jetzt keinen andern Weg, diese absoluten Grössen der Antriebe festzustellen. Hat man sie einmal für die bestimmten Positionen und Massenverhältnisse, so kann man sie für alle möglichen Lagen nach dem allgemeinen Gesetz berechnen. Hierauf beruhen die Schlüsse, welche auf Grundlage der phoronomischen Phänomene eine Bestimmung der Massen ergeben, in welcher irgend eine bekannte Masseneinheit auf der Erde den Ausgangspunkt bildet. Auf diese Weise hat man Planeten und Sonne so zu sagen gewogen. Das für die Principien Interessante ist zunächst nicht die übrigens sehr einfache Methode selbst, sondern der leitende Grundbegriff des Verhältnisses von Masse und Gewicht. Die Masse hat ihr besonderes Gewicht nur, insofern sie einem bestimmten Bewegungsfactor unterliegt.

Setzt man nun gleiche Masseneinheiten mit verschiedenen Kraftfactoren, Bewegungsantrieben, Gewichten, oder wie man sonst die Affection bezeichnen will, bei gleichen Abständen von den Mittelpunkten der anziehenden Körper voraus, so rührt ihr ver-

schiedenes Gewicht oder, was auf dasselbe hinauskommt, die verschiedene Beschleunigung, die sie im freien Fall erfahren würden, nicht von ihnen selbst und von der Distanz, sondern von der Massenverschiedenheit der Körper her, gegen welche sie graviтiren. Ihr verschiedenes Ponderiren wird aus der verschiedenen Beschleunigung erkannt, welche sie erfahren würden, wenn die anziehende Kraft, d. h. ihr Antrieb, constant bliebe. Dieser Antrieb ist ein Product zweier Factoren mj, wenn man ihn in seiner Wirkung auf die gleichen Massen betrachtet. Fasst man ihn aber in seinen Ursachen auf, so werden mj und mj' als die Ergebnisse der Massenverschiedenheit der anziehenden Körper erscheinen, da ja die Entfernungen, in denen sie wirken, gleich sind. Die verschiedenen Antriebe, die sie auf die gleiche Masseneinheit bei gleicher Entfernung ertheilen, müssen sich daher wie ihre eignen Massen verhalten. So wird die Intensität der Kraftübung, d. h. die Hervorbringung der Beschleunigungen in gleicher Entfernung, das Maass der Massen und überhaupt die Form, in welcher sich das Dasein der Quantität der Materie in ihren Verschiedenheiten offenbart[1]). So kann man denn sagen, es sei der Begriff des Gewichts einer Masse wesentlich erst durch eine andere anziehende Masse gegeben, und der Körper habe das Gewicht nicht aus sich selbst, sondern durch die an ihm wirkende Kraft eines andern Körpers. Dies klingt paradox, ist es aber nur solange, als man nicht die einseitige Gewöhnung der Vorstellung überwindet, vermöge deren man die Ursache des Gewichts ausschliesslich in dem betrachteten Körper selbst sucht. Jedes Theilchen desselben wiegt nach Maassgabe der Masse des anziehenden Körpers und im Quadrat der Nähe desselben. Der ganze betrachtete Körper wiegt aber nach Proportion seiner eignen Materie. Es multipliciren sich also die beiderseitigen Massen und sind, wenn sie durch die Quadrate der Entfernungen dividirt werden, für die jedesmaligen Distanzen der Ausdruck der Gewichtsgrösse.

85. Die Proportionalität der Kraft mit den Mengen der Materie, welche in einer Anziehung im Spiele sind, ist eine Voraussetzung, die der Analogie der gewöhnlichen Mechanik entspricht, für jede bewegende Kraft gültig ist und sich für das kosmische Gebiet auch durch die speciellen Consequenzen, namentlich aber durch die Störungsrechnungen bewahrheitet. Der tiefere

[1]) So bei Newton Phil. nat. princ. math. lib. III, coroll. 1 und 2 zu prop. VIII.

und zwingendere Grund liegt jedoch in der Ableitung der gewöhnlichen mechanischen Grundsätze selbst, indem die Materie als Träger von Geschwindigkeiten oder Kräften die bewegenden Factoren unter übrigens gleichen Umständen nach Maassgabe ihrer Menge enthalten und repräsentiren muss. Der Begriff der Quantität der Materie ist aber von der Vorstellung ganz unabhängig, die man sich von der Materie selbst machen möge; denn man kann dasselbe Etwas noch einmal und überhaupt vervielfältigt oder gehäuft denken und auf diese Weise es selbst sammt seinen Consequenzen multipliciren, ohne sich um die genauere Verfassung dieses Etwas zu kümmern. Letzteres ist ganz im Sinne Newtons gedacht, der nach irgend welchen Merkmalen die völlige Einerleiheit der Hinzufügung bestimmt und z. B. zwei in allen Beziehungen gleiche Körper, sobald er sie in irgend einer Form vereinigt vorstellt, auch als die doppelte Masse ansieht. Hiedurch ist klar, dass der Begriff der Masse oder der Quantität der Materie etwas durchaus Selbständiges ist und nicht etwa erst aus der Mechanik selbst als correlativ zu den Krafterscheinungen concipirt wird. Bestimmt werden die Massen allerdings aus den Kräften oder vielmehr aus deren Erscheinungen, wo kein anderer unmittelbarer Schluss möglich ist; gefasst wird aber der Begriff der Masse schon vorher, und es würde auch ohne diese vorgängige Conception jene Bestimmung gar nicht denkbar sein.

Auf die Erörterung des Begriffs der Masse müssen wir die Newtonsche Vorstellung von einer Trägheitskraft (vis inertiae) folgen lassen, indem wir dabei an das erinnern, was über das unzweifelhafte Gesetz der Beharrung oder, mit andern Worten, über die Galileische Trägheit unzweifelhaft feststeht. In der dritten Definition und deren Erläuterung wird gesagt, dass eine gewisse Auffassung der eigentlichen Trägheit eine in der Masse befindliche Kraft (vis insita) ergebe, die mit dem „höchst bezeichnenden Namen“ Trägheitskraft belegt werden könne. Sie bestehe in der Macht zum Widerstande oder zur Ueberwindung eines Widerstandes, je nachdem man den Gesichtspunkt wähle und an eine ruhende oder bewegte Masse denke. In beiden Fällen ist sie die Gewalt, mit welcher der Zustand des Körpers gegen eine Hemmung behauptet wird. Man sieht deutlich, dass hier Newton keineswegs eine falsche Trägheitskraft einführt; denn obwohl er die Trägheitskraft von der Trägheit unterscheidet, so ist doch erstere nur die Reaction, welche entsteht, wenn der bisherige

beharrende und sich selbst gleiche Zustand der Ruhe oder Bewegung durch eine fremde Action unterbrochen wird. Das blosse Sichgleichbleiben des Zustandes ist natürlich keine Kraft; denn nur die Veränderung als solche erfordert eine Ursache. Dagegen ist aber das, was sich gleich bleibt, nämlich die Fixirung einer Masse an einem Ort oder die Existenz einer gewissen Geschwindigkeit derselben ein Grund für die eventuelle Kraftentwicklung in Folge der Reaction gegen eine fremde Einwirkung. Auch eine ruhende Masse, die von gar keinen ihr fremden Kräften afficirt gedacht wird, setzt der Fortbewegung oder überhaupt der Ertheilung einer Geschwindigkeit einen mit der Menge der Materie zunehmenden Widerstand entgegen. Immerhin mag es aber überflüssig sein, noch einen besondern Kunstausdruck da beizubehalten und Missverständnisse zu erzeugen, wo man einerseits mit der Vorstellung der Beharrung und andererseits mit dem Gesetz von Action und Reaction vollkommen auskommt. In dem einen Fall ist die von Newton gemeinte innere Kraft sogar sichtbar genug der punktuelle Antrieb zu dem, was als lebendige Kraft und als gleichsam in dem Körper aufgehäuft nach und nach zur Entwicklung gegen den Widerstand gelangt und sich so in Arbeit umsetzt. Doch wollen wir hier die fremden für Newton noch gar nicht vorhandenen Begriffe der lebendigen Kraft und der Arbeit nur zur Erläuterung berührt haben. Die Sachen kannte er allerdings; aber die unterschiedenen und principiell hervorgehobenen Vorstellungsarten nebst den zugehörigen Namen fehlten ihm.

Das dritte Bewegungsaxiom spricht die Gleichheit und Entgegengesetztheit von Action und Reaction aus. Diese grundsätzliche Voraussetzung ist für den Fall des Gleichgewichts ohne Weiteres klar; Druck und Gegendruck, Zug und Gegenzug entsprechen sich hier in allen Beziehungen. Es gilt das axiomatische Bewegungsgesetz aber auch für den viel weiter reichenden Hauptfall der Veränderung in den gegenseitigen Beziehungen der Körper. Die Zustandsänderung ist nach beiden Richtungen gleich; der Wirkung entspricht eine gleich grosse Gegenwirkung, und dies wird auch sofort deutlich, wenn man nur den Gesichtspunkt der Auffassung des Vorgangs richtig wählt. Indem sich die Action entwickelt, erwächst auch gleicher Weise die Reaction in ihren einzelnen Elementen. Der Einwirkung entspricht als Correlat der Widerstand, und es sind bei der gegenseitigen Action von zwei Massen, auch wenn die eine ruht, zwei Thätigkeiten zu

sondern. Durch die eine ändert der Körper A den Bewegungszustand des Körpers B und durch die andere ändert der Körper B den Zustand von A. Diese beiden Zustandsänderungen müssen nach dem Princip einander gleich sein, und es ist nicht blos das momentane und gleichsam statische Verhältniss, welches hiebei in Betracht kommt. Newton versteht den Grundsatz in diesem weiteren Sinne und bemerkt zur Vermeidung von Missverständnissen, dass natürlich nicht die Veränderungen in den blossen Geschwindigkeiten, sondern nur die sogenannten Bewegungsmengen, d. h. die Producte der Massen und Geschwindigkeiten gleich sein können. In der That ist ja auch der Bewegungszustand nur im Hinblick auf die zwei Factoren, Masse und Geschwindigkeit, zu denken, und für die Allgemeinheit der Auffassung muss hierunter auch der Zustand der Ruhe subsumirt werden, wo der eine Factor, die Geschwindigkeit, gleich Null ist, dennoch aber der andere Factor, die Masse, in der Reaction zur Geltung kommt. Der ruhende Körper ändert den Bewegungszustand des andern um soviel, als der seinige geändert wird. Er subtrahirt ihm soviel Bewegungsmenge, als er selbst addirt erhält. Die beiderseitigen Zustände müssen sich hienach in jedem Punkt des Wirkungsstadiums bestimmen lassen. Nimmt man mit Newton die Gleichheit der Action und Reaction nicht blos für den Moment und den gleichsam statischen Widerstand, sondern für eine endliche Dauer oder für eine ganze Entwicklung der Wirkungen, und bedenkt man, dass hiebei stillschweigend das Gesetz der Beharrung und Ansammlung der einmal ertheilten Geschwindigkeiten zu Grunde liegt, so zeigt sich die Tragweite des Axioms. In diesem Sinne ist es nämlich, genauer betrachtet, nichts Geringeres, als ein allgemeines Gesetz der Uebertragung der Bewegungsmenge oder Kraft, und es schliesst bereits eine Vorstellung von der Art ein, wie sich die Bewegungsgrösse, d. h. das Product von Masse und Geschwindigkeit in dem Kräftespiel erhält. Diese Erhaltung findet mit Rücksicht auf das Vorzeichen, d. h. als algebraische Summe statt. Aber dieser Satz ist auch nur eine Folge der principielleren Vorstellung, wonach, absolut genommen, die reactive Bewegungsmenge der activen gleich ist, und wonach man die letztere auch im Sinne und Vorzeichen als auf den reagirenden Körper übertragen denken muss. Im Punkte des Vorzeichens hatte der Irrthum des Cartesius von der Erhaltung derselben Bewegungsgrösse in dem Gesammtvorgang ge-

legen. Im Newtonschen Axiom liegt dagegen das Fundament zutreffender Vorstellungen von der Erhaltung der Kräfte.

Um keine zu specielle Vorstellung von dem Axiom zu hegen, muss man bei ihm nicht blos an das Beispiel des Zuges oder Stosses irgendwie verbundener Körper denken, sondern auch mit Newton die freie Attraction ins Auge fassen. In diesem letztern Fall ist die reactive Anziehung der activen gleich und entgegengesetzt. Betrachtet man also nur zwei Körper, so wiegt der kleinste gegen den grössten ebensoviel, als dieser gegen jenen. Was von dem Gewicht oder dem bewegenden Antrieb gilt, trifft nothwendigerweise, wie es dem Axiom gemäss ist, auch für die Bewegungsentwicklung zu. Die kleine Masse bewegt sich schnell, die grosse langsam und vielleicht kaum bemerkbar; aber jeder Bewegungsgrösse auf der einen Seite entspricht eine gleiche und entgegengesetzte auf der andern.

86. An der Spitze des dritten, über das Weltsystem handelnden Buchs stellt Newton einige Forschungsregeln (regulae philosophandi) auf, die für uns jedoch weiter kein Interesse haben, als dass sie uns das grundsätzlich inductive Verhalten seiner Denkweise noch besonders aussprechen. So wird z. B. bei der Verallgemeinerung der Eigenschaften der Naturdinge Behutsamkeit empfohlen. Die erste Regel fordert, dass nur die zur Erklärung nöthigen Ursachen zugelassen werden. Bei der dritten Regel wird z. B. die Trägheitskraft als etwas erwähnt, worauf man ebenso wie auf die durchgängige Beweglichkeit der Körper schliesse.

Hienach kann man annehmen, dass Newton die mechanischen Axiome als allgemeine Erfahrungsthatsachen angesehen habe. Die Art, wie er in seinen Präliminarien die von uns bei ihm noch nicht erörterten älteren Principien behandelt, bekundet überhaupt nicht die Absicht, zwischen Erfahrung und blosser Denknothwendigkeit principiell zu unterscheiden. Constatiren wir jedoch sein Verhältniss zu den älteren Principien. Das Parallelogramm der Kräfte wird im ersten Corollar zum dritten Gesetz veranschaulicht und im zweiten Corollar die Zerlegung und Zusammensetzung der Kräfte als Basis der ganzen Mechanik bezeichnet. Jedoch erinnern wir an das, was wir (Nr. 60) bei der Behandlung Varignons, der in demselben Jahre 1687 auf das Princip und dessen Anwendungen weit mehr Nachdruck legte, auseinandergesetzt haben. Newton behandelte das Princip fast wie

etwas Herkömmliches, und trotz seiner Aeusserung über die Basis der Mechanik als etwas Nebensächliches. Dies erklärt sich wohl daraus, dass er mehr die Dynamik als die Statik im Auge hatte und das Gesetz noch vorherrschend im Hinblick auf die Zusammensetzung der Bewegungen auffasste. Uebrigens beruft er sich bei der Erläuterung desselben dennoch auf sein zweites Gesetz, demzufolge die Veränderung der Bewegung proportional und nach Richtung der bewegenden Kraft erfolgt. Auf diese Weise erscheint das Zusammensetzungsprincip als eine Combination der Beharrung und der hinzutretenden Abänderung des Bewegungszustandes, die sich beide miteinander vereinigen, ohne dass die eine Affection die andere behinderte. Die Stellung in einem Corollar spricht auch schon äusserlich hinreichend deutlich.

Newton kennt überhaupt nur drei einfache Bewegungsgesetze oder Bewegungsaxiome, nämlich das der Beharrung des Bewegungszustandes, dann das der Veränderung dieses Zustandes nach Proportion der vis motrix, und endlich das von uns ausführlich behandelte über die Gleichheit von Action und Reaction. Im Schlussscholium der Einleitung bemerkt er, die bisherigen Principien seien von allen Mechanikern angenommen. Durch die zwei ersten Axiome (Beharrung und die Veränderung nach Proportion der bewegenden Kraft) nebst den zwei ersten Corollarien (Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte) habe Galilei festgestellt, dass sich die Räume wie die Quadrate der Zeiten verhalten, sowie dass die Wurfbewegung eine Parabel sei. Das dritte Axiom von der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung sei bei der Darlegung der Stossgesetze erforderlich gewesen. Bei den Anziehungen erläutere es sich, wenn man einen die Bewegung hindernden Gegenstand eingeschoben denke, indem alsdann bei einer Mehranziehung nach der einen Seite das ganze System seinen Bewegungszustand ändern müsste, was gegen das erste Axiom verstossen würde. Diese Newtonsche Berufung greift aber offenbar zu weit aus, indem sie das Beharrungsgesetz bereits im Sinne des bekannten Satzes der Erhaltung der Schwerpunktsbewegung gebraucht und stillschweigend den Unterschied der innern und der äussern Kräfte zu Grunde legt.

Wir werden daher nicht überrascht sein, wenn wir auch sonst manchen Satz unter der Form von elementaren Bestimmungen eingeführt finden, der eine andere Stelle und einen besondern Beweis erfordert hätte. Ein Zeugniss hiefür ist sogar schon die

Fassung eines Theils der den Bewegungsaxiomen vorausgeschickten acht Definitionen. Sie beziehen sich der Reihe nach auf die Masse, die Bewegungsgrösse, die Trägheitskraft, die imprimirte Kraft (als Gegensatz der Trägheitskraft) und die Centripetalkraft. Grade aber bei der letztern wird die Messung derselben nach der erzeugten Geschwindigkeit und specieller nach der erzeugten Bewegungsgrösse in Gestalt von Definitionen eingeführt, während die Berechtigung zu solchen Maassvorstellungen eine besondere Nachweisung erfordert hätte. Ausserdem ist da, wo es sich um die allgemeine Art der Kraftentwicklung handelte, und zwar innerhalb der Darlegung der ersten Principien, die Species der Centripetalkraft zum Ausgangspunkt genommen. Der Satz von der Beschleunigung als dem Maass der Kräfte hätte in seiner allgemeinen Gültigkeit und nicht in der Form einer Definition für das Maass der Centripetalkraft hervortreten müssen.

Trotz der sonst durchdachten systematischen Haltung der Newtonschen Präliminarien mit ihrer Einschränkung auf drei eigentliche Bewegungsaxiome fehlt dennoch viel an einer streng logischen Verfassung der ersten Elemente, deren Mangel ja auch noch von Lagrange empfunden wurde und noch gegenwärtig nicht völlig gehoben ist. Bezeichnend ist bei Newton die beiläufige Anführung und Erläuterung, welche gegen Ende des vorher erwähnten Schlussscholium der Einleitung das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten erfährt. Wie beim Zusammentreffen im Stoss die Körper gleich viel ausrichteten, wenn ihre Geschwindigkeiten sich umgekehrt wie die vires insitae (Trägheitskräfte) verhielten, so hielten einander bei der Bewegung der Maschinen diejenigen Agentien die Waage (sustinent), deren Geschwindigkeiten, nach der Bestimmung der Kräfte geschätzt, den letztern umgekehrt proportional wären. Es folgen alsdann Hinweisungen auf das Hebelbeispiel u. dgl. Nach der Newtonschen Auffassung des virtuellen Princips erscheint es also hier durch die Analogie der Kräfteverhältnisse im Stoss erläutert und führt sich hienach auf den Grundsatz der Gleichheit von Action und Reaction zurück. Zerlegt man nämlich sowohl die Action als die Reaction in die Factoren der Masse und Geschwindigkeit, so ergiebt sich, dass die Gleichheit entgegengerichteter Bestrebungen ein umgekehrtes Verhältniss zwischen den Massen und Geschwindigkeiten erfordert. Jedoch ist hiebei das eminent Eigenthümliche des virtuellen Princips nicht zu seinem Recht gelangt, indem der Satz von den

virtuellen Geschwindigkeiten specifisch für die aus der Systemverfassung und den äussern Bewegungseinschränkungen hervorgehenden Möglichkeiten der relativen Geschwindigkeitsentwicklungen gelten soll. Aus dem allgemeinern Gesichtspunkt aber, aus welchem sich das virtuelle Princip in den allgemeinern Satz verwandelt, dass gleiche Kräfte einander die Waage halten, und dass über die Gleichheit der Kräfte überall durch die virtuellen Momente entschieden werde, — aus diesem abstracteren Gesichtspunkt ist allerdings das Zusammenfallen des virtuellen Princips mit der fundamentalen Kräftemessung, die auch dem Grundsatz über die Action und Reaction erst seinen Sinn giebt, etwas sehr Natürliches, und wir werden später sehen, dass es nur aus diesem Grunde einem Lagrange möglich gewesen ist, den Satz von den virtuellen Geschwindigkeiten zum Ausgangspunkt der ganzen Mechanik zu nehmen.

87. Nachdem wir die Hauptidee der Gravitationsmechanik und das Verhalten zu den elementaren Principien betrachtet haben, müssen wir noch Einiges über die mathematische Methode der Behandlung hinzufügen. Die Theorie der krummlinigen Bewegung wurde wesentlich Sache der blossen Mathematik, sobald einmal die Voraussetzung der quadratischen Anziehung in Frage gekommen war. Newton hat nun in seinem Hauptwerk wesentlich die geometrische oder synthetische Methode gewählt und auf eine mehr analytische Entwicklung, die ihm vermöge seines Fluxionscalcüls möglich gewesen wäre, absichtlich verzichtet. Natürlich konnte er das infinitesimale Element der in dieser Richtung erheblichen Schlüsse nirgend umgehen; denn die geometrische Einkleidung und Veranschaulichung ändert an der Hauptsache gar nichts. Der erste Abschnitt des ersten Buchs handelt denn auch von den ersten und letzten Verhältnissen, d. h. analytisch geredet, von den Grenzen oder Grenzverhältnissen, die zwischen veränderlichen Grössen im Anfange ihrer Erzeugung oder bei einem bestimmten Zielpunkt ihres Laufs betrachtet werden können. Es ist dies also, wie wir sagen würden, eine in geometrischer Darstellung zu Hülfe genommene Methode der Grenzen, welche den fluxionistischen oder differentiellen Operationen entspricht und als Surrogat derselben dient. Ausserdem sind aber im zweiten Buch im zweiten Lemma die Grundsätze der Fluxionenmethode kurz dargelegt. An dieser Stelle werden die Grössen wie durch Bewegung oder Fliessen erzeugt angesehen. Die ausdrücklich nicht als endlich



zu setzenden Anwachsungen heissen Momente, und die Entstehungsprincipien der Verhältnisse dieser Momente, nicht aber die letzteren selbst, werden als der eigentliche Gegenstand der Untersuchung bezeichnet. An Stelle der Momente, welche die augenblicklichen Zunahmen repräsentiren, könne man daher auch die Geschwindigkeiten des Anwachsens setzen und dieselben mit dem Namen der Bewegungsänderungen oder Fluxionen bezeichnen. Man sieht hieraus, welchen innigen Zusammenhang der Fluxionsbegriff mit den leitenden mechanischen Vorstellungen und Bedürfnissen aufzuweisen und wie natürlich er sich an diese angeschlossen hat. Die Fluxion ist die Geschwindigkeit der Veränderung einer stetig veränderlichen Grösse. Die gleichmässige Veränderung einer unabhängigen Variablen mit der Zeit oder, wenn man will, diejenige der Zeit selbst ist als gleichförmig zu Grunde gelegt. Der berühmte Begriff der Fluxion ist hienach der erste Differentialcoefficient, bezogen auf die Zeit, die bei jeder Grössenveränderung, auch abgesehen von Bewegungserscheinungen, zur Messung der Schnelligkeit oder Langsamkeit dieser Veränderung eingeführt werden kann. Es ist dieser abstractere Geschwindigkeitsbegriff, der mit der Bewegung gar nicht nothwendig zusammengehört, keine fremdartige Idee, welche aus der Analysis ferngehalten werden müsste. Um die Art der Grössenveränderung zu denken, ist diese Geschwindigkeitsvorstellung sogar unentbehrlich. Sie gehört zu dem Begriff der Grössenveränderung überhaupt und nicht erst zu dem von verschieden grossen Räumen, die in denselben aufeinanderfolgenden Zeittheilen durchlaufen werden.

Newton giebt nun die Regeln an, nach welchen sich die zusammengesetzten Momente der als Factoren in Producten, Potenzen u. dgl. verbundenen Gesammtgrössen aus den Momenten der Bestandtheile bestimmen lassen. Er redet an dieser Stelle vorzugsweise von Momenten; aber der Sache nach verzeichnet er die Grundlinien von dem, was man bei ihm Fluxionscalcül nennt, und was er in andern Schriften ausführlicher dargelegt hat. Bemerkenswerth ist jedoch noch, dass er die Verbindung einfacher Grössen zu einer zusammengesetzten eine Erzeugung nennt, so dass sich also die lebendige und der Natur zugekehrte Vorstellung von der Hervorbringung der Grössen nicht blos auf die Entstehung der einzelnen Grösse, sondern auch auf die Rechnungsoperationen bezieht. Dies ist übrigens consequent und natürlich; denn die Entstehung der Einzelgrösse wird als stetige Addition von Ele-

menten gedacht; das Addiren ist aber die Grundform aller Operationen und mithin jede Rechnungsoperation nur eine Specificirung dieser Erzeugungs- oder Veränderungsart.

Diese letztere Bemerkung ist einem Werk gegenüber nicht überflüssig, welches sich als die mathematischen Principien der Naturphilosophie betitelt. Newtons mathematische Anschauungen und Naturvorstellungen sind einander in der Form verwandt. Man sieht deutlich, dass die erstern dazu ausgebildet worden sind, um den Bedürfnissen der letztern zu entsprechen. Diese Uebereinstimmung ist ein grosser Vorzug, indem sie Stoff und Form einander unterstützen lässt. Noch viel deutlicher wäre diese Zusammengehörigkeit hervorgetreten, wenn nicht die Gewohnheiten der geometrischen und logisch synthetischen Darstellungsart die innere natürliche Entwicklung der Wahrheiten einigermaassen verdeckt hätten. Galilei liebte die genetische entwickelnde Methode als solche. Newton hat sein System mehr in starrer Form hingestellt und sich kaum in den Scholien gelegentlich zu einigen eigentlich entwickelnden Wendungen herbeigelassen. Dies ist kein Vortheil für die Zugänglichkeit seines Werks. Es sind gleichsam Rückconstructionen des Ganges der Auffindung und Entwicklung nöthig, die erst nach einem tiefern Studium gelingen können. Eine Probe von dieser Nothwendigkeit haben wir schon in den Präliminarien angetroffen, wo doch die fragliche Nöthigung die verhältnissmässig geringste ist. Im weitern Verlauf des Buches wird das an sich fast unvermeidlich schwerfällige Gerüst geometrischer Beweisführungen alter Art zur Hemmung des leichtern Eindringens. Es wird dies umsomehr, als der Gegenstand nicht rein geometrisch ist und die noch von Huyghens, welcher der Einmischung der Analysis fernstand, in so hohem Grade bewährte Eleganz bei dem Engländer fehlt. An sich wäre die geometrische Anschaulichkeit ein Vorzug, wenn sie zugleich durch die abstractere Stufe einfacher algebraisch analytischer Entwicklung unterstützt würde. Die spätere Geschichte hat gezeigt, wie die analytischen Einkleidungen bis auf und dann durch Lagrange zu einer sogar einseitigen Vorherrschaft gelangten und erst im Eingang des 19. Jahrhunderts durch Poinsot wieder einige, freilich sehr problematisch gerathene Einschränkung erfuhren. Abgesehen von der besondern, in der Form nicht befriedigenden Ausführungsart der Newtonschen Darstellung, ist aber gewiss auch der Umstand, dass der Auffinder des mächtigsten analytischen Hülfsmittels, nämlich der Fluxionen-

rechnung, doch die algebraische Symbolik möglichst zurücktreten liess, ein lehrreiches Anzeichen. Die Dienste der Rechnung können nur voll und ganz wirken und zugleich mit hinreichender Anschaulichkeit verbunden werden, wenn mit der Steigerung der analytischen Abstractheit eine vermehrte Leichtigkeit der Uebertragung in das Anschauliche Hand in Hand geht.

88. Die Naturphilosophie oder, wie man zur Unterscheidung von einem neuern engern Sprachgebrauch sagen könnte, die Naturalphilosophie Newtons ist eine auch speciell auf das Weltsystem angewendete, durch die mathematische Handhabung der Gravitationsidee bereicherte Mechanik. Sieht man von dem Gravitationsgedanken an sich selbst ab, so besteht das Auszeichnende dieser Naturphilosophie nicht in neuen Erfahrungsthatsachen, ja auch nicht einmal in einem erheblichen neuen Princip der allgemeinen, nicht specifisch kosmischen Mechanik, sondern in der mathematischen Durchführung der alten Principien im Bereich der durch die neue Idee angeregten Aufgaben.

Bilden wir uns, um die Idee und die mathematische Bearbeitung bei Newton zu unterscheiden, noch schliesslich einen concentrirten Begriff von der Gestalt der maassgebenden Ausgangspunkte. Zwei Masseneinheiten in einem der Längeneinheit gleichen Abstande gegen einander gravitirend bilden so zu sagen die Gravitationseinheit. Zwei beliebige andere Massen in einer beliebigen andern Entfernung stellen ein allgemeines Beispiel vor, wie man den Gravitationseffect auf die Gravitationseinheit bezieht. Die Producte dieser Massen, in den Einheiten der erst erwähnten ausgedrückt, dividirt durch das Quadrat des Abstandes, dessen Zahl ebenfalls nach jener Distanzeinheit bestimmt wird, — dieser Quotient des Massenproducts durch das Quadrat des Abstandes ist das Maass der Gravitation, als Vielfaches jener ursprünglichen Gravitationseinheit ausgedrückt. Denkt man sich sowohl die Körper, welche die Einheit bilden, als auch die beliebige Combination, welche gemessen werden soll, im Verlauf der ungehemmten Attractionsbewegung, so muss sich das Verhältniss zur Gravitationseinheit auch als Beschleunigung bekunden. Wenn also die Beschleunigung in der Gravitationseinheit als absolute Grösse bekannt ist, so ist hiemit auch für jeden andern Fall die Beschleunigung gegeben. Selbstverständlich muss man bei ungleichen Massen die Bewegung jeder einzelnen für sich betrachten, da die Zusammenwerfung in eine einheitliche ununterschiedene Annäherung den

Gedanken unklar machen würde. Man thut daher auch gut, schon in der Gravitationseinheit selbst jede Masse für sich ins Auge zu fassen.

Nach dem eben Gesagten begreift es sich, dass man aus den in der Natur gegebenen Verhältnissen eine Gravitationseinheit mit der zugehörigen Beschleunigungsgrösse ermitteln kann. Alsdann besitzt man in der typischen Einheit ein fundamentales Verhältniss zwischen Masse, Abstand und zugehöriger Bewegung. Die Mengen der Materie und deren Abstände entscheiden also, wo sie sich auch im Weltall finden mögen, principiell über die zugehörigen Anziehungsbewegungen. Alles Weitere ist Sache der Mathematik und der Geltendmachung der einfachsten mechanischen Principien, wie der Zusammensetzung der Kräfte, der Gleichgewichtsbedingungen u. dgl. Sind z. B., wie im Erdkörper selbst, die gegen einander gravitirenden Elemente als in einer gewissen Gleichmässigkeit concentrischer Schichten gehäuft zu denken, so ist für einen innern Punkt die Resultante der allseitigen Attraction eben nur mathematisch zu entwickeln. Das scheinbar neue Gesetz, dass die Schwere im Innern der Erde proportional mit der Entfernung abnimmt (Satz IX, Buch III) ist nur eine mathematische Folgerung aus dem allgemeinen Gravitationsgesetz. Ebenso ist es nur eine gleiche Folgerung, wenn (in einer Bemerkung zu Satz XIV, Buch III) daran erinnert wird, dass die Fixsterne ihre schon der Entfernung wegen schwache Anziehung auf unser Sonnensystem zu einem grossen Theil gegenseitig aufheben müssen. Soweit sich nämlich unser Sonnensystem zu den Gruppirungen der Fixsterne wie ein Punkt im Innern einer Kugelschaale verhielte, müssten sich (nach Satz LXX, Buch I) die Anziehungen auf diesen Punkt zu Null neutralisiren. Die Voraussetzung im 2. Coroll. Buch III, Satz XIV, dass die Fixsterne gleich vertheilt seien, ist zwar nicht im Mindesten der Fall der Wirklichkeit; aber analoge Schlüsse sind dennoch möglich.

Diese Beispiele zeigen, wie verschiedener Wendungen der einfache Typus einer Gravitationsbeziehung durch blos mathematische Bearbeitung fähig sei. In der That sind die Lösungen der verschiedensten Probleme bei Newton nichts als solche quantitative Bearbeitungen des Fundamentalprincips. Die Theorie von Ebbe und Fluth, die Veranschlagung der gegenseitigen Störungen der Planeten und überhaupt die ganze kosmische Physik, soweit sie irgend eine Gestalt von Gravitationswirkungen zum Gegenstand

hat, — dieser ganze Inbegriff von Aufgaben ist nur eine Rechnung nach Maassgabe der Gravitationsidee und der besondern Massen- und Distanzgrössen, welche uns die unmittelbare oder mittelbare Erfahrung liefert.

In der Gravitationsmechanik tritt zu den ihr eigenthümlichen Factoren, nämlich zu der Einheit und dem Gesetz der quadratischen Abnahme noch eine Thatsache hinzu, die noch heute in ihrer Zufälligkeit und ebenso unerklärt wie bei Newton dasteht. Es ist dies jener Bestandtheil der seitlichen oder translatorischen Beharrungsbewegung, der die Gravitation mehr oder minder aufwiegt und sich zu derselben in allen Fällen antagonistisch verhält. Diese Beharrungsgeschwindigkeit, welche das Fallen auf die Centralkörper verhindert, kann wie jede endliche Geschwindigkeit als irgend einmal erzeugt gedacht werden. Die Erzeugungsart ist uns aber völlig unbekannt, und selbst der Schluss auf ein Erzeugtsein beruht nur auf der Analogie, vermöge deren wir bei jeder Geschwindigkeitsgrösse, welche nach dem Trägheitsgesetz beharrt, nach ihrer Aufhäufung durch eine Kraft zu fragen genöthigt werden. Newton hat in dem Scholium am Ende seines Werks ausdrücklich erklärt, dass die Abstände und Bahnen selbst gegeben sein müssten und sich nicht aus den Principien der Gravitation ableiten liessen. Dies heisst wesentlich soviel, dass die Beharrungen ein der Gravitation fremdes und ungleichartiges Element bilden.

Diese Beharrungen sind der Grund der Möglichkeit krummliniger Bahnen. Die blosse Gravitation an sich selbst würde zwischen zwei Körpern nur eine gradlinige Annäherung verursachen. Sind aber einmal jene Beharrungen thatsächlich gegeben und der Ort bestimmt, wo der Körper ihnen unterliegt, so ist das weitere Spiel der Bewegung in Combination mit der Schwere nur eine mathematische Frage. Die Veranlassung, durch welche Newton auf die innern Bedingungen der Entstehung der Ellipse geführt wurde, zeigt dies ebenfalls. In einem Brief[1]) an Halley vom 27. Juli 1686 giebt er zu, dass er durch die Hookesche Erörterung der Rotationsabweichung eines fallenden Körpers bewogen worden sei, seine Aufmerksamkeit auf die Vorbedingungen der Entstehung einer elliptischen Bahn des Körpers zu richten. Hier ist also der

[1]) Abgedruckt bei Brewster, Memoirs of the life of Newton, London 1855, Bd. I, S. 452.

Keim zu seiner tiefern Einsicht in die nach Gesetzen der Mechanik mögliche Entstehungsart der planetarischen Bahnen zu suchen. Erinnert man sich, dass er selbst die Ableitung der quadratischen Veränderung der Anziehung aus dem letzten Keplerschen Gesetz berichtet (vgl. Nr. 79), und dass er ausserdem diese selbständige Ableitung auch Hooke, Wren und Halley (im Scholium zu Satz IV, Coroll. 6, Buch I) zugesteht, so bleibt offenbar die mathematische Durchführung als das Charakteristische seines Systems übrig, und wir müssen schliesslich darauf zurückkommen, dass die Gravitation von Element zu Element und deren mathematische Bearbeitung, verbunden mit den Erweiterungen der Theorie der krummlinigen Bewegungen über die Huyghensschen Fundamente hinaus, die eigenthümlichen Grundzüge der neuen Gravitationsmechanik gebildet habe. An elementaren Grundsätzen, die als letzte Principien der allgemeinen Mechanik gelten können, haben wir jedoch keinen von Grund aus neuen, sondern nur eine erweiterte Auffassung älterer Vorstellungsarten angetroffen. Die anfängliche Wirkungsform nicht constanter Kräfte, sowie das deutliche Hervortreten des Factors der Masse in der Intensität der Kraft waren hier die zwei Hauptpunkte. Formal trat erst durch Newton das Axiom von der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung als abgesonderte Idee in den Vordergrund. Jedoch sind grade die Präliminarien bei ihm nicht das Bedeutsamste gewesen, und es blieb der weitern Entwicklung überlassen, die axiomatischen Grundlagen der allgemeinen Mechanik principiell als solche zu erörtern. Auf diese Weise bildeten sich auch mehrere, zunächst sehr streitige Vorstellungsarten aus, die, wie die Erhaltung der lebendigen Kräfte und das Princip der geringsten Wirkung, die Aufmerksamkeit der nächsten Entwicklungsperiode zu einem grossen Theil in Anspruch nahmen. Die Behandlung dieser nicht sowohl axiomatischen als schematischen Sätze geht neben der steigenden Bethätigung der Analysis einher, und der nächste Abschnitt, der die Ausbildung der Wissenschaft bis auf Lagrange einschliesslich repräsentirt, wird sich im Hinblick auf unsere eigentliche Aufgabe vornehmlich mit jenen Schematen und mit den Vortheilen zu beschäftigen haben, welche mit der Einführung der reinen Analysis in unser Gebiet für die bestimmtere Auffassung der Principien und ihres innern Zusammenhangs gewonnen worden sind.

Dritter Abschnitt.

Die Zeit der allgemeinen Formulirungen und der analytischen Entwicklung bis auf Lagrange.

Erstes Capitel.

Hauptpunkte des Fortschritts.

89. Von Galilei bis auf Huyghens und Newton waren alle wesentlichen Grundeinsichten der allgemeinen Mechanik in der einfachsten und ursprünglichsten Form erfasst worden, und es fiel dem folgenden Zeitalter nur die Rolle zu, sich einerseits durch weitere Reflexion und Discussion über das Wesen jener Grundvorstellungen aufzuklären, dieselben gelegentlich auch metaphysisch zu erörtern, und ausserdem zuzusehen, wie sich durch Anwendung der Analysis die mathematisch complicirteren Aufgaben bewältigen liessen. Der vorherrschende Charakterzug dieser Periode wird denn auch mehr und mehr nach der analytischen Seite ausgeprägt. Ziemlich gleichzeitig mit dem ersten Erscheinen des Newtonschen Hauptwerks wird auf dem Festlande der Anstoss zu einer abstracteren, vornehmlich analytischen Bearbeitung aller Probleme sichtbar. Mit der Veröffentlichung des Leibnizschen Aufsatzes über „eine neue Methode für die Maxima und Minima u. s. w.“ (Nova methodus pro maximis et minimis etc.) in den Acta Eruditorum 1684 gelangte die Newtonsche Fluxionsrechnung zur Publicität[1]) und zu einer bequemeren Notation, und die festländischen

[1]) Eine vollständige Ueberführung, die auch den Widerwilligsten dazu nöthigte, den geistigen Diebstahl Leibnizens einzugestehen, ist ursprünglich nicht möglich gewesen und nach Beschaffenheit des Actenmaterials auch jetzt nicht mehr zu gewärtigen. Einer so handgreiflichen Beweisführung pflegen aber die verborgenen Aneignungen fremder Verdienste nur selten zugänglich zu sein. Was sich gegen Leibniz ergiebt, ist eine an Gewissheit grenzende

Mathematiker, namentlich die verschiedenen Bernoullis bildeten den neuen Calcül und Algorithmus nach und nach zu einer vollständigen Differential- und Integralrechnung aus, während die Engländer mehr an den äusserlichen Formen der unmittelbaren Newtonschen Ueberlieferung festhielten. Die Förderung der Integrationen ist zunächst vornehmlich den Brüdern Jacob und Johann Bernoulli zugefallen. Diese beiden sind es auch vorzüglich gewesen, welche die analytischen Methoden an den wichtigsten mechanischen Problemen bethätigten und sich z. B. mit der analytischen Durchdringung der Huyghensschen Auffindungsart des Oscillationscentrums beschäftigten. Für das Interesse unserer Aufgabe wird ausser den beiden genannten Zeitgenossen von Leibniz noch ein Sohn des jüngern Bruders Johann, nämlich Daniel Bernoulli (1700—1782), besonders wegen seiner Auffassung des Princips der lebendigen Kräfte zu berücksichtigen sein.

Die erste sich in umfassender Breite ergehende Gesammt-

Wahrscheinlichkeit nach Maassgabe der Materialien und ausserdem die Thatsache, dass sein sehr defecter persönlicher Charakter, sowie der durchgängige Mangel an Schöpferkraft ihn für den Diebstahl, dessen er beschuldigt wird, völlig qualificirten. Für diesen Charakter ist auch eine briefliche Aeusserung von Huyghens an l'Hopital v. 9. April 1693 kennzeichnend: „Herr Leibniz ist sicherlich sehr gewandt, aber er hat zugleich eine unmässige Begier zu scheinen (une envie immoderée de paraitre) wie sich zeigt . . . . wo er von seiner Analysis des Unendlichen spricht . . . . und bei den harmonischen Gesetzen der Planetenbewegung, wo er der Erfindung von Herrn Newton gefolgt ist, aber unter Einmischung seiner Gedanken, die sie verderben . . . . Uebrigens bin ich sehr in Zweifel aus Gründen, die ich aufführen könnte, ob er nicht seine Construction (der Kettenlinie) aus derjenigen des Herrn Bernoulli gezogen." (Diese Correspondenz in Hugenii Exercitationes Mathematicae, ed. Uylenbroek, Hagae Com. 1833, Fasc. I, p. 256.) — Euler schreibt in der Vorrede zu seinen Institutionen des Differentialcalcüls (1755) Leibniz im Hinblick auf das schon vorher bei Newton Vorhandene nichts weiter zu als doctrinelle Formgebung und eine Art systematischer Zusammenfassung (in formam disciplinae redegerit ejusque praecepta tanquam in systema collegerit). — Lagrange, der den Keim der Differentialrechnung bei Fermat sucht, verfehlt nicht in seinen Leçons sur le calcul des fonctions (1806) S. 324 darauf aufmerksam zu machen, dass sich in dem Leibnizschen Aufsatz von 1684 sogar eine äusserliche Uebereinstimmung mit Bestandtheilen der Fermatschen Darstellung finde. — Gauss äusserte sich in Beziehung auf Leibniz, wie aus der Schrift von Sartorius v. Waltershausen (Gauss zum Gedächtniss, Leipzig 1856, S. 85) hervorgeht, dahin, dass jener nicht im Entferntesten mit Newton zu vergleichen sei. — Ueber den Charakter, der uns aus Leibniz' Leben und wissenschaftlichem Verhalten bei genauerer Untersuchung überall entgegentritt, siehe meine Kritische Geschichte der Philosophie, Berlin 1869, 3. Aufl. 1879.

darstellung, verbunden mit erheblicheren Bereicherungen, erfuhren die neuen analytischen Methoden bekanntlich in Eulers grossen Arbeiten, und dieser deutsche Mathematiker des 18. Jahrhunderts ist es auch gewesen, der zuerst eine analytische Bearbeitung der Mechanik mit seinem Werk „Mechanica sive motus scientia analytice exposita" (Petersburg 1736) unternommen hat. Dieses Werk schliesst die eigentliche Statik aus, behandelt die Bewegung freier Punkte in Bd. I, unfreier in Bd. II, und wurde durch Eulers, übrigens selbständig gehaltene und für die Darlegung der Hauptträgheitsaxen entscheidende „Theoria motus corporum solidorum" (1765) ergänzt, aber hiedurch noch nicht vollendet. Einige Jahre nach jener Eulerschen Arbeit erschien d'Alemberts „Traité de dynamique" (Paris 1743), in welchem das bekannte noch jetzt nach dem Namen des Verfassers bezeichnete Princip, die Gleichungen der Bewegung nach den Bedingungen des Gleichgewichts anzusetzen, seinen Ausdruck fand. Der nächste wichtige analytische Schritt, der zugleich für die mathematische Formgebung Epoche machte, geschah durch Lagranges „Mécanique analytique", welche zuerst 1788 und in einer zweiten zu drei Vierteln vollendeten Revision und Umarbeitung 1811—15 erschien.

Um die weniger entscheidenden, aber grade in der Mechanik durch den Gegensatz der Auffassungsart charakteristischen Arbeiten der Engländer nicht ganz zur Seite zu lassen, so sei an Maclaurins Werk „A complete system of fluxions" (Edinburg 1742) erinnert, worin die neue Infinitesimalrechnung nebst mechanischen Anwendungen im Anschluss an die Newtonsche Anschauungsweise dargestellt wird. Wäre es hier unsere Aufgabe, die Geschichte der Analysis um ihrer selbst und nicht blos um der Mechanik willen zu berühren, so würden wir nicht unterlassen dürfen, hervorzuheben, woher die Taylorsche Reihe stammt, und dass seit Newtons eignem Vorgang die Methode der Reihen bei den Engländern der Ausgangspunkt für das analytische Denken gewesen ist. Lagrange kam in seiner Theorie der analytischen Functionen (zuerst 1797, 2. Aufl. 1813) ebenfalls auf die Methode der Reihen, als auf die Grundform, von der für die Entwicklung der Differential- und Integralrechnung sowie aller davon abhängigen geometrischen und mechanischen Begriffe auszugehen sei. Dagegen behielt er in der Analytischen Mechanik auch in der zweiten Bearbeitung die herkömmlichen Vorstellungsarten infinitesimaler Natur ohne Einmischung der Reihen bei.

90. Wenn man sich eine Skizze von den Anwendungen der Analysis auf die Mechanik machen will, so muss man sich zurückrufen, dass Descartes die analytische Geometrie in Gang gebracht und so die Vorbedingungen geschaffen hatte, vermöge deren später die mit dem letzten Viertel des 17. Jahrhunderts auftretende Analysis des Unendlichen oder, wie man auch sagen könnte, des stetig Veränderlichen eine fruchtbare und schliesslich rein schematische Anwendung erfahren konnte. Eines der Haupterfordernisse zur Verallgemeinerung der analytischen Behandlung mechanischer Probleme musste der Gebrauch von drei rechtwinkligen Coordinatenaxen sein. Merkwürdigerweise hat sich die Regel, die Bewegungen in dieser Weise auszudrücken, erst verhältnissmässig spät und zuerst von einer Seite eingeführt, wo man die Neigung zum abstracten Schematismus und zu durchgreifenden Verallgemeinerungen am wenigsten vermuthet, nämlich bei Maclaurin. Obwohl sich z. B. Euler noch mit der jedesmaligen besondern Lage der dem Problem eigenthümlichen Richtungen, also etwa mit den tangentialen und normalen Projectionen der Kräfte beschäftigt, so ist doch schwer anzugeben, durch welchen Schritt es in der stetigen Entwicklung zu der grundsätzlichen Beziehung aller Bewegungen auf ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem gekommen sei. Es ist sehr begreiflich, dass sich ausser der Wendung bei Maclaurin Spuren für die Annäherung an einen solchen allgemeinen Gesichtspunkt verschiedentlich vorfinden. Es ist aber auch ebenso natürlich, dass man bei der anfänglichen Behandlung der Probleme auf die gleichsam natürlichen, durch das Bedürfniss sich von selbst ergebenden Coordinaten verfiel und in den analytischen Formulirungen hiebei noch eine Zeit lang festgehalten wurde. Die Bewegung in dem Punkt einer krummlinigen Bahn darauf ansehen, wie sie sich zur Tangente und Normale dieses Punkts stelle, oder wie so zu sagen ihre Projectionen auf diesen beiden Richtungen beschaffen seien, heisst ebenfalls den Vorgang nach Maassgabe von Coordinatenaxen untersuchen. Die letztern sind in diesem Fall nur so gewählt, dass sie mit der Tangente und der Normale zusammenfallen, und dass eine dritte Axe stillschweigend ebenso als überflüssig erscheint, wie wenn man allein in der Ebene und nicht im Raume operirt. Die naturwüchsigen Gesichtspunkte enthalten immer derartige Vereinfachungen, wo die Sache es erlaubt, und man hat in neuster Zeit eine solche Betrachtungsart mit Recht als diejenige gerühmt,

die den Gegenstand an sich selbst ins Auge fasse, ohne die Imagination mit unwesentlichen Hülfsgrössen zu belästigen.

Dennoch müssen wir es in einer andern Hinsicht als Fortschritt betrachten, dass sich die allgemeine Auffassung der Bewegungen nach den drei aufeinander rechtwinklig genommenen Dimensionen des Raumes eingeführt hat. Das stillschweigende Coordinatensystem, welches der Vorstellung jeglicher Bewegung unwillkürlich zu Grunde liegen muss, hat hiedurch einen bewussten rationellen Ausdruck erhalten. Der Begriff der Bewegung selbst ist erst durch die Beziehung auf drei als absolut fest gedachte Axen ausser Zweifel gestellt, d. h. er kann für die Mathematik und Mechanik nicht mehr zweideutig sein, sobald die Lageveränderung gegen diese in Gedanken fixirten Axen sein Merkmal und auch seinen Inhalt bildet. Ausserdem ist aber der Gebrauch der Axen auch zugleich die allgemeinste Form der Kräftezerlegung und Kräftezusammensetzung oder, mit andern Worten, der Ersetzung der wirklichen Kräfte durch äquivalente Gruppen solcher Kräfte, die nach Richtung der Axen wirken. Endlich hat der Gebrauch dieser festen Beziehungslinien fast unwillkürlich dazu geführt, das im Parallelogramm der Kräfte enthaltene Princip oder das, was wir die Richtungsreduction einer Kraft genannt haben, in seiner ganzen Tragweite zu zeigen und namentlich bemerklich zu machen, wie sich die verschiedenen mechanischen Begriffe (Beschleunigung, Geschwindigkeit, durchlaufener Raum, Beschleunigungskraft, Bewegungsgrösse, lebendige Kraft, ja schliesslich die moderne Vorstellungsart der mechanischen Arbeit) in der Uebertragung der zugehörigen Elementar- und Gesammtgrössen auf die Axen verhalten müssen. In dieser Hinsicht sind sogar wichtigere allgemeine Sätze, wie derjenige von der Projection der Bewegungsgrössen, die während einer bestimmten Zeit erzeugt werden, solche Einsichten, wie sie sich bei der durchgängigen Betrachtungsart nach Coordinatenaxen auch ohne andere Veranlassung hätten ergeben müssen.

Es versteht sich von selbst, dass jede genügende Combination fest gedachter Beziehungsörter ein in der Mechanik mögliches Coordinatensystem ergiebt, und dass ausserdem die relative Bewegung nur eine solche ist, bei welcher man das System der Coordinatenaxen, auf welches man sie bezieht, selbst wiederum auf ein anderes als fest gedachtes System bezogen und gegen dasselbe in Bewegung begriffen denkt. Beide Punkte, sowohl die

Mannichfaltigkeit der Coordinatensysteme als auch die Combinationen beweglicher mit unbeweglichen Systemen, kümmern uns nicht an sich selbst, sondern nur insoweit, als sie mit der Feststellung gewisser Haupteigenschaften des Gleichgewichts und der Bewegung in Zusammenhang gebracht worden sind. Die rechtwinkligen Coordinaten sind die allernatürlichsten Mittel, jede translatorische Bewegung nach Maassgabe der drei Dimensionen des Raumes aufzufassen. Auch reichen sie in allen Fällen aus, und nur für die Vorstellung der Rotationen ist es natürlicher, statt der Abstände die Winkel zu messen und die sogenannten Polarcoordinaten zur Anwendung zu bringen.

Mit dieser eingehenderen Hinweisung auf die festen Beziehungsörter, gegen welche man die Oerter und Ortsveränderungen der Massen bestimmt, glauben wir einfürallemal an einen Punkt erinnert zu haben, dessen Bedeutung für die geschichtliche Entwicklung und schliessliche Verfassung der analytisch gestalteten Mechanik nicht unterschätzt werden darf.

91. Der Zeitabschnitt, mit welchem wir es jetzt zu thun haben, ist von vornherein mit Erörterungen und Streitigkeiten über gewisse allgemeine Vorstellungsarten der Principien oder vielmehr bestimmter umfassender Sätze erfüllt. Der berühmteste Streitpunkt dieser Art ist in seiner vornehmlich metaphysischen Seite von Leibniz ausgegangen und hat auch mehrfach diejenigen interessirt, welchen die Angelegenheiten der wissenschaftlichen Mechanik übrigens keine Sorge machten. Es ist dies bekanntlich der Streit um die Messung der Kräfte oder um die Art, wie die Erhaltung der Kraft zu denken sei. Die Einführung des Sprachgebrauchs, demzufolge Leibniz die blossen Druckgrössen oder Spannungen als todte Kräfte, die sich in der Bewegung entwickelnden Grössen aber als lebendige Kräfte bezeichnete, hat viel dazu beigetragen, der Controverse über die Schätzung der lebendigen Kräfte eine metaphysisch vage und daher im schlechten Sinne populäre Beimischung zu ertheilen. Auf diese Art ist der eigentliche Kern und das wahre zuerst von Huyghens, wenn auch noch ohne seinen späteren Namen aufgestellte Princip der Erhaltung der lebendigen Kräfte, in seinem für die Mechanik wesentlichen Inhalt oft zu Gunsten der Erörterung unbestimmt schweifender Vorstellungsarten in den Hintergrund gedrängt worden. Obwohl die entscheidende Idee schon in Galileis Vorstellung von der Wirkungsart einer Kraft wurzelte, so hat doch die Hereinziehung

des Gegensatzes metaphysischer Schulen dem Streit einen Umfang gegeben, der seinem wirklichen Gehalt und schliesslichen Ergebniss oder, wenn man lieber will, dem von ihm hinterlassenen Niederschlag nicht entsprach.

Eine ähnliche Neigung, wie sie der eben erwähnten Streitfrage zu Grunde lag, hat auch zur nebelhaften Aufstellung eines Princips der geringsten Wirkung geführt, indem Maupertuis einen Gesichtspunkt Fermats erneuerte und etwas wirr verallgemeinerte. Ja sogar das Princip der Erhaltung der Flächen ist nicht ohne eine Seite geblieben, welche ebenfalls als metaphysisch bezeichnet werden muss. Die Auffindung verborgener Naturgesetze im Hinblick auf leitende Zwecke, denen die Natur folge, war häufig der Beweggrund, den rein mechanischen Verhältnissen und Schematen eine über ihren Gehalt hinausgehende Bedeutung zu geben. Nur der Satz von der Bewegung des Schwerpunkts, der nebst dem Princip der Flächen seine Wurzeln schon in Newtons Aufstellungen hat, ist nicht in den Kreis der streitigen metaphysischen Vorstellungsarten gezogen worden. Uebrigens sind aber die schematischen Hauptsätze, die man gegenwärtig in der Dynamik als eine Art Principien der Bearbeitung der besondern Aufgaben voranzuschicken pflegt, sämmtlich eine Zeit lang der Gegenstand naturphilosophischer Erörterungen und Fassungen der angedeuteten Art gewesen. Von und seit Lagrange sind sie fast nur als abgeleitete Sätze und als Nothwendigkeiten in Frage gekommen, die sich auf die ersten Axiome der Mechanik zurückführen lassen. Jedoch hat man nach dem Vorgange Lagranges vorzugsweise ihre analytische Form ins Auge gefasst und sich um die rein logischen Beziehungen wenig gekümmert. So ist z. B. die Bezeichnung lebendige Kraft allgemein eingebürgert; aber sie ist dem heutigen Mathematiker nichts weiter als ein Wort, um das Product der Masse mit dem Quadrat der Geschwindigkeit zu bezeichnen. Er braucht gar keinen andern Gedanken dabei zu hegen und wird im Bereich der analytischen Mechanik dennoch nie in Verlegenheit gerathen.

Bei dieser Bewandtniss der Sache ist es nicht nur für die geschichtliche Darstellung, sondern auch für das gegenwärtige tiefere Verständniss des heutigen Inhalts der Mechanik nothwendig, die allgemeinen Formulirungen, die sich bis auf Lagrange ausbildeten, von drei Seiten zu untersuchen. Erstens müssen die eingemischten metaphysischen Beziehungen, dann der Gehalt an

rein mechanischen Sätzen und drittens noch besonders das Ergebniss an zugehörigen Gleichungen erwogen werden. Schliesslich wird diese streng unterscheidende Untersuchung noch nachzuweisen haben, wo sich das einfach Principielle in jenen typischen Hauptsätzen mit den sonstigen Axiomen der Mechanik berührt, und inwieweit gewisse Bestandtheile der allgemeinen Formulirungen jener Art darauf Anspruch haben, gleich ursprünglich an den gewöhnlichsten Axiomen als begleitende Umstände oder wesentliche Eigenschaften der einfachsten Fundamentalverhältnisse der Kräfte dargelegt zu werden. Dieser letztere Schritt wird über die historische Auffassung hinausgehen, aber zur kritischen Beleuchtung derselben unentbehrlich sein. Er wird z. B. zu zeigen haben, wie das Princip der geringsten Action schon in der gewöhnlichsten Kräftezusammensetzung, also im Parallelogramm der Kräfte gefunden werden könne, und wie mithin der Anspruch desselben darauf beschränkt werden müsse, ein Gesichtspunkt zu sein, aus welchem die mechanische Causalität bereits in den axiomatischen Wurzeln ihrer mannichfaltigen Gestaltungen aufgefasst werden kann.

Ausser denjenigen metaphysischen Erörterungen, die bei der technisch mathematischen Behandlung der mechanischen Fragen eingemischt wurden und die, wie bei Leibniz, unfruchtbar genug ausfielen, werden noch die Unternehmungen specieller Philosophen, wenn auch überwiegend nur als abschreckende Beispiele, zu erledigen sein. In den Gedankenkreis eines Metaphysikers wie Kant hatten die Reflexe der Newtonschen Naturphilosophie, wenn auch verworren, schon frühzeitig hineingespielt. Jedoch ist von dieser Seite nichts ausgegangen, was für die mechanischen Einsichten oder deren logische Auffassungsart irgend einen Gewinn gebracht hätte. Wohl aber ist die Untermischung und Verunstaltung der exacteren positiven Lehren eine jetzt leicht nachzuweisende Thatsache.

92. Ein wichtiger Fortschritt, dessen Abschluss sich jedoch erst in Lagranges Analytischer Mechanik zeigt, ist die grundsätzliche Ausdehnung der allgemeinen mechanischen Principien auf die Hydrostatik und Hydrodynamik. Allerdings hatte schon Galilei, wie wir (Nr. 43) gesehen haben, das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten auch bei dem Gleichgewicht der Flüssigkeiten erkannt und zur Anwendung gebracht; aber später war der allgemeine Gang in der Behandlung der Mechanik der Flüssigkeiten

wieder mehr darauf gerichtet gewesen, die Gesetze des betreffenden Gebiets aus specifischen, für den Fall der Flüssigkeiten besonders vorausgesetzten Principien abzuleiten. Allermindestens nahm man noch zuletzt die Gleichheit der Fortpflanzung des Drucks in allen Richtungen als axiomatischen Ausgangspunkt an. Nun ist es sichtbar genug die Entwicklung der analytischen Form der Flüssigkeitsmechanik gewesen, was schliesslich zur Einreihung der besondern Sätze unter die allgemeinsten Principien hingeleitet hat. Nachdem von Clairaut, d'Alembert und Euler im Anschluss oder wenigstens im Sinne der schon auf sehr allgemeine Principien, namentlich auf das der lebendigen Kräfte zurückgreifenden Hydrodynamik Daniel Bernoullis (1738) schliesslich die Gleichungen des Gleichgewichts und der Bewegung der Flüssigkeiten in ihrer differentiellen Form aufgefunden worden waren, konnte auch die Ableitung derselben aus den ganz allgemeinen Principien mechanischer Kräftewirkung nicht mehr lange auf sich warten lassen. Die Flüssigkeit musste als ein materielles System angesehen werden, in welchem das Verhältniss der Theilchen gegeneinander, d. h. die völlig freie Variabilität der gegenseitigen Verschiebungen, als die Grundeigenschaft in den Calcül und in die gewöhnliche mechanische Deduction aufgenommen wurde. Indem dies durch Lagrange geschah, wurde die Trennung, welche zwischen der Mechanik der tropfbar und der gasförmig flüssigen Materie einerseits und derjenigen der festen Körper andererseits bestanden hatte, vollständig aufgehoben. Die drei Aggregatzustände fanden sich hiemit rein mechanisch und derartig definirt, dass man auf dieselben die allgemeinen Principien ohne Weiteres anwenden konnte, wenn man nur jene definirten und dem Calcül zugänglich gemachten Verschiedenheiten gleich allen andern Mannichfaltigkeiten und Vorbedingungen, deren die Anordnung und Einrichtung mechanischer Systeme fähig ist, zur Geltung brachte.

Der Zug zur Verallgemeinerung, der sich in der eben berührten Thatsache bekundete, hat in der jetzt in Frage stehenden Periode auch fast in allen andern Richtungen gewirkt. Er hat die Mechanik zu einer abgesonderten, sehr abstracten Wissenschaft werden lassen, in welcher die technischen oder kosmischen Anwendungen, die man früher noch unmittelbarer vor Augen hatte, immer mehr als Bethätigungsstoff und immer weniger als eigentlicher Inhalt des Gebiets erscheinen. Dieser Entwicklungsgang hat einige Aehnlichkeit mit der ursprünglichen Ausbildung

einer reinen Mathematik. Die abstracte Mechanik kennt schliesslich nichts als örtlich verschieden arrangirte Massen, an denen Kräfte, d. h. Ursachen von Bewegungserscheinungen oder Bewegungshemmungen in bestimmten einfachen Entwicklungsformen wirken. Ihre Aufgaben bestehen alsdann darin, zwischen den Massen, den Zeiten und den Räumen in dem mannichfaltigen Spiel der möglichen Phänomene gewisse Grundbeziehungen und Eigenschaften abzuleiten, welche es erlauben, aus gegebenen Vorbedingungen auf die entsprechenden Wirkungen rechnend zu schliessen.

Die Vereinigung der Statik und der Dynamik, deren Nothwendigkeit wir schon früher bei verschiedenen Gelegenheiten, besonders aber im Hinblick auf das virtuelle Princip bemerkt haben, kommt mit dem d'Alembertschen Grundsatz in einem gewissen Sinne zu Stande. Die Wendung, mit welcher Lagrange das d'Alembertsche Princip dazu benutzte, aus der allgemeinen analytischen Formel der Statik einen gleich allgemeinen Ausdruck für die gesammte Dynamik zu bilden, machte es vollends sichtbar, dass die Dynamik nunmehr nur als eine Fortsetzung und Entwicklung der statischen Grundlagen erscheinen sollte. Auch handelte Lagrange zuerst die Statik ab und liess dann die Dynamik folgen. Indessen ist dieses Maass von Vereinigung, für welches allein das d'Alembertsche Princip das Bindeglied abgiebt, keineswegs genügend. Schon die Uebereinstimmung der allgemeinsten analytischen Ausdrücke weist auf eine weit innigere Verbindung der beiden früheren Abzweigungen eines und desselben Wissensstammes hin. Auch fehlt es gegenwärtig nicht an Spuren, dass die vollständige Vereinigung der Statik und Dynamik immer mehr eine Forderung der Angemessenheit der wissenschaftlichen Form werde.

93. Den Hauptanknüpfungspunkt für die wichtigsten Fortschritte der neuen Periode bildet aus der frühern Ueberlieferung der Huyghenssche Satz von der Gleichheit des Aufsteigens der Körper im statisch verbundenen oder im freien Zustande bis zur Fallhöhe. Dieser Satz, der nach Einführung des Leibnizschen Sprachgebrauchs den Namen eines Princips der Erhaltung der lebendigen Kräfte erhielt, und der an dem Problem des Oscillationscentrums seine Entstehung gefunden hatte, wurde in unserer Periode theils ein Gegenstand der weitern Zergliederung, theils ein ohne Weiteres verwendetes Mittel, um neue Aufgaben zu

lösen. In der letztern Verrichtung erscheint er besonders in der Hydrodynamik Daniel Bernoullis und spielt bei der Bestimmung der Bewegung der Flüssigkeiten in canalartigen Wandungen eine ähnliche Rolle, wie ursprünglich bei der Aufgabe, den Schwingungsmittelpunkt eines zusammengesetzten Pendels zu bestimmen. Wie in dem einen, so gelangt man auch in dem andern Fall erst allmälig zu Lösungen, die unmittelbar aus den ersten Principien der Mechanik herrühren und den Satz von der Erhaltung der lebendigen Kräfte nicht zum unbewiesenen Ausgangspunkt nehmen. Diese zergliedernde Arbeit bezog sich nun aber weit weniger auf den Begriff der lebendigen Kraft und der allgemeinen Art, wie sie in einem einfachen Falle wirkt und sich erhält, als vielmehr auf die Einmischung der statischen Beziehungen in die dynamischen Verhältnisse. Wir haben früher gesehen, wie das Problem des einfachen Pendels sich noch nicht weit von dem einfachsten Fall der Bewegung auf der schiefen Ebene entfernt, wie aber schon in dem aus zwei schweren Punkten zusammengesetzten Pendel eine Aufgabe höherer Art erwächst, indem zwischen den beiden Punkten eine gegenseitige, durch die feste statische Beziehung vermittelte Vertheilung der Antriebe der Schwerkraft eintritt. Es handelt sich also im Allgemeinen um die Beantwortung der Frage, wie sich dynamische Kräfte bei der Dazwischenkunft von statischen Beziehungen jener zusammengesetzten Art verhalten müssen. Die Beantwortung dieser Frage hat schon bei Jacob Bernoulli zur Bestimmung derjenigen Kräftetheile geführt, welche für sich allein, ganz abgesehen von der Bewegung, im Gleichgewicht sein müssen. Es sind dies bekanntlich die bei der gegenseitigen Vertheilung sogenannten verlorenen oder gewonnenen Kräfte, die im Vergleich zu einer etwaigen ganz freien Bewegung als abändernde Hemmungen oder Beförderungen der letztern erscheinen. In dieser Zergliederung der statisch sich aufhebenden Kraftelemente und in der Erfassung des Gegensatzes der wirklichen Bewegung und der unter Voraussetzung statischer Ungebundenheit erfolgenden Bewegung war aber schon bei Jacob Bernoulli der Kern von dem gegeben, was später verschiedentlich gewendet und ausgeführt, schliesslich aber als d'Alembertsches Princip zur allgemeinen Methode der Lösung dynamischer Aufgaben mit Hülfe der Gesetze der statischen Beziehungen geworden ist. Erinnern wir uns hiebei unserer ursprünglichen Wahrnehmung, dass, rein mechanisch und ohne Rücksicht auf die

Grösse und den Umfang der Anwendungen betrachtet, von vornherein derjenige Stamm von dynamischen Aufgaben die grössten Schwierigkeiten bot, in welchem sich die freie Bewegung mit statischen Gebundenheiten combinirte. In dieser Hinsicht ist der Weg der Geschichte von Galilei durch die Huyghensschen Leistungen gegangen, und die freie Gravitationsmechanik als die Fortsetzung der Dynamik ganz freier Bewegungen ist mehr zur Seite und ohne entscheidenden Einfluss auf die wichtigsten Probleme der combinirten Art geblieben. Auf diese Weise ist es völlig sichtbar, dass die Beziehungen der Statik und Dynamik die intimste Seite der fortschreitenden Erkenntniss darstellen, und wir werden daher auch vornehmlich aus diesem Gesichtspunkt gleich denjenigen Satz aufzufassen haben, an den sich auch übrigens das wesentlichste Stück der Principiengeschichte dieser Periode knüpft. Das Gesetz von der Erhaltung der lebendigen Kräfte wird aus sehr verschiedenen Gesichtspunkten die Grundlage unserer weiteren Darstellung bilden müssen.

Zweites Capitel.

Princip der Erhaltung der lebendigen Kräfte.

94. Die Erhaltung der lebendigen Kräfte ist eine Vorstellung, die sich in einen allgemeineren und einen specielleren Bestandtheil zerlegen lässt. Der erstere bezieht sich auf das Verhältniss von Entstehung und Ausgabe einer Kraftgrösse überhaupt und gilt zunächst für den sehr einfachen Fall eines frei bewegten, ohne Rücksicht auf seine Dimensionen und seine Form oder Massenvertheilung, also gewissermaassen als Punkt betrachteten Körpers. Der andere Bestandtheil der Vorstellung betrifft eine Verbindung von Körpern, welche nur durch einfachen Druck aufeinander wirken, also etwa, wie im Fall des zusammengesetzten Pendels, eine unveränderliche Stange bilden oder durch eine starre Linie verknüpft gedacht werden. Sowohl für die allgemeinere als die speciellere Gestaltung der Vorstellung hat Huyghens das Fundament gelegt. Er hat, wie wir früher (Nr. 58—59) ausgeführt haben, bei der Lösung der Aufgabe vom Schwingungsmittelpunkt das Princip des Aufsteigens zur Fallhöhe von vorn-

herein darauf zurückgeführt, dass aus Nichts keine Erhebungskraft entstehen könne, und dass daher unter allen Umständen ein Ueberschuss des Aufsteigens über die der anfänglichen Geschwindigkeit entsprechende Fallhöhe ein Widersinn sein würde. Huyghens hatte dieses Princip im unmittelbarsten Anschluss an Galileis Schema der Entstehungs- und Wirkungsart einer Geschwindigkeit im besondern Hinblick auf das Aufsteigen auf schiefen Ebenen erfasst und Angesichts seines Problems vom Oscillationscentrum dahin erweitert, dass auch die statische Verbindung an dem Inhalt desselben nichts ändern könne. Im verbundenen wie im freien Zustande, bei der Drehung um eine horizontale Axe wie ohnedies, könnte die Schwere keine verticale Erhebung bewirken, die nicht der Quantität nach in der durch ein gleiches Fallen erzeugten Geschwindigkeit ihren Ursprung hätte. Uebrigens bemerkte Huyghens auch die allgemeine Tragweite seines Princips, indem er, wie wir ebenfalls schon angeführt haben, daran erinnerte, dass es sich auch auf Flüssigkeiten anwenden lasse, — ein Wink, den später Daniel Bernoulli nicht unbenutzt gelassen hat.

Nach dieser Erinnerung an die Ausgangspunkte von Huyghens können wir behaupten, dass dieser geniale Förderer der Mechanik und Mathematik nicht etwa blos den besondern mechanischen Satz, den er bei der Auffindung des Oscillationscentrums benutzte, sondern auch die so zu sagen philosophische Grundanschauung von allgemeinerer Natur und Tragweite erkannt und formulirt habe. Die Folgezeit hat bis auf den heutigen Tag für die allgemeine, gleichsam logische Wahrheit, die dem Princip inwohnt, ebenfalls keinen andern Grund anzugeben vermocht, als dass eine Kraft nicht aus Nichts zu entstehen vermöge. Alle Erhaltungsideen, die in der neusten Zeit mit der Entdeckung der mechanischen Aequivalenzen der Wärmewirkungen hervorgetreten sind, enthalten in ihrem innersten Kern nur jenes Urprincip, auf welches sich schon Huyghens berief, und dessen Tragweite er schon in einem erheblichen Umfang abzusehen vermocht hatte. Jedoch hat er sich mit der principiellen Erörterung der metaphysischen Seite nicht weiter abgegeben. Ihm genügte die gleichsam logische Beglaubigung der Vorstellung, und bei der besondern Anwendung sah er in der Beziehung der Quadrate der Geschwindigkeiten zu den Fallhöhen, d. h. in deren Gleichheit mit der doppelten Fallhöhe, natürlicherweise nichts weiter als die

von Galilei festgestellte Wirkungsart der Schwere. Obwohl er die Producte der Massen mit den Quadraten der Geschwindigkeiten zu summiren hatte und die Unabhängigkeit dieser Summe von der Gebundenheit oder Freiheit der Bewegung für jeden Zeitpunkt erkannte, so hatte er doch keine Veranlassung, jene Art von Producten mit einem besondern Kunstausdruck zu bezeichnen.

95. Durch Leibniz (1646—1716) ist einerseits ein neuer Name der bereits vorhandenen Sache current geworden und andererseits die Versetzung des Gegenstandes mit dem Beiwerk metaphysischer Reflexionen eine Zeit lang in den Vordergrund getreten. Es war nur das Echo eines Galileischen Nebengedankens, wenn Leibniz den blossen Druck oder Zug, wie er im statischen Verhalten statthat, als „todte Kraft" bezeichnete und der letzteren die „lebendige Kraft" als Vertreterin der eigentlichen Kraftentwicklung gegenüberstellte. In Nr. 67 haben wir die Galileische Idee dargelegt. Uebrigens ist aber die Reflexion über den Unterschied der blossen Pressung durch ein grosses Gewicht und der Wirkungsgrösse, die durch einen kleinen Stoss entsteht, schon vom Alterthum her überliefert und an sich selbst von sehr geringer Bedeutung. Erst Galileis Vorstellung von der stetigen Häufung der Impulse im Stoss hatte dem Gedanken eine erheblichere Wendung gegeben, und Leibniz bezog sich auch ausdrücklich[1]) auf den Ausspruch Galileis, dass sich die Stosswirkung zum blossen Druck wie Unendliches zu Endlichem verhalte. Die „todte Kraft" Leibnizens, welche sich nur von dem bei Galilei vorkommenden peso morto herschrieb, hat vor der Geschichte keine Anerkennung gefunden; denn der Sprachgebrauch ist ohne diesen Ausdruck weit besser ausgekommen, indem schon das Sprachgefühl eine Bezeichnungsart abgewehrt hat, die ausser ihrer Ueberflüssigkeit auch noch den Nachtheil hatte, einer falschen Metaphysik Vorschub zu leisten. Dagegen ist die Wortcombination „lebendige Kraft", jedoch unter Entkleidung von jedem realen Sinn, zu einem rein analytischen Kunstausdruck geworden, um das Product der Masse mit dem Geschwindigkeitsquadrat zu bezeichnen. Diese völlige Entblössung von einer sachlichen und

[1]) Im Specimen dynamicum etc. zuerst in den Acta Erudit. 1695. Pertz-Gerhardtsche Ausg. von Leibniz' mathematischen Werken, Bd. VI Halle 1860, S. 238.

anschaulichen Vorstellung ist dadurch zu erklären, dass man nicht umhin gekonnt hat, mit der nur Verwirrung stiftenden und stets streitigen metaphysischen Interpretation, bei welcher Leibniz sogar die Entelechie des Aristoteles zu Hülfe gerufen hatte, überhaupt jegliche mehr als analytische Vorstellungsart zu verwerfen.

Der Streit über die sogenannte Kräftemessung, der sich stets nur in den Regionen der metaphysischen Umnebelung der Wissenschaft bewegt und die bereits vorhandenen sachlichen Hauptbeziehungen, wie die Huyghensschen und Newtonschen Ergebnisse, niemals berührt hat, lässt sich nur aus dem Umstande erklären, dass Cartesianische Naturphilosophen, die den sachlichen Inhalt des bereits gewonnenen Wissens nicht kannten oder nicht zu würdigen vermochten, eine bequeme Gelegenheit zur Producirung des Scheins einer neuen Kritik und der Widerlegung eines Descartesschen Philosophems boten, über welches schon Huyghens hinweggeschritten war. Der letztere grosse Denker hatte es nicht der Mühe werth gehalten, die Unzulänglichkeiten, Irrthümer oder Zweideutigkeiten der Descartesschen Vorstellungen und Ausdrucksarten besonders zu beleuchten. Leibniz liess sich diese Gelegenheit nicht entgehen und veröffentlichte ungefähr zwei Jahre nach dem Aufsatz über die Differentialrechnung eine Art Berichtigung des Cartesius[1]), derzufolge das, was sich in der Natur erhalte, nicht die Bewegungsquantität, d. h. nicht das Product von Masse und Geschwindigkeit sei, so dass die Kräfte nicht nach der von ihnen hervorgebrachten Geschwindigkeit, sondern nach den Quadraten der Geschwindigkeiten zu messen wären. Cartesius hatte die vage, aber zufällig richtige Idee gehabt, dass die Grösse der Kraft im Sinne der Actionsmenge durch das Product von Gewicht und Erhebungsraum vorgestellt werde. Er selbst hatte sich aber nur mit virtuellen, in statischen Fragen vorkommenden Bewegungen beschäftigt und überdies von der Galileischen Dynamik nichts begriffen. Indem nun Leibniz den eignen Satz des Cartesius im Hinblick auf die Galileischen Fallgesetze interpretirte, erhielt er die Grundvorstellung Descartes' in einer neuen Form. Er substituirte dem Cartesischen Product aus Gewicht und Erhebung, unter ausdrücklicher Berufung auf Galilei, dasjenige, welches sich sofort ergiebt, wenn man bedenkt,

---

[1]) Brevis demonstratio etc. in den Acta Erudit. 1686. Angef. Ausg. der Werke, Bd. VI, S. 117.

dass die Wege den Quadraten der bei dem Anfange des Aufsteigens vorhandenen Geschwindigkeiten proportional sind. Wenn es, wie Cartesius vorausgesetzt hatte, dasselbe ist, das einfache Gewicht zur vierfachen Höhe, oder das vierfache Gewicht zur einfachen Höhe zu befördern, so folgt hieraus, dass es auch dasselbe ist, das einfache Gewicht mit der doppelten und das vierfache Gewicht mit der einfachen Geschwindigkeit aufsteigen zu lassen. Es verhalten sich also die Wirkungsgrössen, insofern sie in der Aufbrauchung und Bethätigung gegebener Geschwindigkeiten bestehen und nach dem Weg des Gewichts veranschlagt werden, wie die Geschwindigkeitsquadrate. Warum aber die adoptirte Cartesische Voraussetzung, das Product von Weg und Gewicht, d. h. im heutigen Sinne die Arbeit, für die Kräfteschätzung maassgebend sein solle, wusste Leibniz, wie man auch noch speciell aus seinen nachgelassenen Piecen sehen kann, nicht weiter als Cartesius selbst aufzuklären. Er nahm sogar seine Zuflucht zu den ganz ungeeigneten rein statischen Verhältnissen an den einfachen Maschinen. Durch ein Missverständniss dieser statischen Verhältnisse war Descartes dazu gelangt, das virtuelle Princip so auszudrücken, dass der Werth der Kraft in dem Product von Gewicht und Erhebung bestände. Der dynamische Sinn, der in dieses Product gelegt werden musste, war dem Urheber der allgemeinen Vorstellung fremd geblieben, und der spätere Ausleger, der es in diesem neuen Sinne nahm, wusste wiederum nicht, wie er es nach dieser Sinnesveränderung mit tieferen Gründen unterstützen sollte.

Wenn man die Kraft als vermittelnden Begriff ausmerzt, so verschwindet die metaphysisch scholastische Seite der Messungsfrage, und es handelt sich um nichts weiter als um die Bestimmung des Quantitativen in den verschiedenen Arten der Wirkungen. Die Actionsmenge im Sinne der stetigen Summation der elementaren Wirkungsgrössen entspricht dem halben Product aus Masse und Geschwindigkeitsquadrat; aber die Aufhäufung einer Geschwindigkeit im Galileischen Sinne bleibt die einfachste Wirkungsgattung, nach welcher man zunächst bei allen Phänomenen zu fragen hat. Merkwürdigerweise hat eine gewisse Bizarrerie der Geschichte nicht die wirkliche Actionsgrösse, welche dem halben Quadrat der Geschwindigkeit entspricht, sondern in Folge des Hinblicks auf blosse Proportionalitäten das Product aus dem ganzen Quadrat und der Masse, also die doppelte Actionsgrösse zum

Kraftrepräsentanten gestempelt. Es würde eine naturgemässe Rückgängigmachung dieses von Leibniz veranlassten Missgriffes sein, wenn es den Schriftstellern, die gegenwärtig das halbe Product als Selbständigkeit hervorheben, gelingen sollte, auch eine Vertauschung des Sprachgebrauchs einzuleiten. Der Ausdruck lebendige Kraft bedeutet so zu sagen nur Massengeschwindigkeitsquadrat, und sollen sich richtige reale Vorstellungen einbürgern, so wird man von Actionsmenge, Arbeit, Energie u. dgl. und diesen Begriffen entsprechend von dem halben Product zu reden und sich darauf zu besinnen haben, wie das als ganz genommene Product real gar nicht vorhanden, also auch nicht Gegenstand der Erhaltung ist. Hienach ist die Bezeichnung als lebendige Kraft sogar logisch fehlerhaft, und es wäre am besten, mit der todten auch die falsche lebendige Kraft von Leibniz zu begraben.

Dieselbe nebelhafte Ungenauigkeit, welche der Leibnizschen Metaphysik des Infinitesimalen anhaftet, hat auch in seinen Vorstellungen über die Aufbrauchung der Geschwindigkeiten einen Mangel an Strenge und eine Zweideutigkeit veranlasst, deren Folgen sich zwar nicht in gleicher Weise, wie die falsche Metaphysik des Differentialcalcüls, bis heute vererbt, aber doch vielfach dazu beigetragen haben, die naturgemässe Fassung der mechanischen Grundbegriffe zu erschweren. Leibniz wollte in der That aus einer unendlichen Wiederholung von dem, was er todte Kraft nannte, mithin aus einer unbegrenzten Vielheit von statischen Verhältnissen die Wirkungsreihe, also in seinem Sinne die Entwicklung der lebendigen Kraft hervorgehen lassen. Dies ist nun ungefähr dasselbe, wie wenn Jemand eine Linie aus der Häufung unendlich vieler ausdehnungsloser Punkte begreifen wollte. Das Element der Actionsgrösse oder lebendigen Kraft ist selbst eine während des Zeitelements dauernde Action und entspricht dem Product aus der Bewegungsquantität mit dem Differential der Geschwindigkeit. Leibniz hat niemals streng und unzweideutig den Satz berücksichtigt, dass auch im Unendlichkleinen eine die Kräfteverhältnisse ändernde Actionsentwicklung stattfindet. Seine unbestimmten und doppelseitig schwankenden Wendungen haben ihn bald das Eine, bald das Andere aussprechen lassen, ohne dass hiebei jemals eine entschiedene, auf dem Bewusstsein der auszuschliessenden Widersprüche beruhende Vorstellungsart zu Tage getreten wäre.

Neben der eigentlichen Kräftemessung bilden die Erhaltungs-

ideen einen relativ selbständigen Gedankenkreis. In dieser Beziehung ist nun Leibniz dem allgemeinsten Motiv von Huyghens, nämlich dem Satze gefolgt, dass eine Action nicht aus Nichts entstehen könne. Die Benutzung dieses Grundes lag dem deutschen Philosophirer um so näher, als er sich ja speciell mit der Umarbeitung des Spinozischen Causalitätsgesetzes und der Formulirung desselben als eines Satzes vom zureichenden Grunde beschäftigte. Ausserdem betonte er die Stetigkeit, deren Begriff in der strengen mathematischen Anschauung der Naturphänomene unvermeidlich ist, und über welche schon Galilei sehr zutreffend gedacht hatte. Indem Leibniz die Galileische Zerlegung des Stosses in eine Unendlichkeit von Elementarimpulsen adoptirte und dieselbe mit den Feststellungen der Stossgesetze durch Huyghens und Andere combinirte, gelangte er zu der Fixirung der naheliegenden allgemeinen Vorstellung, dass die Entwicklung der lebendigen Kraft immer mit einer Aufzehrung des Wirkenden an einem Widerstande verbunden sei. Hieran schloss sich für den Stoss die logische Consequenz: „Was durch die kleinen Theile absorbirt wird, gehe keineswegs absolut für das Universum verloren, obwohl es für die Gesammtkraft der zusammenstossenden Körper verloren geht"[1]. Diese Folgerung ist unter denen, die auf dem Wege der Leibnizschen Metaphysik lagen, wirklich die beste unter den möglichen gewesen; denn obwohl sie keineswegs eine Vorwegnahme der heutigen Anschauungsweise war, so enthielt sie doch zufällig eine Wahrheit, die sich gegenwärtig aus der Mechanik der Wärme besser nachweisen lässt. Auch dürfen wir nicht vergessen, dass Leibniz die Kräfte für Substanzen im metaphysischen Sinne dieses Worts ansah, und dass es ihm auf diese Weise leicht wurde, die Unverlierbarkeit derselben zu behaupten. Die unzutreffende Metaphysik hatte also hier mehr Antheil gehabt, als etwa die logische Consequenz eines in quantitativer Bestimmtheit genommenen Causalitätsgesetzes oder, mit andern Worten, eines Satzes vom zureichenden Grunde der Quantitäten.

96. Johann Bernoulli (1667—1748) ist unter den berühmteren Mathematikern derjenige, dessen Denkungsart praktisch und theoretisch der Leibnizschen am meisten verwandt war, und der

---

[1]) Schlussworte des erst neuerdings gedruckten, aus der Zeit des Streits mit den Cartesianern herrührenden Aufsatzes Essai de dynamique etc. Angef. Ausg. der Werke, Bd. VI, S. 231.



es sich auch besonders angelegen sein liess, die fraglichen metaphysischen Ideen zur Geltung zu bringen. In seiner bekannten Preisabhandlung von 1723 über die Mittheilung der Bewegung definirt er die lebendige Kraft als „diejenige, welche in einem Körper residirt, wenn er in gleichförmiger Bewegung ist“ [1]). Man sieht, dass zwar nicht gesagt ist, die Bewegungsquantität oder Trägheitsbewegung einer Masse sei die lebendige Kraft, wohl aber, dass sie dieselbe enthalte. Die Bewegungsquantität ist als Ursache einer Actionsmöglichkeit gedacht, die sich im Falle des Widerstandes verschiedentlich verwirklichen kann; aber dieser allgemeine Gesichtspunkt trifft auch bei einem ruhenden Körper zu, der zur Reaction veranlasst wird. Dennoch wird man im letzteren Falle keine lebendige Kraft voraussetzen, da ja die Geschwindigkeit und mit ihr das fragliche Product Null ist. Ferner sagt J. Bernoulli von der lebendigen Kraft: „Sie ist äquivalent demjenigen Theil der Ursache, welcher sich in ihrer Hervorbringung aufzehrte (s'est consumée en la produisant)“ [2]). Bei der allgemeinen Ursache ist hier an eine Naturkraft überhaupt gedacht und ihr die besondere, quantitativ begrenzte Action gegenübergestellt. Nachdem davon die Rede gewesen, wie jeder elementare Verlust einer elementaren Mittheilung entspreche, heisst es [3]): „In dieser Gleichheit besteht die Erhaltung der Kräfte der in Bewegung befindlichen Körper.“ Ueberhaupt wird die Gleichheit von Ursache und Wirkung in Bezug genommen, und wir dürfen uns daher nicht überrascht finden, wenn J. Bernoulli [4]) gradezu erklärt: Es würde das Gesetz der Erhaltung der lebendigen Kräfte verdunkeln heissen, wenn man es zu beweisen versuchte.

Die Voraussetzung von Leibniz, dass es in der Natur keine strenge Ruhe gäbe, führte bei J. Bernoulli auf einen bemerkenswerthen Abweg. Er stellt sich nämlich vor, dass der ruhende Körper fortwährend im Bestreben (effort) begriffen sei zu fallen, und dass er unendlich kleine Geschwindigkeitsgrade erhalte, die aber im Entstehen vergehen und im Vergehen wiederentstehen (périssent en naissant et renaissent en périssant) [5]). Ein solcher Process, in welchem der Begriff des Unendlichkleinen eine unzu-

---

[1]) Discours sur les lois de la communication du mouvement, Opera, 4 Bde., Lausanne 1742, Bd. III, Cap. 3, S. 23.

[2]) Ibid. Cap. 5, Nr. 3, S. 36. [3]) Ibid. Nr. 8, S. 38.

[4]) Ibid. Cap. 10, Nr. 1, S. 56. [5]) Ibid. Cap. 5, Nr. 2, S. 35.

treffende Rolle spielt, ist natürlich kein Antagonismus wirklicher sehr kleiner Oscillationen, sondern nur die Formel eines unvereinbaren Widerspruchs.

Während Johann Bernoulli die innern Vorgänge und metaphysischen Betrachtungsarten nach dem Vorgange von Leibniz in den Vordergrund stellte, begann sein Sohn Daniel Bernoulli damit, die allgemeinen metaphysischen Gesichtspunkte für sehr gleichgültig zu erklären und sich ausschliesslich an die Huyghenssche Form des Conservationsgesetzes, also an die Gleichheit des Fallens und Aufsteigens zu halten, die ohne Rücksicht auf die Freiheit oder Gebundenheit stattfände. Der Vater hatte in dem Huyghensschen Satze nur eine Folge des allgemeinen Princips der Erhaltung der lebendigen Kräfte gesehen, welches er eines eigentlichen Beweises gar nicht für bedürftig oder fähig hielt. Daniel Bernoulli wollte sich dagegen des Huyghensschen Princips ebenso wie der Urheber desselben bedienen, um seine hydrodynamischen Aufgaben zu lösen, und es kam ihm sogar darauf an, den Engländern oder andern Gegnern der Leibnizschen Wendungen und Redeweisen gegenüber auf den reinen Huyghensschen Gedanken zurückzukommen. Er war der Ansicht, dass man in der Hauptsache überall einig sei, und dass die unpraktischen Differenzpunkte in der Vorstellungsart die Mühe des Streits nicht lohnten.

In den Präliminarien seiner Hydrodynamik, welche die gemeinsamen Principien der Hydrostatik und Hydraulik beleuchten sollen, erklärt er, das vorzüglichste der von ihm gebrauchten Principien sei das der Erhaltung der lebendigen Kräfte, oder wie er sage „der Gleichheit zwischen dem thatsächlichen (actuellen) Herabsteigen und dem möglichen (potentiellen) Aufsteigen.“ Er wolle durch diese Ausdrucksart den Anstoss bei denen vermeiden, welche durch das Wort lebendige Kraft aufgeregt würden. An derselben Stelle[1]) giebt er kurz und treffend die geschichtlichen Hauptmomente der Entwicklung des Princips an. Er kennt den Zusammenhang zwischen Galilei und Huyghens und zeigt in den Worten des letzteren die vollständige Formulirung des Princips. Unter Berufung auf seine einschlagende Petersburger Akademieabhandlung (Bd. I dieser Verhandlungen S. 131 fg.) behauptet er resümirend, dass in der ganzen Leibnizschen Doctrin nichts sei, was nicht auch Alle thatsächlich in ihrer eignen Sprechweise

---

[1]) D. Bernoulli, Hydrodynamica, 1738, Sect. I, § 18 fg.

hätten. Hiemit sieht er von der Vorstellungsart ab und hält sich nur an den mechanischen Satz der Gleichheit des thatsächlichen Fallens und des möglichen freien, von der Verbindung gelösten Aufsteigens der Körper, wie sie von Huyghens im Hinblick auf das zusammengesetzte Pendel vorausgesetzt worden war.

In einem zehn Jahre nach der Hydrodynamik unter den Abhandlungen der Berliner Akademie veröffentlichten Aufsatz mit der Ueberschrift „Bemerkungen über das in einem allgemeinen Sinne genommene Princip der Erhaltung der lebendigen Kräfte“ [1]) redet D. Bernoulli von einem grossen Princip der Natur, beschränkt sich aber auch hier, ohne in die Gründe desselben einzugehen, auf eine Bewährung desselben in erweiterten Anwendungen. Er behandelt dort ganz allgemein den Fall der gegenseitigen Attractionskräfte, die sich nach einem beliebigen Gesetz mit der Entfernung ändern. Das principiell Wichtigste ist hiebei der Uebergang von der constanten Kraft zur veränderlichen. Die Proportionalität der Geschwindigkeitsquadrate mit den Wirkungsräumen war ja von dem gewöhnlichen Fallschema, also von dem Beispiel einer constanten Kraft abstrahirt worden, und es musste mathematisch gezeigt werden, dass auch die Actionsmenge der nicht constanten Kraft dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional sei und mit dem zurückgelegten Weg, d. h. der gegenseitigen Annäherung der einander anziehenden Massen in Beziehung stehe.

Anwendungen der Principien sind keine Analysen derselben. Aus diesem Grunde hat der vielfache Gebrauch, den D. Bernoulli in seiner Hydrodynamik von dem Satz der Erhaltung der lebendigen Kräfte macht, für uns kein besonderes Interesse. Von Wichtigkeit ist höchstens die Art und Weise, in welcher das Princip eingeführt wird. Es bleibt durch das ganze Werk hindurch eingestandenermaassen eine unmittelbare Voraussetzung, von deren Berechtigung keine zergliedernde Rechenschaft gegeben wird. Die Form, unter der es erscheint, ist beständig die Vorstellung, dass die potentielle Erhebung (ascensus potentialis) dem actuellen Fall einer Flüssigkeitsmasse gleich sein müsse. In dieser Gestalt dient es dazu, die Gesetze des Ausfliessens und der Oscillationen der Flüssigkeiten festzustellen. Natürlich bemerkt D. Bernoulli, dass wie bei dem Stoss auch in diesen Fällen ein grösserer

[1]) Histoire de l'Académie de Berlin, für 1748, S. 356 fg.



oder geringerer Verlust an lebendiger Kraft physikalisch unvermeidlich sei, und dass die experimentellen Ungleichheiten zwischen dem Aufsteigen und dem Fallen zum Theil auf diese Absorption der lebendigen Kraft durch die Tenacität der Theilchen zurückzuführen seien. Im letzten Abschnitt seines Werks rechnet D. Bernoulli mit den auf eine gemeinsame Richtung bezogenen Bewegungsquantitäten ganz zutreffend. In der vorletzten (zwölften) Section war er überhaupt zur Erkenntniss der statischen Beziehungen innerhalb des Gebiets hydraulischer Verhältnisse gelangt und hatte diese, ihm beim ersten Niederschreiben der früheren Partien des Werks noch nicht klar gewesenen Auffassungsarten als eine neue Statik und, wie er sie auch nennt, Hydrauliko-Statik eingeführt. Wir erwähnen diese Umstände nur um des Gegensatzes willen, in welchem sie zu der durchgängigen unmittelbaren Anwendung des Erhaltungsprincips stehen. Dieses letztere, welches namentlich im siebenten und achten Abschnitt seine bemerkbarsten Dienste leistet und dort auf die verwickelteren Bewegungen aus Gefässöffnungen angewendet wird, hätte in seinen innersten Gründen aufgefasst werden können, wenn die Aufhäufung und Erschöpfung von Bewegungsquantitäten, also die auf die Elemente der Vorgänge bezüglichen, sich an die Statik anlehnenden Verhältnisse der Pressungsveränderungen von vornherein zum principiellen Ausgangspunkt gemacht worden wären. Man vergleiche in beiden Beziehungen, d. h. für das Raisonnement aus den Bewegungsgrössen und für dasjenige aus den lebendigen Kräften besonders § 17 der letzten und § 3 (regula II) der achten Section. Ein besonderes Eingehen auf diese Anwendungen würde uns des speciellen, hydrodynamischen Gegenstandes wegen zu weit auf erläuternde Hülfserörterungen ablenken.

97. Das Huyghenssche Princip der Erhaltung bezog sich nicht auf ein einzelnes bewegtes Object, sondern auf ein statisch verbundenes System. Es enthielt mithin eine Idee mehr, als wir bis jetzt untersucht und besonders in der Leibnizschen Auffassung vertreten gefunden haben. Es schloss den Gedanken ein, dass die blos statischen Pressungen zwar die Vertheilung, aber nicht die Gesammtsumme der Kräfte zum Aufsteigen alteriren. Der Schwerpunkt der z. B. im zusammengesetzten Pendel vereinigten Körper, die in Verbindung gefallen sind und unverbunden nun wieder vermöge der erlangten Geschwindigkeit in die Höhe getrieben werden, steigt wieder zur ursprünglichen Höhe auf. Die

Möglichkeit des Aufsteigens wird von Huyghens nach seinem Princip auf zweifache Weise gedacht. Sie drückt sich nämlich einerseits durch die einzelnen Producte aus Gewicht und Höhe oder Masse und Geschwindigkeitsquadrat aus, und andererseits wird die Summe dieser einzelnen Producte als die Gesammtkraft des Aufsteigens gefunden, wenn man die Bewegung des Schwerpunkts auf die gewöhnliche Art nach der Bewegung der einzelnen Massen bestimmt. Wird nun das Princip vorausgesetzt, so gilt die nämliche Productensumme für beide Kraftvorstellungen oder, mit andern Worten, es ist die lebendige Kraft des Systems trotz der statischen Gebundenheit für jeden beliebigen Augenblick dieselbe, als die Summe der lebendigen Kräfte seiner einzelnen, als frei vorausgesetzten Theile. Sehr häufig wird das Princip der Erhaltung der lebendigen Kräfte grade im Hinblick auf diese Gleichgültigkeit einer statischen Wechselwirkung der Kräfte verstanden. Die Intervention dieser statischen Wechselbeziehung hindert nicht die Erhaltung derselben Menge lebendiger Kraft, — dies ist die zweite Idee, auf welche alle Diejenigen den Ton legten, welche in ihren Vorstellungen vornehmlich den Huyghensschen Grundlagen folgten. Man muss gestehen, dass für die Erweiterung der mechanischen Erkenntniss dieser zweite Bestandtheil des Princips die grössere Wichtigkeit hat, und eine tiefere Untersuchung wird auch zeigen, dass es streng genommen gar kein Actionsverhältniss von zwei Kräften geben könne, bei welchem nicht schon in einem gewissen Sinne die Frage entstünde, wie die statischen Beziehungen, die der Entwicklung der Kräfte als gleichsam vorangehend gedacht werden können, diese Kräfteentwicklung selbst beeinflussen oder für dieselbe gleichgültig bleiben. Selbstverständlich sind diese statischen Beziehungen in jenem allgemeineren Sinne zu verstehen, in welchem die innere Spannung oder Pressung für einen dauerlosen Zeitpunkt, oder wie man sonst dieses Verhältniss der innern Beziehung nennen möge, vollkommen genügt, um die der Bewegungsentwicklung vorangehenden Kräfteverhältnisse zu kennzeichnen. Das eigentliche Gleichgewicht besteht dagegen in der dauernden Gleichheit solcher, sonst nur als streng momentan betrachteten innern Spannungen oder Druckintensitäten.

Die Zergliederung, welche die Huyghenssche Anwendung des Princips auf die Aufgabe vom Schwingungsmittelpunkt besonders durch Jacob Bernoulli erfahren hat, kann für dieses Princip selbst

Zweierlei lehren. Erstens hat sie gezeigt, wie schwierig es gewesen, die tiefern Gründe der Gleichgültigkeit der statischen Beziehungen nach den gewöhnlichen mechanischen Grundsätzen sichtbar zu machen, und zweitens hat sich aus ihr ergeben, dass, sobald über die statische, d. h. streng momentane Gestaltung der Kräfteverhältnisse entschieden ist, die sich anschliessende Entwicklung der in dieser Art geordneten Kräftegruppe zu einer Actionsmenge keine andere Idee erfordert, als das gewöhnliche Galileische Schema der Kräftebethätigung. Auf diese Weise ist so zu sagen das Problem der Zusammensetzung lebendiger Kräfte mit Rücksicht auf die Massen vermöge beliebiger Verbindungen gelöst und so zugleich die Grundlage für ein neues Princip der vereinigten Behandlung der Statik und Dynamik, zunächst aber der Auflösung dynamischer Probleme nach dem Schema statischer Beziehungen gewonnen worden. Was d'Alembert später in einer besondern Regel formulirte, ist im Wesentlichen schon in Jacob Bernoullis Zergliederung vorgebildet gewesen, und der tiefere Grund dieser Fortschritte hat darin gelegen, dass man das statische Bindeglied fand, um die Actionsmengen oder lebendigen Kräfte, unbeirrt durch ihre statische Combinationsart, vereinigen und auf diese Weise die Gesammtbewegungen entwickeln zu können.

98. Schon Nr. 58 haben wir die Einwendungen gegen die Huyghenssche Lösung vom Schwingungspunkt berührt, durch welche Jacob Bernoulli zu wiederholten und schliesslich gelingenden Zergliederungsversuchen veranlasst wurde. Er ist der Aelteste jener Familiengruppe, die an der Geschichte der Mathematik und Mechanik einen so erheblichen Antheil genommen hat. Obwohl sein Leben (1654—1705) schon ein Jahrzehnt vor demjenigen von Leibniz endigte, so hat er doch in der Hauptfrage, die wir hier behandeln, die sachlich wichtigste Wendung durchgeführt. Von seinem jüngern Bruder Johann, den er zuerst in den Bahnen der Mathematik dirigirte, unterschied er sich im Allgemeinen und bezüglich unserer Frage dadurch, dass er sich fast gar nicht um die Verschiedenheit metaphysischer Vorstellungsarten, wohl aber um die Zurückführung der Thatsachen und der formal noch unvollständigen Lösungen auf die einfachen Principien der gewöhnlichen Mechanik bemühte. In diesem Sinne ist grade er derjenige gewesen, welcher über den Huyghensschen Satz und namentlich über die Erhaltung der lebendigen Kräfte, welche trotz der statischen Verbindungen stattfinde, das meiste Licht verbreitet hat. Die

Aufgabe vom Schwingungspunkt war von Huyghens vermittelst des Princips des gleichen Aufsteigens gelöst, und es kam nur darauf an, an die Stelle dieser noch immer dem Zweifel Raum gebenden Methode eine Ableitungsart zu setzen, welche an die ersten und bekannten Principien der Mechanik unmittelbar anknüpfte und des Erhaltungsprincips in der statisch complicirten Form gar nicht bedürfte. Gelang eine solche Ableitung, so war hiemit stillschweigend auch das Huyghenssche Princip selbst bewiesen, und es hätte demgemäss der Satz von der Erhaltung der lebendigen Kräfte auch fortan nicht als ein Axiom, sondern als ein beweisbarer Lehrsatz gelten müssen. Doch wie schon gesagt, hat Jacob Bernoulli selbst sich auf solche Bestimmungen und methodische Erörterungen gar nicht eingelassen, und es ist, wie wir aus dem späteren Verfahren Daniel Bernoullis und Anderer wissen, der Satz von der Erhaltung ohne Weiteres als ein unmittelbares Hülfsmittel und mithin das Princip des gleichen Aufsteigens auch ferner vielfach wie ein Axiom gebraucht worden. Jacob Bernoullis unmittelbare Absicht ging auch in der That gar nicht darauf aus, in erster Linie ein neues Princip abzuleiten, sondern richtete sich ganz einfach auf eine directere Lösung der Aufgabe vom Oscillationscentrum.

Der erste Schritt zu dieser directeren Lösung war noch mit einem erheblichen Irrthum verbunden, und es ist nur der allgemeine Gedanke, der hier von vornherein einen Werth hat und auch später der leitende Gesichtspunkt blieb. Die verworrenen und fehlerhaften Einwendungen, die ein Abt Catelan 1681—82 gegen Huyghens gemacht hatte, und die zu einer Art Controverse führten, veranlassten Jacob Bernoulli, sich zu betheiligen und sogar zunächst eine Demonstration vorzubringen, die, obwohl in ihrer Fassung sehr ungewiss gehalten, dennoch gegen die Richtigkeit der Huyghensschen Lösung zu sprechen schien. In dem betreffenden Aufsatz[1]), welcher über den Streit berichtet, giebt Jacob Bernoulli seine im Princip richtige, in der Anwendung aber falsche Ableitungsart der Geschwindigkeit des zusammengesetzten Pendels aus den Geschwindigkeiten seiner Theile. Er denkt sich in der einfachsten Weise an der starren, um die Axe rotirenden Linie in verschiedenen Entfernungen vom Aufhängungspunkt zwei gleiche

[1]) Jacob Bernoulli, Opera, 2 Bde., Genf 1744; Bd. I, Nr. 23, S. 277 fg. (Auch in den Acta Erud. Juli 1686).



Körper angebracht und geht nun davon aus, dass die Geschwindigkeit, welche das so combinirte Pendel haben werde, zwischen denjenigen Geschwindigkeiten zu suchen sein müsse, welche die einzelnen Körper annehmen würden, wenn sie für sich allein, d. h. ohne dass der eine mit dem andern verbunden wäre, zu schwingen hätten. Für sich allein würde der dem Aufhängungspunkt nähere einen schnelleren Antrieb erfahren, der entferntere aber sich für sich allein langsamer bewegen, wie dies der Schwerewirkung bei einfachen Pendeln gemäss ist. Nun könne aber die Schwere um der Combination willen nicht an jedem Körper die sonst entstehende Geschwindigkeit ohne Abzug oder ohne Zusatz ertheilen. An dem näheren Körper könne sie nichts ausrichten, ohne zugleich von hier aus auch auf den entfernteren mitwirken zu müssen. An dem entfernteren selbst wirke sie aber unmittelbar nur so, dass sie eine Geschwindigkeit ertheile, die für sich allein dem Gange des näheren nicht übereinstimmend folge, sondern eine Verzögerung entgegensetze und daher eines ergänzenden Antriebs durch Uebertragung von dem näheren Körper her bedürfe. Die Antriebe der Schwere setzten sich also in eine Art von Gleichgewicht, und man könne diese Mittheilung wohl so betrachten, wie wenn sich Gewichte an einem Hebel balancirten. Der feste Punkt an der Axe und die beiden Körper an der unbiegsamen Linie formirten einen Hebel. Was der eine Körper, unverbunden als einfaches Pendel gedacht, an Geschwindigkeit erlangen würde, erleidet durch die Verbindung einen Abzug oder Verlust, und der entferntere Körper erfährt einen Zusatz oder Gewinn. Verlust und Gewinn geschehen aber dadurch, dass sich die Kräfte am Hebel ins Gleichgewicht setzen. Sie müssen daher einander aufwiegen, wenn man ihre Wirkungsverhältnisse am Hebel, d. h. nach Maassgabe der Distanzen vom Aufhängungspunkt, in Anschlag bringt.

Dieses Raisonnement war im Allgemeinen nicht nur richtig, sondern auch höchst aufklärend; aber es enthielt einen fälschenden Gesichtspunkt, den wir absichtlich in der Allgemeinheit der Ausdrücke verdeckt haben; — es hatte nämlich durchweg die während einer bestimmten Zeit aufzuhäufenden Geschwindigkeiten vor Augen, bei denen von einem unmittelbaren statischen Verhältniss nicht die Rede sein kann. Was sich wirklich ins Gleichgewicht setzt, sind die verschiedentlich bestimmten elementaren Antriebe der Schwere, nicht aber die weiteren Ergebnisse ihrer

Geschwindigkeitsproductionen nach einem endlichen Zeitverlauf. Nicht eigentlich die Geschwindigkeiten, sondern die bewegenden Kräfte oder, was dasselbe ist, ihre in den unendlich kleinen Geschwindigkeiten, die sie erzeugen würden, enthaltenen Maasse treten zueinander in die durch den Hebel bestimmte statische Beziehung und Ausgleichung.

99. Die eben erwähnte Verwechselung der endlichen Geschwindigkeiten mit den Bestandtheilen der für einen Augenblick zu untersuchenden statischen Verhältnisse wurde von l'Hopital in einem Brief[1]) an Huyghens aufgedeckt und hieran eine Lösungsart der Aufgabe geknüpft, welche das Princip Jacob Bernoullis, dass sich die Kräfte wie an einem Hebel ins Gleichgewicht setzen, anerkannte und zu Grunde legte. L'Hopital verfuhr jedoch noch nicht ganz direct, indem er zunächst zwischen zwei Körpern den Schwingungsmittelpunkt ermittelte, dann dieselben in ihm vereinigt dachte und nun zu einem dritten Körper überging, um zwischen ihm und dem bereits gefundenen Centrum ein neues zu bestimmen. Obwohl dieses Verfahren richtig ist, so enthält es doch eine Voraussetzung, die nicht ganz einfach ist, und bei welcher man sich nach weiteren Gründen umsieht. Die Strenge der Ableitung erfordert nämlich, dass man nicht als zugestanden annehme, es müsse sich der Schwingungspunkt des gesammten Systems dadurch finden lassen, dass man, wie z. B. bei der Aufsuchung des Schwerpunkts, erst zwei Körper oder Systemtheile für sich betrachte und dann dieselben wie einen Körper ansehe, der im Oscillationscentrum seinen Ort habe, um dann diese so vereinfachte Combination in Beziehung zu einem dritten Körper oder Systemtheil auf die gleiche Weise zu behandeln. Abgesehen von diesem Umstande, der allerdings nur eine Nebensache ist, war mit der l'Hopitalschen Verbesserung des Lösungsprincips von Jacob Bernoulli der Gegenstand im Wesentlichen erledigt. Ueberdies war die l'Hopitalsche Auseinandersetzung, die sich nicht blos im Allgemeinen, sondern in einfachen Zahlenbeispielen bewegte, recht klar ausgefallen. Die „Bemerkungen“ [2]), welche Huyghens selbst an den ihm zur Veröffentlichung anheimgegebenen Brief l'Hopitals knüpfte, bekunden nur, dass er trotz der Aner-

---

[1]) Abgedruckt in den angef. Werken Jacob Bernoullis Bd. I, Nr. 43 (Lettre etc.) S. 454 fg. (aus Histoire des ouvrages des savants, Juni 1690).

[2]) Ibid. Nr. 44, S. 458 fg. (aus derselben Quelle und von demselben Datum).

kennung der Richtigkeit des Resultats die Methode dennoch für dunkler hielt, als seine eigne Berufung auf die Erhaltung der aufsteigenden Kraft (force ascensionelle). Jedoch ist interessant, dass er in diesen Bemerkungen das Princip der Erhaltung der Kraft zum Aufsteigen auch so formulirt, dass er unmittelbar die aus den Geschwindigkeitsquadraten zusammengesetzten Summen als sich gleichbleibend hinstellt. Uebrigens wollte er offenbar von seinem Princip, welches sich auf endliche Grössen bezog, nicht zu Gunsten eines Raisonnements ablassen, welches die Zergliederung seines Grundsatzes nur um den Preis des Zurückgreifens auf unendlich kleine, dem Entstehungsmoment angehörige Geschwindigkeiten und Bewegungsquantitäten bewerkstelligte. Auch die Vorstellung von dem Verlust und Gewinn in der Uebertragung der Antriebe der Schwere nach Maassgabe des Hebels erschien ihm nicht deutlich genug.

Ungefähr ein Jahr später (Juli 1691) veröffentlichte Jacob Bernoulli eine neue Darstellung seiner Lösungsmethode[1]) „aus dem Wesen des Hebels“ mit Rücksicht auf die l'Hopitalsche Verbesserung seines Irrthums und in einer solchen Allgemeinheit, dass hiebei die Nothwendigkeit fortfiel, immer je zwei Körper zusammenzufassen. Diese Skizze erhielt aber erst nach einer Reihe von Jahren eine Ausführung in der Gestalt umfassender und das Problem in seiner grössten Allgemeinheit behandelnder Aufsätze. Diese ausführlicheren Darlegungen[2]) von 1703 und 1704 beschränken sich nicht auf Körper, die an einer Pendellinie vereinigt gedacht werden, sondern fassen, wie es auch Huyghens schon gethan hatte, einen schwingenden Körper von beliebiger Gestalt, d. h. überhaupt ein oscillirendes System ins Auge. Auch wird die (zufällige) Einerleiheit des Mittelpunkts des Stosses mit dem Schwingungsmittelpunkt in der letzten Abhandlung besonders nachgewiesen. Doch gehen uns hier die ziemlich leichten Verallgemeinerungen nicht besonders an, da der Hauptpunkt die Einführung der statischen Kräftevertheilung aus dem Gesichtspunkt des Hebels in das dynamische System gewesen war, und da dieses Princip, mit dem statischen Gewinn und Verlust an

---

[1]) Ibid. Nr. 45 Demonstratio centri oscillationis ex natura vectis, S. 460 fg. (aus den Acta Erud. Juli 1691).

[2]) Ibid. Bd. II, Nr. 98—100, S. 930—53 (aus Histoire de l'Acad. des Sciences de Paris, für 1703 und 1704).

Kraft für die verschiedenen Punkte zu rechnen, von vornherein trotz der Irrthümer als wichtigstes Fundament zu Grunde gelegen hatte. Ausserdem darf aber nicht unerwähnt bleiben, dass der Verfasser hier zum ersten Mal das Huyghenssche Princip selbst, nämlich die Gleichheit des Aufsteigens des Schwerpunkts mit dem Fallen und zwar bei dem isolirten Aufsteigen der Körper nach Lösung der bei dem Fallen wirksam gewesenen Verbindung, ausdrücklich als eine Nothwendigkeit ableitete und auf diese Weise aus dem früheren Postulat einen mechanisch erwiesenen Satz machte. Eine besondere Schwierigkeit war mit dieser Nachweisung nicht mehr verbunden gewesen, seit die Wirksamkeit der Kräfte am Hebel den leitenden Gesichtspunkt gebildet, und seit l'Hopital die elementaren Antriebe der Schwere als die eigentlichen Gegenstände der statischen Ausgleichung ins Auge gefasst hatte. Hiedurch hatte man nämlich die Beziehungen der Kräfte für den Augenblick, und es kam nur darauf an, die sich häufende Wirkung dieser Beziehungen für eine beliebige endliche Zeit festzustellen. Dies war aber nur Sache der Rechnung nach Maassgabe des gewöhnlichen Schema der Kräfteentwicklung. Mathematisch geredet, war nichts weiter zu thun, als zu der Differentialgleichung der Bewegung, die man durch das Princip der statischen Ausgleichung gewonnen hatte, die integrirte Form anzugeben. Jacob Bernoulli verfuhr bei halb geometrischer Veranschaulichung wesentlich analytisch, und auch nur auf Grundlage der neuen infinitesimalen Vorstellungsarten war es überhaupt möglich geworden, die Huyghenssche Lösung, die einen vorherrschend synthetischen Charakter hatte und sich an die endlichen Beziehungen hielt, gehörig zu zergliedern und so gleichsam die constitutiven Elemente des Huyghensschen Princips zu ermitteln. Es ist daher auch nicht auffallend, dass grade l'Hopital, also der Verfasser der „Analyse des infiniment petits", der seine Aufmerksamkeit und sein Geschick besonders in der Handhabung der unendlich kleinen Grössen ausbildete, den betreffenden Fehlgriff Jacob Bernoullis zuerst bemerkte und durch eine haltbare Betrachtungsart verbesserte. Dieser Schritt war ein ausserordentlich wichtiger; denn er lehrte erst den Gegenstand kennen, auf dessen Gleichgewicht man zu achten hätte. Trotzdem kann er in seiner Bedeutung nicht mit der Tragweite des ursprünglichen Gedankens verglichen werden, durch welchen Jacob Bernoulli das gewöhnliche Gleichgewicht am Hebel als dasjenige in Frage brachte,

welches auch in der Entwicklung der bewegenden Kräfte den Schlüssel zum Verständniss der Erscheinungen liefern müsste.

100. Wir wollen daher noch schliesslich die bestimmtere Gestaltung angeben, in welcher sich Jacob Bernoulli den Vorgang der statischen Ausgleichung zuletzt zu denken vermochte. Halten wir hiebei der Einfachheit wegen an den zwei gleichen Körpern fest, wie sie auch l'Hopital vor Augen hatte, und nehmen wir sogar das bestimmte Zahlenbeispiel des letzteren zu Hülfe. Der entferntere Körper hat von dem Aufhängungspunkt einen viermal so grossen Abstand, als der nähere, aber ebenfalls auf derselben Seite befestigte. Die starre Linie werde in einer beliebigen Lage, und zwar am einfachsten, wie l'Hopital thut, im Anfang der Bewegung betrachtet. Die Antriebe der Schwere, auf die möglichen und gleichen Richtungen der zu der Position gehörigen Lage der Tangenten an die Punkte und deren Bahnen reducirt, sind an sich vollkommen gleich und können daher als Einheit der Geschwindigkeiten gelten. Der Abzug, den diese elementare Wirkung der Schwere auf den näheren Körper erleidet, und der von der Hemmung durch den weniger schnell bewegbaren entfernteren Körper herrührt, kann als ein Rest $1-x$ ausgedrückt werden, wenn man unter x die unbekannte wirkliche Geschwindigkeit, welche die Schwere in dem Augenblick trotz der Hemmung erzeugen muss, und unter 1 den schon erwähnten vollständigen und nur nach der Richtung reducirten, als Geschwindigkeit ausgedrückten Impuls der Schwere versteht. Dieser Verlust $1-x$ wird aber in der viermal grösseren Entfernung durch einen Gewinn aufgewogen, der nur ein Viertel sein kann. Eine Hemmung von $1-x$ an dem näheren Körper bedeutet daher nur eine Beschleunigung von $\frac{1-x}{4}$ an dem viermal entfernteren oder, mit andern Worten, die beiden Krafttheile $1-x$ und $\frac{1-x}{4}$, die an der Hebellinie nach entgegengesetzten Richtungen angebracht gedacht werden, sind im Gleichgewicht. Verlust und Gewinn äquilibriren sich nach Maassgabe des Verhältnisses am Hebel. Addirt man nun den Gewinn des entfernteren Körpers zu der Einheit, die er ohnedies an Geschwindigkeit erhält, so ergiebt sich $1 + \frac{1-x}{4}$ als Ausdruck für die Geschwindigkeit, die ihm mit Rücksicht auf den andern Körper wirklich ertheilt

werden muss. Die entsprechende Geschwindigkeit des andern Körpers ist x, und beide müssen sich nach den Abständen vom Aufhängungspunkt verhalten, d. h. der Ausdruck für den entfernteren Körper muss viermal grösser sein, als derjenige für den näheren. Man hat also aus diesem Verhältniss die Gleichung $4x = 1 + \frac{1-x}{4}$, woraus $x = \frac{5}{17}$. Wenn also die dem elementaren Antrieb der Schwere zu verdankende Geschwindigkeit mit Rücksicht auf die Hemmung für den einen Körper $\frac{5}{17}$ und für den andern mit Rücksicht auf die Beschleunigung $\frac{20}{17}$ wird, so sind der entsprechende Verlust und Gewinn gegen die unverminderte Einheit des auf die Richtung reducirten Schwereantriebs bezüglich $\frac{12}{17}$ und $\frac{3}{17}$. Diese Grössen sind die Gestaltungen nach dem höchst einfachen l'Hopitalschen Beispiel, in welchem eine Massenverschiedenheit zunächst nicht vorliegt. Auch die Vorstellungsart vom gegenseitigen Aufwiegen des Verlustes und Gewinnes ist diejenige, wie sie sich l'Hopital auf Grundlage der ersten Idee Jacob Bernoullis gebildet hatte. Man sieht aus dem Beispiel recht anschaulich, wie von den zwei Einheiten, die an Bewegungsantrieb vorhanden sind, nur $\frac{25}{17}$ als wirkliche Geschwindigkeiten hervortreten, während die fehlenden $\frac{9}{17}$ mit Rücksicht auf den Aufhängungs- und Unterstützungspunkt als gleichsam statisch gebunden, d. h. als in einem Gleichgewichtsverhältniss für die Bewegung indifferent betrachtet werden müssen. In Wahrheit haben sich nämlich die verlornen $\frac{12}{17}$ in eine gewonnene Wirkung von $\frac{3}{17}$ am entfernteren Punkt des Hebels verwandelt. Von einem eigentlichen Gleichgewicht kann man daher nur insofern reden, als man Verlust und Gewinn oder Abzug und Zusatz in entgegengesetzten Richtungen für sich allein als besonders angebrachte Kräfte wirksam denkt. Uebrigens sind es aber grade die $\frac{12}{17}$, welche, anstatt an dem näheren Körper zu wirken, die $\frac{3}{17}$ am entfernteren Körper in gleichem Sinne hervorbringen.

Um das l'Hopitalsche Beispiel, welches wir nur der statischen Vorstellungsart wegen ins Auge gefasst haben, auch nach Seiten der Hauptaufgabe nicht unvollständig zu lassen, so sei bemerkt, dass nach Feststellung der elementaren Geschwindigkeit für einen Punkt mit $\frac{5}{17}$ die Angabe der Entfernung des Schwingungscentrums nur die allereinfachste Ueberlegung erfordert. Mit der wirklichen elementaren Geschwindigkeit des einen Körpers kennt man auch diejenigen aller Punkte der Linie, indem ja die ganze

Linie zusammen bewegt wird und bei gleicher Winkelgeschwindigkeit demnach jeder Punkt nach Maassgabe seines Abstandes eine grössere oder geringere lineare Geschwindigkeit haben muss. Der Schwingungsmittelpunkt ist nun derjenige, welcher eine Geschwindigkeit hat, wie wenn er frei dem auf die Richtung reducirten Antrieb der Schwere ausgesetzt wäre oder, mit andern Worten, ein einfaches Pendel vorstellte. Bei ihm muss also die unverkürzte und unvermehrte Einheit, von der wir bei den beiden Körpern ausgegangen sind, zur Erscheinung gelangen. In ihm darf kein Verlust und kein Gewinn stattfinden. In ihm müssen daher nach unserm Beispiel volle $\frac{17}{17}$ anzutreffen sein. Rechnet man nun der Einfachheit und Symmetrie wegen die Pendellänge als Einheit und nach Zwanzigsteln, da $\frac{20}{17}$ die grösste Geschwindigkeit repräsentiren, so ist klar, dass $\frac{17}{20}$ die Entfernung des Schwingungsmittelpunkts oder die Länge des einfachen Pendels von gleicher Geschwindigkeit ausdrücken werden. Hienach hat man bezüglich als Entfernungen der drei Punkte $\frac{5}{20}$, $\frac{17}{20}$ und $\frac{20}{20}$ während die zugehörigen Geschwindigkeiten $\frac{5}{17}$, $\frac{17}{17}$ und $\frac{20}{17}$ sind. Man bemerkt hieraus leicht, dass die Abstände des Schwingungsmittelpunkts sich wie 12 : 3, also direct wie die Differenzen seiner Geschwindigkeit gegen die beiden Körper oder, mit andern Worten, wie die gewonnenen und verlornen Krafttheile verhalten. Will man daher etwa die alte, noch unbestimmte Idee des Cartesius in Erinnerung bringen, wonach das Agitationscentrum dasjenige ist, um welches die verschiedenen Agitationen der Kräfte gleichsam im Gleichgewicht sind, so darf man nicht vergessen, dass es sich um ein ganz anderartiges Verhältniss als das des Schwerpunkts handelt, und dass die jetzt fragliche Art von Balancirung nur das partielle Gleichgewicht in einem dynamischen Verhältniss betreffen kann.

101. Die Schwierigkeit, das eigentliche Lösungsprincip Jacob Bernoullis, nämlich die Zurückführung der Geschwindigkeitsvertheilung auf das Verhältniss am Hebel, in völlig evidenten Vorstellungen darzulegen, war schon einem Huyghens nicht entgangen. Auch hat die spätere Zeit grade an den hier einschlagenden Vorstellungsarten bis zum d'Alembertschen Princip hin allerlei Variationen versucht, und Jacob Bernoulli selbst hat den von ihm entdeckten Gesichtspunkt immer bestimmter und klarer zu machen gestrebt. Zuletzt kam er zu der Wendung, die wirklichen elementaren Geschwindigkeiten oder Kräfte aus zwei Bestandtheilen

zusammengesetzt zu denken, nämlich aus denjenigen, welche die Körper im unverbundenen Zustande annehmen würden, und aus denjenigen, welche in Folge der Verbindung verloren oder gewonnen werden. Das Wichtige in dieser Vorstellungsart besteht darin, dass eine eigentliche Zusammensetzung oder Zerlegung von Kräften eingeführt, und dass hiemit zugleich die Richtung der Wirkung der Bestandtheile durch die Subtraction der verlornen oder Addition der gewonnenen Elemente angezeigt wird. Diese additiven oder subtractiven Elemente müssen als solche, d. h. mit Rücksicht auf ihre Vorzeichen, an der Verbindung stets ein wahres und eigentliches Gleichgewicht formiren. Dies ist ein vollkommen unzweideutiger Ausdruck der in Frage stehenden statischen Nothwendigkeit eines partiellen, d. h. sich auf gewisse Bestandtheile der die Bewegung bestimmenden Ursachen erstreckenden Gleichgewichts. So sind in dem vorher ausgeführten l'Hopitalschen Beispiel nicht die $\frac{12}{17}$ der Krafteinheit nach ihrer eignen Richtung mit den nach derselben Richtung am andern Körper hervorgebrachten $\frac{3}{17}$ im Gleichgewicht, sondern es ist der Verlust, d. h. eine Gegenkraft oder Hemmung von $\frac{12}{17}$, welche mit dem Gewinn von $\frac{3}{17}$ verglichen werden muss. Zur Veranschaulichung kann man sich auch vorstellen, wie der entferntere Körper in Vergleichung mit dem Antrieb, den der nähere erfahren soll, zum Theil verhältnissmässig ruhe, d. h. sich vermöge seiner Trägheitsreaction einer um $\frac{3}{17}$ schnelleren Bewegung um ebensoviel widersetze. Jedenfalls muss, um auf ihn die $\frac{3}{17}$ Zusatzgeschwindigkeit zu übertragen, nach dem Gesetz der Gleichheit von Action und Reaction eine entgegengesetzte Erhaltungsbestrebung des Bewegungszustandes als aufgewogen angesehen werden. Hierin liegt, wie wir später sehen werden, der Grund, dass neuere Formulirungen das d'Alembertsche Princip oder, mit andern Worten, das verallgemeinerte Princip Jacob Bernoullis, unmittelbar dadurch ausgedrückt haben, dass sie die Anbringung der Trägheitskräfte als das Mittel bezeichneten, jedes bewegte System auf ein Gleichgewichtssystem zurückzuführen.

Wir wollen uns jedoch hier nur an die Bemerkung halten, dass Jacob Bernoulli auf eine sehr natürliche Art die wirklichen Bewegungen oder Geschwindigkeiten als die Resultanten, die Kräftewirkungen auf die unverbunden gedachten Körper einerseits und die rein statischen Modificationen andererseits aber als die Componenten betrachtet. Dies ist die der Sache entsprechende

Vorstellungsart; denn die noch nicht in Wechselwirkung befindlichen Kräfte erfahren eine Abänderung ihrer Wirkungsart durch die Gegenseitigkeiten ihrer statischen Verbindung und so erst entstehen die wirklichen Geschwindigkeitselemente jedes Körpers. Nun kann man aber in ganz abstracter Betrachtung jede Kräftezusammensetzung in jeder beliebigen Combination vornehmen und jede Kraft zur Resultante der beiden andern machen, wenn man nur die Wirkungsrichtung bei der einen Kraft dergestalt umkehrt, dass man es nicht mehr mit einer resultirenden Bewegung, sondern mit dem Fall des Gleichgewichts zu thun hat. Für diesen letzteren Fall hört jeder Unterschied zwischen Componente und Resultante auf, auch einen realen Unterschied zu bedeuten, und er beruht nur auf der willkürlichen Auffassungsart. Hebt man daher, wie später in der Fassung des d'Alembertschen Princips geschah, die Bewegung des Systems dadurch auf, dass man die resultirenden Geschwindigkeiten in entgegengesetzter Richtung anbringt, so muss zwischen diesen entgegengesetzt genommenen Kräften und den fraglichen Componenten der Kräfte, deren Gegentheile sie sind, Gleichgewicht bestehen. In diesem Fall kann man aber von den drei Classen von Einwirkungen, nämlich den Kräften ausserhalb der Verbindung, den verlornen und gewonnenen Kräften und den die Bewegung aufhebenden Kräften jede Kategorie beliebig die Rolle der Resultante oder einer Componente spielen lassen. Man kann also z. B. die Verluste und Gewinne als Resultanten ansehen, die sich dadurch ergeben, dass man die eventuellen Wirkungen im unverbundenen Zustande mit den Gegensätzen der wirklichen Geschwindigkeiten zusammensetzt. Sieht man näher zu, so liegt eine derartige Procedur stillschweigend in jedem Calcül, der die verlornen und gewonnenen Kräfte ermitteln soll. Man kann diese Procedur in dem Verfahren von l'Hopital und Bernoulli leicht genug auffinden. Die späteren Varianten betreffen also nur die begleitende Vorstellungsart und das Mehr oder Minder des Bewusstseins der allgemeinen methodischen Bedeutung solcher Anschauungsweisen. Wir haben also hiemit eigentlich schon die Position erreicht, bei welcher das d'Alembertsche Princip hervortritt und nur noch die Aufgabe hat, sich als allgemeines Mittel zu kennzeichnen, durch welches dynamische Verhältnisse unter den Gesichtspunkt des eigentlichen Gleichgewichts gebracht und so zur Behandlung nach den Gesetzen der Statik geschickt gemacht werden.

102. Wir würden an dieser Stelle, wo wir das Erhaltungsgesetz der lebendigen Kräfte vor Augen haben, die Grundlagen seiner Unabhängigkeit von statischen Beziehungen nicht bis in die letzten Feststellungen dieser statischen Einwirkungen verfolgt haben, wenn nicht grade dieser Gegensatz der blossen Pressung und der lebendigen Kraft bei jeder principiellen Erörterung des Erhaltungsgesetzes eine Rolle gespielt hätte. Ja man kann vermuthen, dass die Aufmerksamkeit auf diesen Gegensatz schon durch die Fassung des Huyghensschen Princips gelenkt worden sei. Die Verbindung der Körper änderte nichts an der lebendigen Kraft. In der statischen Vertheilung zeigten sich aber äusserliche Differenzen zwischen der Gesammtgeschwindigkeit des unverbundenen Zustandes und derjenigen in der Verbindung. Es lag nahe, die beiden Classen von Beziehungen, nämlich die Entwicklung der lebendigen Kraft und die gleichgültige Dazwischenkunft der statischen Vertheilung der Antriebe von einander zu unterscheiden.

Ausserdem hatten wir aber noch einen zweiten Grund, das Erhaltungsprincip von dieser Seite besonders eingehend zu beleuchten. Im Sinne Johann Bernoullis strebte man nämlich das Princip möglichst allgemein zu fassen und nicht blos da zur Anwendung zu bringen, wo eine gleichgültige Dazwischenkunft von blossen Pressungen statthatte. Auch wo, wie bei dem Stoss vollkommen elastischer Körper, eine innere gegenseitige Kräfteentwicklung dazwischentrat, aber zur Wiederherstellung des früheren Zustandes führte, brachte man das Erhaltungsgesetz mit Recht zur Geltung. Jedoch sind einige Schriftsteller und unter ihnen, wie wir sehen werden, auch Lagrange, bei der Einschränkung des allgemeinen Princips auf die Gleichgültigkeit der Pressungen wesentlich verblieben und haben den Fall des elastischen Stosses, in welchem die lebendige Kraft vor und nach der Trennung der Körper dieselbe ist, nur als eine besonders zu motivirende Ausnahme von der Regel angesehen, dass die plötzlichen Geschwindigkeitsänderungen einen Verlust an lebendiger Kraft mit sich bringen. Die neuste Gestaltung der mechanischen Anschauungen führt dagegen zur grössten Verallgemeinerung des Erhaltungsprincips und bewegt sich in einer Richtung, in welcher jeder Verlust an lebendiger Kraft entweder als ein nur scheinbarer in einem sonst unbemerkten Aequivalent nachzuweisen oder als statische Gebundenheit zu kennzeichnen ist. Wenn der letztere

Theil dieser Aufgabe auch noch viel zu thun übriglässt, so kann doch deswegen nicht von der natürlichen Verallgemeinerung des Erhaltungsprincips Abstand genommen werden. Auch die Vereinfachung, welche die mechanische Anschauungsweise und der ihr entsprechende Calcül durch die grössere Generalisirung erfahren, ist nicht zu unterschätzen. Wir werden nachher sehen, dass die Lagrangesche Fassung des Princips auch in der Form und in den Voraussetzungen Einschränkungen enthält, die überflüssig werden, sobald man von vornherein nur das natürlich Mögliche und nicht die unerkannten plötzlichen Geschwindigkeitsveränderungen zu Grunde legt. Vorher müssen wir jedoch um der Vollständigkeit willen den Ausführungen über das Verfahren l'Hopitals und Jacob Bernoullis noch einige Notizen hinzufügen.

103. Als ein blosses Anzeichen der Hindernisse, mit welchen die Durcharbeitung einfacher Gesichtspunkte auch noch nach den Lösungen Jacob Bernoullis und l'Hopitals zu kämpfen hatte, muss die verwickelte und indirecte Art erwähnt werden, in welcher noch eine 1716 erschienene Gesammtdarstellung der Mechanik, nämlich die Phoronomie von Hermann[1]), die Aufgabe vom Schwingungsmittelpunkt behandelte. Dort[2]) werden die Antriebe, die im verbundenen Zustande statthaben, als gleich wirksam (aequipollentes) mit denjenigen der centralen Schwere aufgefasst und demgemäss als stellvertretende Potenzen (sollicitationes vicariae) angesehen, die daher in entgegengesetzter Richtung mit jenen verglichen, Gleichgewicht ergeben müssen. Doch ist die Darstellung dieser Wendung nicht grade klar hervortretend und kann daher am allerwenigsten dafür gelten, eine dem d'Alembertschen Princip ähnliche allgemeine Regel an die Hand zu geben. Im Gegentheil kommt nicht einmal die Einfachheit der Auffassungsart Jacob Bernoullis und l'Hopitals dabei zu ihrem Recht, während doch im Grunde der Sache zu den Ausgangspunkten derselben nichts Neues hinzugefügt ist.

Unvergleichlich eigenthümlicher gestaltete sich die Lösungsart Taylors in dessen Methodus incrementorum, mit welcher auch eine von Johann Bernoulli angenommene Behandlungsart ungefähr übereinstimmte. Der Taylorsche Ausweg[3]) bestand darin, die Körper-

---

[1]) Phoronomia sive de viribus et motibus corporum solidorum et fluidorum.
[2]) Ibid. lib. I, cap. 5, S. 100 fg.
[3]) Taylor, Methodus incrementorum, London 1715, Propos. 24, S. 95 fg.

theilchen mit veränderten hypothetischen Kraftaffectionen, d. h. mit dem quadratischen Distanzverhältniss als Factor von ihrem Ort an einen Punkt zu verlegen, wo sie eine der Verlegung entsprechende und den Voraussetzungen des äquivalenten einfachen Pendels Rechnung tragende Wirkung ausüben würden. Obwohl man einräumen muss, dass dieses Verfahren in einer Nebenbeziehung viel für sich hat, indem es eine Art Verwandlung der auf die Axe bezogenen Momente der Kräfte einschliesst, so bleibt doch in der Hauptsache das Princip Jacob Bernoullis die einfachste und schliesslich für alle Fälle entscheidende Art der Rechenschaft.

Ueber den Umstand, dass man in den Lösungen, die durch Huyghens' Vorgang in der Auffindung des Oscillationscentrums möglich geworden waren, das Princip der Erhaltung der lebendigen Kräfte mehr und mehr zurücktreten sieht, darf man sich nicht wundern. Schon mit der l'Hopitalschen richtigen Anwendung des statischen Princips von Jacob Bernoulli war die Erhaltungsidee überflüssig geworden, soweit es sich nämlich nur um die Aufgabe der Auffindung des Schwingungsmittelpunkts handelte. Man hatte ja nur die momentanen Antriebe der Kräfte in statischer Weise miteinander in Beziehung zu setzen, um die Gleichung zu erhalten, aus welcher sich die Lage des Oscillationscentrums bestimmte, wie wir dies am l'Hopitalschen Beispiel gezeigt haben. Der Satz von der Erhaltung war mithin in der Huyghensschen Form zu einer abgeleiteten Wahrheit geworden, und die Auffindung des Oscillationscentrums lag nicht mehr auf dem Wege oder jenseit dieser Ableitung, sondern ging ihr als etwas nunmehr gänzlich davon Unabhängiges voran. Man konnte also das Princip der Erhaltung bei dieser Aufgabe gänzlich zur Seite lassen, indem man bereits gelernt hatte, die entscheidenden Kräftebeziehungen in ihrer differentiellen Form und nicht erst auf dem Umwege ihrer integrirten Gestalt zu ermitteln. Die Geschwindigkeitsquadrate und die Höhen, von deren Betrachtung Huyghens ausgegangen war, hatten diese integrirte Gestalt vertreten und daher auch den Satz der Erhaltung einschliessen müssen. Man war zu dem Einfacheren vorgedrungen, und unter den Händen Jacob Bernoullis hatte sich das Erhaltungsprincip schon als eine blosse Consequenz auf Grundlage der differentiellen Kräfteverhältnisse ergeben, die für das ursprüngliche und augenblickliche, gleichsam statische Arrangement veranschlagt werden.

Noch viel weniger als in der Huyghensschen Form konnte

das Erhaltungsprincip in dem allgemeineren Sinne, den Johann Bernoulli im Anschluss an die Leibnizsche Anschauungsweise vor Augen hatte, für die Aufgabe des Oscillationscentrums auf die Dauer eine wesentliche Rolle spielen. War man einmal zur statischen Combination der dynamischen Kräfte gelangt, so konnte der Erhaltungssatz seinem besondern Inhalt nach nicht mehr Grund, sondern nur Folge des mechanischen Raisonnements bleiben. Unbeschadet desjenigen Bestandtheils, der nur die mit jedem Kraftverbrauch verbundene entsprechende Krafterzeugung betrifft, musste daher das Princip der Erhaltung der lebendigen Kräfte in einem bewegten System zu einem besondern Lehrsatz werden, für dessen Fassung die grösste Schwierigkeit in der richtigen Formulirung seiner etwaigen besondern Voraussetzungen bestand. Hiezu kam die Abneigung der Engländer, die Leibnizsche Anschauungsweise zu benutzen oder gelten zu lassen, wie man dies aus Maclaurins Werk über die Fluxionen [1]) deutlich genug ersehen kann. Im Allgemeinen war auch im Verlauf des 18. Jahrhunderts die logische Strömung vorwiegend darauf gerichtet, metaphysisch aussehende oder in der Fassung von ungeklärten metaphysischen Vorstellungen begleitete Anticipationen durch rein causale Beziehungen und durch einfache Einsichten in den Zusammenhang von Grund und Folge zu ersetzen. Was man als Wirkung zu erkennen vermochte, wollte man nicht als besonderes Princip und als besondere Eigenschaft gelten lassen, die unmittelbar als eine mehr oder minder vage oder gar verborgene Qualität der Naturverhältnisse zu denken wäre. In diesem Sinne wurde auch das Princip der Erhaltung der lebendigen Kräfte später grundsätzlich als eine blosse Consequenz der gewöhnlichen mechanischen Axiome und des Calcüls hingestellt.

104. Den ausgeprägtesten Ausdruck für diese Betrachtungsart und zugleich die entscheidende Rechtfertigung durch eine allgemeine, auf den möglichst abstract gehaltenen Calcül gegründete Ableitung trifft man in den Schriften von Lagrange und zwar zunächst in der ersten Ausgabe seiner berühmten Analytischen Mechanik [2]) und übrigens auch in seiner Theorie der analytischen Functionen [3]) an, deren dritte Abtheilung die Anwendungsart des Calcüls auf

[1]) A complete system of fluxions, Edinburg 1742.
[2]) Mécanique analytique, Paris 1788, 2. Ausg. in 2 Bänden 1811—15.
[3]) Théorie des fonctions analytiques, zuerst 1797, 2. Ausg. 1813.

die Grundbegriffe und allgemeinsten Sätze der Mechanik zur Darstellung bringt. Das grosse Werk der Analytischen Mechanik muss, und zwar in seiner zweiten Ausgabe, den vornehmlichen Ausgangspunkt zur Erkenntniss der Art und Weise bilden, wie sich bei Lagrange das Princip der Erhaltung der lebendigen Kräfte gestaltet habe. Hiebei soll der analytische Gesammtzusammenhang mit der Fundamentalformel, auf welche dieser Autor den ganzen Inhalt der Mechanik zurückführt, an dieser Stelle noch nicht näher untersucht werden, da so etwas nur bei der zusammenhängenden Darstellung der einem Lagrange eigenthümlichen analytischen Systematik geschehen kann. Dagegen müssen wir schon hier zur Vervollständigung der Entwicklungsgeschichte des Erhaltungsprincips alles das anführen, was in der Auffassung des genialen Analytikers und seiner Zeitgenossen auf die exactere Gestaltung oder abstractere Ableitung jenes Fundamentalsatzes ein Licht wirft.

Schon d'Alembert hatte sich in seinem Tractat der Dynamik [1]) in der Vorrede dahin ausgesprochen, dass er, der sich nur um die Bewegungen und nicht um die bewegenden Ursachen kümmern wolle, aus diesem Grunde auch nicht auf die Streitfrage über die lebendigen Kräfte eingehen werde [2]). Diese Controverse sei ohne Nutzen. Uebrigens könne die Quantität der Bewegung auch ausser dem Fall des Gleichgewichts als Maass dienen, wenn man auf die „Summe der Widerstände" sehe [3]). Hiebei hat er die in den Elementen nach seiner Ansicht durch die Bewegungsquantität zu messenden Widerstände im Auge. Ueberhaupt ist es die Messungsart und nicht das Erhaltungsprincip, welches von ihm als der Hauptgegenstand des Streites vorausgesetzt wird. Die Verweisung auf die elementaren Widerstandsgrössen, welche den beliebig klein genommenen Zeittheilen entsprechen, ist allerdings an sich richtig. Indessen setzen sich diese elementaren Wirkungen nicht einfach aus Masse und Geschwindigkeit (mv) zusammen, sondern enthalten wesentlich noch einen dritten Factor, nämlich die Veränderung der Geschwindigkeit (dv). Dem $mv\,dv$ ist $mj\,ds$ äquivalent, wo j die Beschleunigung bedeutet. Die Elemente der Arbeit und das, was man wegen der Formveränderung des Ausdrucks die Elemente der lebendigen Kraft nennen könnte, müssen mit dem Ganzen, das sich aus ihnen zusammensetzen soll, völlig gleichartig gedacht

---

1) Traité de dynamique, Paris 1743.

2) Ibid. S. XVI. 3) Ibid. S. XX.

werden, und d'Alembert hat sich daher in seiner Vorstellungsart noch durch die Zweideutigkeit derselben Leibnizschen Metaphysik täuschen lassen, die er mit Recht beseitigt wissen wollte.

105. Wie schon früher gesagt, lässt Lagranges Auffassung das Princip der Erhaltung der lebendigen Kräfte überall als einen Hauptsatz der Mechanik erscheinen, der sich aus den sonstigen Axiomen vermittelst des blossen Calcüls mit Nothwendigkeit ergebe. Es liegt hiebei zunächst ein selbst abgeleiteter analytischer Ausdruck der Kräftebeziehungen zu Grunde, wie sie sich für ein Zeittheilchen, also differentiell gestalten. Der Uebergang von dieser Relation zur Gleichung der lebendigen Kräfte wird durch eine Integration vollzogen, vermöge deren die Geschwindigkeitsquadrate als Factoren der Massen hervortreten.

Die Grundvoraussetzung besteht zunächst darin, dass in den Bedingungsgleichungen, durch welche die Anordnung des Systems bestimmt wird, die Zeit nicht vorkomme. Dies wird, nebenbei bemerkt, immer der Fall sein, wenn die innern Kräfte zwischen den Theilen des Systems in blossen Pressungen bestehen und daher die Oerter nicht wechselseitig verschieben. Beispielsweise denke man hiebei an das zusammengesetzte Pendel. In einem solchen Fall kann man für die virtuellen, d. h. die möglichen Verschiebungen, diejenigen setzen, welche die Körper bei der wirklichen Bewegung annehmen.

Wenn man nun, wie Lagrange, ursprünglich von einer Gleichung ausgeht, durch welche das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten in der durch die d'Alembertsche Wendung für bewegte Systeme ermöglichten Uebertragung zum Ausdruck gelangt, so hat man in derselben nichts als eine gleich Null gesetzte Summe von Gliedern, die sämmtlich darin übereinstimmen, dass ihre beiden Factoren aus dem Ausdruck für eine Kraft und aus der zugehörigen virtuellen Verschiebung bestehen, welche für den Punkt oder Körper beliebig angenommen werden mag. Es sind also lauter Momente im Lagrangeschen Sinne des Worts, welche einander zu Null aufheben müssen. Die Kräfte, welche den vorausgesetzten Bewegungen des Systems entgegengesetzt gedacht werden, um diese Bewegungen aufzuheben, sind selbst nichts Anderes als fingirte Ursachen der eingeführten entgegengesetzten Bewegungen und müssen daher als zweite Differentialcoefficienten der Räume in Beziehung auf die Zeit ausgedrückt werden. Letzteres ist die ganz gewöhnliche Ausdrucksform der Beschleunigung oder, wenn

man noch die Masse hinzusetzt, der bewegenden Kraft. Die bewegenden Kräfte in der einen oder andern Form, also in der Gestalt gegebener Grössen oder differentieller Functionen, — unter allen Umständen also die bewegenden Kräfte sind es, die mit den virtuellen Verschiebungen oder, analytisch ausgedrückt, mit den möglichen Variationen ihrer jedesmaligen Angriffspunkte (reducirt auf die Richtung der Kräfte) solche Producte ergeben, deren Summe, gleich Null gesetzt, alle Beziehungen der Bewegung und des Gleichgewichts einschliesst.

Um sich von dem Verfahren Rechenschaft zu geben, vermöge dessen die gekennzeichnete Grundgleichung für den Fall der denkbaren Integration zu dem Satz von den lebendigen Kräften und von deren Erhaltung führt, ist es zunächst nur nöthig, die Gestalt und Bedeutung eines einzigen beliebigen Gliedes, welches einen Differentialquotienten enthält, ins Auge zu fassen. Wie schon gesagt, muss es unter der vorher angeführten Voraussetzung den wirklich in dem Zeitelement durchlaufenen Raum als Factor enthalten. Denken wir daher nur an die Projection auf eine der Coordinatenaxen, welche der Form nach für alle gelten kann, oder befassen wir uns zunächst überhaupt nur mit der ganz allgemeinen Vorstellung eines solchen Products in Bezug auf eine beliebige Bewegungslinie, so haben wir es mit einer Grösse von der Form $\frac{d^2x}{dt^2}\,dx$ zu thun, die natürlich mit der Masse zu multipliciren ist. Man bemerke hiebei zugleich, dass dieser Ausdruck $m\,\frac{d^2x}{dt^2}\,dx$ nach den neuern Begriffen die elementare Arbeit vorstellt, indem der Weg dx als unter der Einwirkung der Kraft zur Ueberwindung eines gleichen und entgegengesetzten Widerstandes (der auch die blosse Trägheitsreaction sein kann) durchlaufen gedacht wird. Die Integration dieses Ausdrucks ergiebt $\frac{1}{2}m\,\frac{dx^2}{dt^2}$, und da $\frac{dx}{dt}$ die Geschwindigkeit, die man etwa mit v bezeichnen mag, darstellt, erhält man die allbekannte Form $\frac{1}{2}mv^2$ als Integral jenes Gliedes, welches das Product der bewegenden Kraft in den elementaren Weg ausdrückte.

106. In der allgemeinen dynamischen Gleichung von Lagrange, deren weitere Begründung wir später zu untersuchen haben werden, liegen nun zwei Arten von Summanden vor. Die eine Art umfasst die Gegenkräfte der wirklichen Bewegungen und hat

die eben gekennzeichnete Form; die andere Art umfasst die gegebenen Kräfte und ist, abgesehen von der Markirung der Form durch die Angabe in der Gestalt eines zweiten Differentialquotienten, die hier nicht Platz zu greifen braucht, übrigens vollkommen gleichartig mit jener ersteren Classe. Man hat also beide Gattungen nur darum zu unterscheiden, um die den Bewegungen entsprechenden Ausdrücke zur Bestimmung dieser Bewegungen benutzen zu können. Die eine Classe ist ein Aequivalent der andern, d. h. die beiderseitigen Summen ihrer virtuellen Momente sind einander gleich, und beide vereinigt müssen dem Gleichgewicht entsprechen, d. h. sich zu Null aufheben. Eigentlich müssten nach den Ausgangspunkten von Lagrange nicht die virtuellen Räume, sondern die virtuellen Geschwindigkeiten die Factoren jedes Gliedes sein. Diese Räume sind aber den Geschwindigkeiten proportional oder, anders ausgedrückt, man kann den Nenner dt überall weglassen, so dass die virtuellen Wege, die in dem Zeittheilchen zu durchlaufen wären, die Geschwindigkeiten proportional vertreten. An sich selber vertreten sie eben nur die Wege und machen so die zugehörigen Glieder zu Repräsentanten der virtuellen Arbeiten; allein dieser Gesichtspunkt bleibt der Lagrangeschen Auffassung noch fremd. Doch ist er schon hier zur Erläuterung des Verfahrens nicht unwichtig; denn die Möglichkeit der vorher charakterisirten Form der Ergebnisse des Calcüls beruht einzig und allein auf der Fundamentalthatsache, dass für dxd^2x das Integral $\frac{1}{2}dx^2$ ist. Zur Kritik sei noch besonders hervorgehoben, dass hienach in der differentiellen Form der statischen Grundgleichung die elementaren Arbeiten der Kräfte bereits in ihren Beziehungen vorausgesetzt sind, und dass daher die Ableitung nichts weiter thut, als die endliche Form zu ermitteln, durch welche die Arbeiten der Kräfte mit ihren gleichwerthigen Ausdrücken durch die Geschwindigkeitsquadrate in Beziehung stehen.

Die Integration der Ausdrücke von der oben gekennzeichneten Form ergiebt die Summe der lebendigen Kräfte, welche den wirklichen Bewegungen entsprechen, die alle Körper oder Punkte des Systems unter dem Einfluss der Verbindungen annehmen. Lassen sich nun die gegebenen Kräfte, in ihrer unverbundenen Wirkung gedacht, d. h. die Summe der virtuellen Momente derselben, als Differential irgend einer Function ansehen, so kann man sich die Integration über die ganze dynamische Grundformel hin vollzogen denken. Die Summen der lebendigen Kräfte und jene Function,

bezogen auf alle Körper, sind dann der Integrationsconstante gleich, und man besitzt auf diese Weise die Gleichung der lebendigen Kräfte und ihrer Erhaltung. Es bedarf nur einer Uebersetzung dieser Beziehungen in die gewöhnlichen Begriffe, um das Erhaltungsgesetz herauszulesen. Für jeden Augenblick, für welchen man die Summe der lebendigen Kräfte nehmen mag, wird sie ganz denselben Werth haben, ob man die wirkliche Bewegung des Systems für diesen Augenblick zu Grunde legt, oder aber von derjenigen Bewegung ausgeht, welche die Körper im unverbundenen Zustande angenommen haben würden, wenn sie sich unter der Einwirkung der freien Kräfte jeder auf derselben Linie bewegt hätten. In der beschriebenen Formel von Lagrange[1]) vertritt die eine Classe der Glieder die Summe der lebendigen Kräfte in der wirklichen Bewegung, während die Integralfunction, die zu der andern Classe von Gliedern gehört, nebst der Constanten den entsprechenden Werth auf der andern Seite ausdrückt. Hiemit ist zugleich eine zweite Art der Erhaltung nachgewiesen, die man die periodische nennen könnte; denn wenn die Function mehr als einmal zu demselben Werth gelangt, also z. B. Null wird, so wird auch entsprechend die Summe der lebendigen Kräfte dieselbe werden. Man denke beispielsweise an die symmetrischen Lagen eines zusammengesetzten Pendels. Im Grunde sind beide Arten der Erhaltung nicht wesentlich verschieden. Die eine bezieht sich auf den Gegensatz der verbundenen und der unverbundenen Kräftewirkung; die andere beschränkt sich ohne diesen Gegensatz auf die Vergleichungen der directen und der umgekehrten Wirkung oder, um an ein anschauliches Beispiel zu erinnern, des Fallens und des Aufsteigens kurzweg.

107. Die zwei von Lagrange gemachten besondern Voraussetzungen, unter denen das Princip als ein Hauptsatz der Mechanik und, wie schon die Ueberschrift des betreffenden Paragraphen besagt, als eine allgemeine „Eigenschaft“ der Bewegung erwiesen wird, müssen noch einmal hervorgehoben werden. Erstens müssen die Bedingungsgleichungen von der Zeitveränderung unabhängig sein. Zweitens muss die Summe der virtuellen Momente (Arbeiten) der freien Kräfte ein Integral haben können. Letztere Voraussetzung ist nun, wie Lagrange ausdrücklich hinzufügt, immer erfüllt, wenn die Kräfte von festen Mittelpunkten nach Functionen

---

[1]) Méc. anal. Bd. I (1811) Dynamik Sect. III, § 5, Art. 34.

der Distanzen oder in der letzteren Weise von Körpern aus wirken, die selbst dem System angehören. Für die gegenseitigen Attractionen ist also der Bedingung genügt, und überhaupt trifft das Verlangte für die Wirkungsart der Naturkräfte immer zu. Wir kennen keine Kraft, deren Grösse sich nicht in Beziehung auf irgend eine Ortsveränderung änderte und näher bestimmte und demnach nicht direct oder indirect von der räumlichen Lage der in Beziehung gesetzten Massen abhängig wäre. Dennoch soll diese Voraussetzung eine Einschränkung sein, und sie ist es in der That auch insofern, als man das grade betrachtete System willkürlich beschränkt und daher nicht, wie die Natur, überall mit innern, sondern mit äussern Kräften operirt, deren Gesammtwirkung nicht in jeder Beziehung veranschlagt zu werden braucht.

Vergleicht man die Darstellung Lagranges in dessen Analytischer Mechanik mit derjenigen, welche er in seiner Functionentheorie[1]) gegeben hat, so findet man noch ausdrücklich eine analytische Ausführung über den Fall der gegenseitigen Kräftewirkung nach Maassgabe von Distanzfunctionen, also der Attractionen und Repulsionen, welche zwischen den Körpern des Systems selbst stattfinden und deren Entfernungen vermindern oder vermehren. Auch trifft man in der Functionentheorie auf den Versuch einer neuen Ausdrucksweise des Gegensatzes todter und lebendiger Kräfte, die das Verdienst hat, sich von vornherein auf die statische und momentane Beziehung der bewegenden Agentien anwenden zu lassen und nicht erst deren Entwicklung voraussetzt.

Lagrange unterscheidet nämlich[2]) zwischen activen und passiven Kräften. Unter den letzteren versteht er diejenigen, durch welche die Körper in ihren wechselseitigen Lagen erhalten werden, und die mithin den Widerstand gegen die Verschiebungen repräsentiren. Er hat hiebei ausdrücklich Pressungen und Spannungen im Auge. Activ nennt er dagegen die Kräfte, wenn sie wechselseitige Ortsveränderungen zwischen den Körpern bewirken, also z. B. die Anziehungen oder diejenigen Wirkungen, welche von Federn ausgehen, die man sich zwischen den Körpern eingesetzt denken mag. Das wesentliche Merkmal der activen Kräfte ist die Hervorbringung der Ortsveränderung in der Lage der Körper oder Theilchen. Es ist also dieses Merkmal derjenige Umstand, an

---

[1]) Théorie des fonctions, 2. Aufl. 1813, dritte Abth. Cap. 7.

[2]) Ibid. Art. 42.

welchen wir auch bei unserm modernen Begriff der Arbeit in erster Linie zu denken haben. Die activen Kräfte Lagranges sind mithin die arbeitverrichtenden Kräfte. Ein System, in welchem die wechselseitige Lage der Körper nicht geändert wird, wie dies bei dem zusammengesetzten Pendel der Fall ist, kann in Zusammenhang mit den Ausgangspunkten der äussern Kräfte, hier also der Gravitation, betrachtet werden, und alsdann wird jede Bewegung als eine Ortsveränderung aufzufassen sein, die zwischen den Körpern eines umfassender gedachten Systems statthat. Man hat eben nur die Kräftecentra, von denen her die Einwirkung geschieht, aufzusuchen, und man wird niemals um die Bethätigung jener Anschauungsweise in Verlegenheit gerathen können.

Im Hinblick auf die angeführte Unterscheidung stellt nun Lagrange auch den Satz auf, dass die lebendige Kraft eines Systems stets den activen Kräften zu verdanken ist, und dass die passiven Kräfte an derselben nichts ändern. Denke man daher diese passiven Kräfte hinweg, so würden die Körper von und zu denselben Punkten auf beliebigen Linien frei bewegt, dieselbe lebendige Kraft erlangen, als wenn sie jenem Zusammenhang unterlegen hätten. Einer Erläuterung bedarf diese Formulirung nicht; denn sie enthält nur den exacten Ausdruck der oben angeführten ersten Vorbedingung des Princips.

108. Der Stoss ist dasjenige Beispiel oder vielmehr derjenige Typus der Kräftewirkung, in welchem sich die Regel und eine scheinbare Ausnahme des Erhaltungsprincips begegnen. Die verhältnissmässig kleine Zeitdauer der gegenseitigen Einwirkung darf nicht den Grund abgeben, diese Classe von Gegenwirkungen der Kräfte von dem allgemeinen Gesetz der sonstigen wechselseitigen Reactionen auszunehmen, die z. B. in der Form von Anziehungen oder Abstossungen auf Distanz, d. h. ohne unmittelbare Berührung stattfinden. Eine Art Stetigkeitsunterbrechung des gegenseitigen Verhaltens ist allerdings im Stoss anzuerkennen; denn der Uebergang zur Berührung führt eine neue Art von Beziehungen ein, die nach der Trennung der Körper wieder aufhört. Vergleicht man hiemit das Verhalten bei der Attraction, so ist niemals ein Augenblick da, in welchem die allgemeine Art der gegenseitigen Einwirkung einen Wechsel erlitte. Trotz alledem ist aber der Unterschied beider Fälle unwesentlich. Einerseits kann man nämlich das Vor und Nach des Stosses als Anfangs- und Endpunkt des während der Berührung bestehenden Verhältnisses denken und

hat dann keine Unterbrechung, sondern nur eine einheitliche begrenzte Action. Andererseits kann man eine ähnliche Begrenzung auch bei der Attraction denken, wenn man deren active Entwicklung erst nach der Entfernung eines Hindernisses beginnen lässt, durch welches früher ein rein statisches Gleichgewicht unterhalten wurde, und wenn man ausserdem noch daran denkt, dass ein sehr natürlicher Fall der Unterbrechung der einfachen Attractionswirkung durch die Berührung der Körper und mithin durch die schliessliche Combination mit dem Stoss selbst erfolgen kann. Alle wechselseitigen Kräftewirkungen activer Art müssen daher aus dem Gesichtspunkt der Möglichkeit einer doppelten Gestaltung gedacht werden. Entweder entwickelt sich die Activität in der Entfernung, und die Einmischungen der so zu sagen statischen Verhältnisse beruhen hier auf dem Antagonismus der verschiedenen Grössen bewegender Kräfte ohne Berührungswiderstand der Massen; oder aber die Activität entwickelt sich unter den Hindernissen, welche die Körper einander in der Berührung entgegensetzen, und alsdann ist die Intervention der statischen Beziehungen von anderer Art, indem neue Kräfte in das Spiel kommen, die von der Constitution der Körper herrühren.

Der letztere Fall tritt natürlich auch dann ein, wenn die Körper nicht in unmittelbarer Berührung, sondern durch irgend ein vermittelndes System, also im allgemeinsten Sinne des Worts durch eine Maschine aufeinander wirken. Durch derartige Einschaltungen kann man aber den Stoss auch so gestalten, dass seine geringfügige Dauer im Verhältniss zu den Geschwindigkeiten der Körper nicht mehr ein besonderes Merkmal abgiebt. Stellt man sich z. B. vor, es sei zwischen die Körper, die sonst unmittelbar zusammenstossen würden, eine verhältnissmässig lange, aber leicht nachgebende Schraubenfeder eingefügt, so wird deren Zusammenpressung und Ausdehnung einen Vorgang bilden, der schon nicht mehr als so ganz plötzlich gekennzeichnet werden kann. Ueberhaupt wird man bei richtiger Wahl in den Grössenverhältnissen die Kluft zwischen dem gewöhnlich ins Auge gefassten Stoss und andern dynamischen Vorgängen leicht ausfüllen. Wenn daher Lagrange die plötzlichen Veränderungen der Geschwindigkeiten in einem System als Ausnahmefälle ansieht, in denen das Erhaltungsprincip nicht mehr statthabe, so ist es nicht eigentlich die Plötzlichkeit, sondern die Thatsache von Geschwindigkeitsveränderungen, denen kein nachweisbarer Ersatz entspreche, was die

Ausnahme und den Verlust an lebendiger Kraft in einem gewissen Sinne motivirt. Bei dem Stoss vollkommen elastischer Körper soll nach Lagrange die Erhaltung der lebendigen Kraft nur darum stattfinden, weil man hier die Voraussetzung machen kann, dass die entwickelten Federkräfte, die bei der grössten Zusammendrückung ihren Maximalwerth erreichen, von da ab wieder abnehmen und zu Null werden[1]. Diese Restitution des früheren Zustandes soll einzig und allein der thatsächliche Grund sein, warum der Satz der Erhaltung bei der Vergleichung der Zustände vor und nach dem Stoss angewendet werden könne. Die analytische Darlegung ist für diesen Punkt in der Functionentheorie[2] noch eingehender, als in dem Hauptwerk. An beiden erwähnten Stellen wird dann auch der Carnotsche Satz über die Bestimmung des Verlusts an lebendiger Kraft bei dem Stoss unelastischer Körper abgeleitet. Dieser Verlust entspricht den Geschwindigkeitsveränderungen oder, wie man gewöhnlich sagt, den verlorenen (und gewonnenen) Geschwindigkeiten. Er übersieht sich am einfachsten bei völlig unelastischen Körpern; das Princip seiner Bestimmung hängt aber nicht an diesem Specialfall, sondern gilt für jeden Defect der vollkommenen Elasticität, d. h. für jeden Mangel der vollkommenen Restitution der Zusammendrückungen. Es ist daher nöthig, den Carnotschen Satz in der Fassung, die ihm sein Urheber gegeben hat, näher zu untersuchen, zumal da sich Carnot mit den allgemeinen Principien der Mechanik grosse Mühe gegeben hat.

109. Es ist ein sehr einfacher Gesichtspunkt, wenn man einen thatsächlichen Ausfall an lebendiger Kraft auf diejenigen Theile der Geschwindigkeiten zurückführt, welche daran gehindert worden sind, zu der in das Auge gefassten Action im Sinne activer Kraftentwicklung etwas beizutragen. Diese Geschwindigkeitstheile werden die bleibenden und nicht wieder ausgeglichenen Geschwindigkeitsveränderungen repräsentiren. Die Veränderungen, die von blosser Uebertragung herrühren, sind hier natürlich nicht gemeint; es kommen vielmehr nur diejenigen Veränderungen in Frage, welche eine Nullificirung der sonst für die Action wirksam gewordenen Geschwindigkeiten einschliessen. Carnot hat in seinem kleinen Buch, welches er zuerst als „Essai sur les machines en

---

[1]) Méc. anal. Bd. I (1811) Dynamik Sect. III, Art. 36.

[2]) Théorie des fonctions (1813) 3. Abth. Cap. 7, Art. 44.

général“ und in der 2. Auflage unter dem bezeichnenderen Titel „Principes fondamentaux de l'équilibre et du mouvement“ Paris 1803, herausgab, nicht nur die verschiedenen Grundprincipien der Mechanik erörtert, sondern ist auch bisweilen zu eigenthümlichen Aufstellungen gelangt. Unter den letzteren hat nun sein Satz über den Verlust an lebendiger Kraft bei dem Stoss allgemeine Anerkennung gefunden, indem dieser Satz eine einfache Form an die Hand giebt, den fraglichen Verlust vorzustellen und auszudrücken. In der angeführten Schrift wird er[1]) dahin formulirt: Beim Stoss harter Körper ist die Summe der lebendigen Kräfte vor dem Stoss gleich derjenigen nach dem Stoss plus der Summe, die für die einzelnen Körper statthaben würde, wenn sich dieselben frei und zwar jeder blos mit der verlornen Geschwindigkeit bewegten.

Dieser Carnotsche Satz, dass die unwirksam gemachten Geschwindigkeiten, als wirksam vorausgesetzt, die lebendige Kraft ergeben, die hypothetisch zu entwickeln gewesen wäre, aber nicht entwickelt und mithin verloren worden ist, — dieser Carnotsche Satz ist im Hinblick auf das, was der Urheber dem älteren Sprachgebrauch gemäss harte Körper nennt und was wir als den Fall des gänzlichen Mangels der Elasticität bezeichnen, auch analytisch sehr leicht zu erläutern, wie dies in umfassender Weise durch Lagrange an den vorher angeführten Stellen geschehen ist. Doch geht uns hier weit mehr die leitende Vorstellungsart selbst an. Die rationelle Mechanik darf in ihrer reinen Consequenz Kräfte und Geschwindigkeiten nicht unmotivirt verschwinden lassen. Setzt sie aber im besondern Fall für die Action einer gewissen Art, auf welche sich die empirische Beobachtung beschränkt und die rechnende Betrachtung beschränken soll, ein solches Verschwinden voraus, nimmt sie also an, dass eine Ursache, die sonst eine Bewegungsveränderung hervorbringen muss, ohne diese Wirkung zu setzen und als in unbekannter Weise ausgemerzt anzusehen sei, so muss sie sich bewusst bleiben, dass diese Annahme von ihrem rationell construirenden Standpunkt aus eine willkürliche und zufällige sei, zu welcher die Erfahrung die thatsächliche Veranlassung geben mag, die aber nie die Stetigkeit der rein rationellen Deductionen als solcher beeinträchtigen kann. Die Aufnahme einer unerklärten empirischen That-

[1]) Principes fondamentaux etc., Art. 175, S. 145.

sache in das Raisonnement und in den Calcül, also die Statuirung eines Verlustes an lebendiger Kraft kann keine wirkliche, sondern nur eine scheinbare Ausnahme des Erhaltungsprincips begründen. In der That ist auch grade der Carnotsche Satz ein bequemer Wegweiser zu der allgemeinen Vorstellungsart, dass sich die lebendige Kraft principiell erhalte, und dass jedem scheinbaren Verlust derselben eine Summe entspricht, deren Elemente grade diejenigen lebendigen Kräfte repräsentiren, die irgendwo anders entstanden sein müssen und nur für den Rahmen, innerhalb dessen man an den Körpern selbst beobachtet, nicht vorhanden sind. Eine Ablenkung oder Umwandlung ist aber kein unbedingter Verlust, sondern nur ein Verlust in Bezug auf eine bestimmte Wirkungsart. Um den extremen Fall in das Auge zu fassen, so haben die als völlig unelastisch vorausgesetzten Körper nach dem Stoss eine gemeinschaftliche Geschwindigkeit, zu welcher sie gelangt sind, indem sie die Verschiedenheiten ihrer Geschwindigkeiten ausgeglichen haben. Die Geschwindigkeit des einen ist vermindert, die des andern vermehrt worden. Beides hat nur durch Kraftentwicklung oder, wie wir heute sagen, durch Arbeit geschehen können. Im Fall der vollkommenen Elasticität würden diese Vermehrung und diese Verminderung entsprechende Reactionen (oder Arbeiten) im Gefolge gehabt haben, welche die Veränderungen der lebendigen Kraft durch einen gegentheiligen Vorgang wieder rückgängig gemacht hätten. Wo nun diese Reactionen ausbleiben, d. h. wo, wie in unserm Fall des unelastischen Stosses, keine Wiederausdehnung der zusammengedrückten Theilchen statthat, da kann auch in der Geschwindigkeit, welche die Körper nach dem Stoss haben, nicht die ursprüngliche lebendige Kraft vorhanden sein. Es werden grade diejenigen Theile fehlen müssen, welche den beiden Geschwindigkeitsveränderungen entsprechen. Denkt man sich also den einen Körper von der zugehörigen verlorenen, den andern von der gewonnenen Geschwindigkeit afficirt, indem man die fehlenden elastischen Reactionen auf diese Weise repräsentirt und ersetzt, so ist die lebendige Kraft dieses hypothetischen Systems diejenige, welche in dem Zustand nach dem Stoss vermisst wird, und welche man daher hinzufügen muss, um die Gleichung der lebendigen Kräfte für die Zustände vor und nach dem Stoss aufstellen zu können. Dies ist der Sinn des Carnotschen Satzes, und dies heisst zugleich nichts Anderes, als dass man die in unbekannter Richtung ver-

brauchten lebendigen Kräfte ebenfalls in Anschlag bringen muss, wenn man die Gleichung im Sinne der durchgreifenden Gültigkeit und der unbeschränkten Tragweite des Erhaltungsprincips ansetzen will. Von jedem Theil der lebendigen Kraft muss Rechenschaft abgelegt werden, und jedem Verlust derselben in der einen Richtung muss die Existenz eines Aequivalents in der andern Richtung entsprechen. Indem Carnot die den verlornen Geschwindigkeiten entsprechenden lebendigen Kräfte als Glieder in die Gleichung einführte, durch welche die Erhaltung ausgedrückt wird, vollzog er eine Wendung, die nur eines geringen Zusatzes bedarf, um auch in der Vorstellungsart den heutigen Ansprüchen zu genügen. Bei den verlornen lebendigen Kräften hat man nämlich an den Inbegriff derjenigen Actionen zu denken, die gleichsam aus dem System herausgetreten sind oder wenigstens keine Gesammtgeschwindigkeit der Körpermassen, sondern nur Theilchenverschiebungen, Erzitterungen u. dgl. hervorgebracht haben. Die innere Consequenz der Principien bleibt hiebei in ihrem vollen Recht, indem man nur nöthig hat, den abgelenkten Nebenwirkungen durch symbolische Ansätze Rechnung zu tragen. Ebenso werden aber auch die natürlichen Thatsachen verständlich und lassen sich auf eine zur Berechnung geeignete Form bringen, indem bei den natürlichen Körpern, welche zwischen den ideellen Extremen der absoluten Elasticität und des vollständigen Mangels derselben irgend einen gemischten Charakter darbieten, die Grösse des Mangels an Vollkommenheit der Elasticität das Maass abgiebt, um zu bestimmen, wieviel lebendige Kraft in der Hauptwirkung nach dem Stoss nicht als Massenkraft zum Vorschein kommen kann. Der Verlust wird demnach als Molecularwirkung im Gegensatz der Bewegung der Gesammtmassen vorzustellen sein. Wie er aber auch beschaffen sein möchte, man würde ihn jedenfalls als eine, wenn auch unbekannte Action zu denken haben.

Carnot, der den Streit über die Schätzung der lebendigen Kräfte gleich d'Alembert als einen blossen Wortstreit[1]) ansah, und der sich überdies vornehmlich an die Anschauungsweise von Lagrange hielt, ist bei seinem Satz begreiflicherweise nicht zur Annahme eines durchgreifenden Erhaltungsprincips fortgegangen; wohl aber hat er mit seiner Bestimmung der Form, in welcher

[1]) Carnot, Principes fondamentaux etc., Art. 57, S. 37.

man den Verlust an lebendiger Kraft ausdrücken kann, offenbar, wenn auch nicht mit dieser Absicht, die Hindernisse weggeräumt, welche einer ganz allgemeinen Vorstellungsart des Erhaltungsprincips entgegenstanden. Wir sind daher in der geschichtlichen Entwicklung mit jenem Satze bei einem Punkte angelangt, wo die weitere Ausbildung des Princips der Erhaltung derselben Actionsmenge nur noch von der Gewinnung positiver Vorstellungen über den Verbleib der verschiedenen Kraftbestandtheile abhängt. Eine solche Nachweisung wird aber erst gegen die Mitte des 19. Jahrhunderts in entscheidender Weise eingeleitet.

Drittes Capitel.

Charakteristische Hauptsätze der Dynamik in der Rolle von Principien.

110. Ausser dem Satz von den lebendigen Kräften pflegt man noch in den heutigen Darstellungen der Dynamik einige allgemeine Eigenschaften der Bewegung hervorzuheben, die sich in der Periode seit Newton bis auf Lagrange als besondere charakteristische Principien entwickelt hatten, und deren Fassung oder Auslegung auch mehrfach zu ähnlichen Streitigkeiten Veranlassung gegeben hat, wie die Schätzung der lebendigen Kräfte. In letzterer Beziehung ragte das Princip der geringsten Wirkung durch die ursprünglich metaphysische Art seiner Auffassung hervor und ist noch heute durch die Unbestimmtheit und Veränderlichkeit der Gedanken ausgezeichnet, welche man an seinen Namen knüpft. Nimmt man noch alle allgemeinen und principiellen Vorstellungen hinzu, welche sich in Rücksicht auf die rein mathematischen Maxima und Minima der Kraftsummen und Kräftefunctionen für die Bewegung und für das Gleichgewicht bemerklich gemacht haben, so befindet man sich zwar in einem principiell sehr interessanten, aber noch keineswegs durchgreifend geordneten Gebiet. Um das Princip der geringsten Action in seinen verschiedenen Gestalten und Verwandtschaften darzulegen, werden wir die ganze Gruppe der allgemeinen Maximal- und Minimaleigenschaften der Kräftecombinationen ins Auge zu fassen haben.

Die drei andern Hauptsätze betreffen die Bewegung des

Schwerpunkts, die algebraische Summe der nach einer bestimmten Richtung genommenen Bewegungsgrössen und die Erhaltung der Flächen. Mit Ausnahme des letzteren Princips fällt hier jeder Zweifel über die engere oder weitere Fassung fort; auch metaphysische Gesichtspunkte sind verhältnissmässig wenig eingemischt worden, und die schliessliche Hauptfrage bleibt nur noch die, inwiefern sich diese charakteristischen Sätze nebst demjenigen von den lebendigen Kräften dazu vereinigen, die Hauptrelationen für die Bewegung eines Systems auszudrücken und in dieser Beziehung eine systematisch zusammenhängende Gruppe von Grundeigenschaften der Bewegung beliebiger Körpercombinationen vorzustellen. Der fruchtbarste Gesichtspunkt der Betrachtung dieser Sätze wird hienach derjenige sein, welcher sich auf den Hauptinhalt der gesammten Dynamik richtet. Unter Hinzunahme des d'Alembertschen Princips, welches eine Regel für die Benutzung der Gesetze der Statik innerhalb der Dynamik enthält, wird sich zeigen lassen, dass mit den bisher vorgeführten principiellen Haupteinsichten dieser Periode die Dynamik in ihren wesentlichen Verzweigungen geschaffen und zugleich übersichtlich gemacht ist. Indem wir auf diesen Kreis hinweisen, der sich mit der Systematik Lagranges in einem gewissen Sinne schliesst, bezeichnen wir zugleich die innere Verwandtschaft, die zwischen den in historischer Nebenordnung und zum Theil mit dem Anschein der Zufälligkeit einhergehenden Einsichten besteht.

Am kürzesten müssen wir diejenigen Principien erledigen, bei denen für abweichende Auffassungen oder verschiedenartige Begründungen keine sonderliche Gelegenheit vorhanden gewesen ist. Hieher gehört zunächst der simple Satz von der Bewegung oder, wie man auch sagt, von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunkts, dessen Grundlage noch bei Newton aufzusuchen ist, und für den die primitiven Keime eigentlich in die Galileische Grundlegung der Dynamik selbst zu verlegen sind.

111. Da ein bewegter Körper nicht in jedem seiner Punkte genau dieselbe Bahn zu beschreiben braucht, indem neben seiner translatorischen Bewegung auch eine beliebige rotatorische in Frage kommen kann; ja da sogar eine gewisse Verschiedenheit der Bewegung zwischen den auseinanderliegenden Punkten der Regel nach bestehen muss, so hat man schon früh von der Mannichfaltigkeit der zusammen bewegten Theile abstrahirt und die Körper, wo es nicht auf genauere Unterscheidungen ankam,

wie Punkte behandelt. Soll jedoch diese Behandlungsart exact gestaltet werden, so muss wirklich ein Punkt im Körper nachgewiesen werden, der gegen die secundären und innerlich relativen Bewegungen der Theile gleichgültig bleibt und sich so verhält, als wenn in ihm die ganze Masse des Körpers mathematisch punktuell concentrirt und an ihm oder vielmehr an dieser concentrirten Masse alle Kräfte, die an den verschiedenen Theilen des Körpers wirken, sich selbst parallel angebracht wären. Diese Verlegung der Massen und der Kräfte ist der greifbare Ausdruck für die Haupteigenschaft eines solchen Punktes, die Bewegung des Körpers als einer einheitlichen Totalität zu repräsentiren. Von allen rein innern Beziehungen ist dabei abgesehen, und man kann daher sagen, dass die Bewegung jenes Punktes die nach Aussen gerichtete Kraft der Theile oder, mit andern Worten, die Bewegung oder Kraft des Körpers als solchen darstellt.

Das Bedürfniss, welches sich schon früh für die einheitliche Auffassung der Bewegung eines einzelnen zusammenhängenden Körpers geltend machte, musste im Hinblick auf ein System von mehreren Körpern noch fühlbarer hervortreten. Während in jenem Fall der gegenseitige Zusammenhang der Theile als rein statisch, d. h. als wesentlich unveränderlich vorausgesetzt werden konnte und nur die Rotation in Frage kam, stand in dem zweiten allgemeineren Fall dem freien Spiel der innern gegenseitigen Kräfteentwicklung nichts im Wege; die Entfernungen der Theile des Systems konnten sich ändern, und dennoch musste man auch für das System als Ganzes einen Begriff finden, seine Totalbewegung unabhängig von den blos innern Veränderungen exact vorstellig zu machen. Grade in dieser Anwendung zeigt nun der Satz von der Bewegung des Schwerpunkts seine grösste Tragweite und führt auch zu einigen interessanten Consequenzen für die Auffassung aller in der Natur vorhandenen mechanischen Kräfte. Jener Satz besagt nämlich, dass der Schwerpunkt eines Systems sich so verhält, als wenn alle Massen in ihm vereinigt und alle Kräfte sich selbst parallel an ihn verlegt wären. Unter dieser Voraussetzung müssen sich alle innern Kräfte, die ja immer zwischen je zwei Körpern als gleich und entgegengesetzt zu denken sind, zu Null, d. h. zum Gleichgewicht aufheben, und der Bewegungszustand des Schwerpunkts kann nur von äussern Kräften herrühren. Sind die letztern nicht vorhanden, so kann der Schwerpunkt nur eine Trägheitsbewegung haben, d. h. er wird

ruhen oder sich gleichförmig in grader Linie mit derselben Geschwindigkeit nach dem Beharrungsgesetz fortbewegen. Das ganze System wird also im Zustande der Beharrung sein oder, mit andern Worten, seinen Bewegungszustand, unter dem auch der Fall der Ruhe einbegriffen ist, in völliger Einerleiheit erhalten, ganz wie dies dem geläufigeren Beispiel der Trägheit eines einzelnen Körpers entspricht. Nimmt man die Natur als Ganzes, so bildet sie ein mechanisches System, für welches es äussere Kräfte nicht geben kann, da die letztern von ausserhalb der Natur kommen müssten. Alle Bewegungsantriebe und alle Ursachen des Gleichgewichts gehen in diesem Universalmechanismus von den Körpern des Systems selbst aus und haben den Charakter innerer Kräfte, die sich, an den Schwerpunkt verlegt, zu Null aufheben müssen. Die Totalität kann also nicht unter der Einwirkung einer beschleunigenden Kraft stehen; aber auch die Möglichkeit der blossen Beharrungsbewegung ist in diesem besondern Fall ausgeschlossen, so dass nur die andere Seite der Trägheit, nämlich der Fortbestand der Ruhe übrigbleibt. Bei jedem andern mechanischen System muss man nämlich die vorgängige Wirksamkeit einer äussern Kraft, durch welche das ganze System eine Beharrungsbewegung erhalten hat, als Möglichkeit voraussetzen. Man drückt sich daher ganz richtig aus, wenn man in Ermangelung fortwirkender äusserer Kräfte von einem System behauptet, dass sein Schwerpunkt in Ruhe oder in einer Trägheitsbewegung begriffen sein müsse. Schliesst man aber ausser der gegenwärtigen Fortwirkung äusserer Kräfte auch noch eine vorgängige und abgeschlossene Wirkung von solchen aus, so fällt auch die Möglichkeit der Beharrungsbewegung fort. Die letztere kann nur von der Aufhäufung einer Geschwindigkeit herrühren, und diese Geschwindigkeit, die dem ganzen System und seinem Schwerpunkt inwohnen soll, kann nur von einer äussern Kraft erzeugt sein, da die blos innern Kräfte nur innere Bewegungen hervorbringen können und sich in Beziehung auf den Schwerpunkt gegenseitig aufgehoben hätten. Man sieht hienach, dass für die Natur oder überhaupt für ein in Beziehung auf Gegenwart und Vergangenheit völlig isolirt und selbstgenugsam gedachtes mechanisches System die Möglichkeit einer Beharrungsbewegung des Schwerpunkts und mithin einer Translation im Raume unbedingt fortfällt.

112. Newton hat in der Einleitung seines Werks über die

Mathematischen Principien der Naturphilosophie[1]) den Satz aufgestellt, dass der Trägheitszustand des Schwerpunkts eines Systems von Körpern durch die wechselseitigen Actionen der Körper gegeneinander nicht berührt werde, und er hat zugleich darauf hingewiesen, dass in diesem Satz für die Trägheit eines durch innerliche Kräfte veränderlichen Systems dasselbe ausgesprochen sei, was in Rücksicht auf den einzelnen Körper und dessen Schwerpunkt gelte. Es liegt in der Newtonschen Formulirung hienach Zweierlei. Erstens hat das Trägheitsgesetz eine weitere Fassung erhalten, indem zu dem Begriff der Trägheit eines einzelnen Körpers oder eines starren Systems, d. h. eines solchen, in welchem keine Distanzveränderungen der Theile stattfinden, noch die Vorstellung von der Trägheit eines Systems hinzugefügt ist, in welchem innere Actionen die gegenseitigen Entfernungen der Theile abändern. Zweitens ist die Unveränderlichkeit der Lage des Schwerpunkts durch innere Kräfteentwicklungen klargestellt. Diese letztere Einsicht ruht auf dem dritten Bewegungsaxiom Newtons, dass die Action der Reaction gleich sei. In der That ist auch der Satz von der Trägheit des Schwerpunkts als ein Corollar zu jenem dritten Grundgesetz der Bewegung hingestellt. Die Unveränderlichkeit der Lage des Schwerpunkts in Beziehung auf das System wird zunächst an zwei Körpern dargethan. Ihre wechselseitigen Actionen können, da sie auf beiden Seiten gleich sein müssen, die Distanzen beiderseitig nur in einer Proportion verändern, welche den ursprünglichen Schwerpunkt auch noch fernerhin denjenigen Punkt sein lässt, der den Abstand im umgekehrten Verhältniss der Massen eintheilt. Er behält also seine nothwendige Eigenschaft bei, d. h. die Bedingungen seiner Ortsbestimmung in Beziehung auf die beiden Körper werden durch die gegenseitigen Actionen der letztern nicht geändert. Die den Massen proportionale Wirkung ist hiebei natürlich vorausgesetzt; aber innere Kräfte können auch nicht anders wirksam gedacht werden. Die Attractionen bilden hier das reinste Beispiel. Wenn man noch nichts von der absoluten Geschwindigkeit und den Kraftveränderungen in der gegenseitigen Anziehung von zwei Körpern wüsste, so würde man doch nach diesem Newtonschen Gesetz der unveränderlichen Lage des Schwerpunkts zu jeder Lageveränderung des einen Körpers eine proportionale Verschie-

[1]) Phil. nat. princ. math., Coroll. 4 zu Axiom III in den Präliminarien.

bung des andern gegen den Schwerpunkt angeben können, die in derselben Zeit stattgefunden haben müsste. Will man das Beispiel des Stosses wählen, so muss man von vornherein, d. h. vor dem Stoss die Bewegung des Schwerpunkts von der nicht gemeinschaftlichen und daher blos relativen Bewegung, durch welche die Körper gegen einander in den Bewegungsgrössen differiren, absondern und auf diese Weise die Beharrungsbewegung des ganzen Systems und seines Schwerpunkts ermitteln. Alsdann hat man die so zu sagen äussere Affection des Systems isolirt, und es bleiben nur die relativen Actionen übrig, die in diesem Fall die Rolle innerer, den Massen proportionaler Kräfte spielen. Mögen sie sich nun, wie bei dem unelastischen Stoss, auch für die gegenseitigen Ortsveränderungen zu Null aufheben, oder mögen sie, wie bei dem elastischen Stoss, ihre gleiche Action und Reaction entwickeln, so werden sie doch den Schwerpunkt in seiner Lage zu den Körpern nicht verschieben. Das Beispiel des Stosses erläutert mithin beide Gesichtspunkte Newtons zugleich, indem mit Ausnahme des einzigen Falles, in welchem die Bewegungsgrössen beiderseitig gleich oder, mit andern Worten, die gegebenen Geschwindigkeiten den Massen umgekehrt proportional sind, eine Trägheitsbewegung des Schwerpunkts und des Systems vor, in und nach dem Stoss statthat, während an dem relativen Ort des Schwerpunkts zwischen den Körpern weder vor, noch in, noch nach dem Stoss etwas geändert wird. Hieran erläutert sich auch die Newtonsche Ausdrucksweise, dass der Schwerpunkt, abgesehen von äussern Kräften, entweder ruht oder sich gleichförmig in grader Linie bewegt. Diese letztere Bewegung kann nur von einer überschüssigen und daher von Aussen herstammenden Geschwindigkeit herrühren. Auch erläutert Newton seine Vorstellung, indem er zunächst zwei Körper von einer gemeinschaftlichen Geschwindigkeit afficirt sein und so das System, welches sie bilden, nebst dem Theilungspunkt ihrer Distanz, der nach dem umgekehrten Verhältniss ihrer Massen bestimmt ist, mit eben jener Geschwindigkeit fortschreiten lässt. Nebenbei bemerkt, sieht man hier die ausserordentliche Wichtigkeit, alle Kräfte in Rücksicht auf ein System in innere und äussere einzutheilen. Auch alle Affectionen, d. h. die Bewegungszustände der Beharrung und die Ruhe kann man stets darauf ansehen, ob ihre Existenz auf das Zusammenwirken innerer Kräfte oder auf eine dem System äusserliche Ursache zurückzuführen sei. Auch

ist es oft genug hinreichend, dass sich die Bewegungsgrössen so betrachten lassen, als wären sie durch gegenseitige Actionen erzeugt. Zwei Körper, die unmittelbar bei ihrem Zusammenstoss gleiche, aber entgegengesetzte Bewegungsgrössen haben, könnten z. B. zu diesen Bewegungsgrössen durch einen vorgängigen Attractionsprocess gelangt sein. Hiebei würde natürlich die Anziehung nicht aufhören; aber abgesehen hievon hätte man den einfachen Fall des Stosses mit isolirten Geschwindigkeiten ohne eigentliche Kräfte, die zwischen den Körpern des Systems wirkten. Es ist mithin genug, wenn die gegenseitig in das Spiel kommenden Grössen nur so beschaffen sind, dass sie von innern Kräften herrühren könnten.

113. Der moderne Satz von der Bewegung des Schwerpunkts enthält noch einen wichtigen Bestandtheil mehr, als das bei Newton formulirte Princip. Dieser Satz bildet eine Erweiterung, welche über den speciellen Fall hinausgeht, dass nur innere Kräfte vorhanden sind. Unter der Voraussetzung äusserer Kräfte bewegt sich der Schwerpunkt eines noch so veränderlichen Systems stets so, als wenn alle Massen und Kräfte an ihn verlegt wären und das System übrigens gar nicht existirte. So nahe einige Seiten und Fälle dieses Satzes jederzeit lagen, indem ja jeder bewegte Körper als solcher ein System vorstellte, in welchem man die Bewegung des Schwerpunkts am natürlichsten als die so zu sagen summarische des Körpers anzusehen veranlasst wurde, so hat es doch eine überraschend lange Zeit gedauert, ehe der Satz von der Bewegung des Schwerpunkts in seiner universellen Bedeutung entwickelt wurde. Wir finden ihn in dieser vollkommensten Fassung erst bei Lagrange[1]) besonders ausgezeichnet, nachdem d'Alembert sich noch mit dem besondern Fall beschäftigt hatte, dass unveränderliche beschleunigende Kräfte von gleicher Richtung im Raume oder gegen einen festen Mittelpunkt hin, die einzelnen Körper afficiren. Aber auch hier hatte d'Alembert noch nicht die gewöhnliche Form des Satzes gefunden. Wie wenig sich selbst zur Zeit Lagranges die weitere Fassung eingebürgert hatte, beweist das Verhalten des letztern in seiner Functionstheorie[2]), wo er den Satz noch in der Newtonschen Beschränkung in Worte fasst und trotz des weitertragenden Calcüls in dieser engeren

---

[1]) Méc. anal., Bd. I (1811) Dynamik Sect. III, besonders Art. 4.

[2]) Théorie des fonctions (1813) dritte Abth. Cap. 6, Art. 33.

Bestimmtheit durch Auswerfung auszeichnet. Die analytische Ableitung oder ein entsprechender begrifflicher, nach der Art Newtons geführter Beweis bietet keine Schwierigkeiten, sobald man nur von vornherein von der strengen Definition des Schwerpunkts ausgeht, die mit der Schwere nichts zu schaffen hat. Blosse Massen und die für einen mathematischen Augenblick gegebenen gegenseitigen Oerter derselben, also ein Inbegriff von Massen mit gewissen Abständen im Raume, — das ist die einzige Voraussetzung für die Bestimmung jenes eigenthümlichen Punkts, den man erhält, wenn man für beliebige zwei Körper die Distanz im umgekehrten Verhältniss der Massen theilt, den so gewonnenen Theilungspunkt als Träger der beiden Massen betrachtet, mit ihm und einem dritten Körper auf dieselbe Weise operirt und dieses Verfahren auf alle übrigen Theile des Systems ausdehnt. Dieses Centrum der Massen, wie man es auch exacter genannt hatte, ist ausschliesslich eine Function der Massenverhältnisse und der geometrischen Figur ihrer Gruppirung. Unmittelbar sind es aber die absoluten Massen und die zugehörigen absoluten Abstände, welche ohne Rücksicht auf irgend welche bestimmte Kräfte jenen wichtigen Punkt determiniren. Obwohl hiebei die Massen ausdrücklich als nicht nothwendig von der Schwere oder einer andern Kraft afficirt gedacht werden, so giebt doch erst der Gedanke einer beliebigen Möglichkeit von Kraftaffectionen der Vorstellung des Punktes einen natürlichen Sinn. Jede Kraft, die man sich angebracht denken mag, wird, wie mannichfaltig sie auch sonst wirken möge, doch, indem sie auf alle Theile und in allen Theilen der Materie agirt, der Menge der Materie proportional thätig sein. Dies ist der tiefere principielle Grund, warum ein blosses Massencentrum, abgesehen von der Gestalt der besondern Kräfte, die in dem hier fraglichen Satz enthaltenen Eigenschaften haben könne. Die gewöhnliche Einschiebung paralleler Kräfte zur Ableitung des Schwerpunkts und die Betrachtung des letzteren als eines Centrums der parallelen Kräfte nach dem Vorbilde des Verhältnisses am Hebel ist daher für die höhere Mechanik unnöthig, wenn nicht etwa gar der Strenge der Abstraction hinderlich. Nicht drehbare Gruppen paralleler Kräfte, sondern unmittelbar die Massen im Hinblick auf jedwede, in ihrer besondern Gestalt ganz zufällige und gleichgültige Kräfteapplicationen sollten den Ausgangspunkt für die Begriffsbestimmung und Ermittlung jenes

Massencentrums bilden, welches nach der Veranlassung seiner Conception Schwerpunkt heisst.

Geht man von dem Begriff des Massencentrums aus, so ist klar, dass jede Kraft zum Theil die gegenseitige Distanz des Körpers gegen die andern Körper ändern und zum Theil eine nicht in die Wechselwirkung eintretende, d. h. freie Fortschiebung des Systems zu bewirken vermöge. Diese Fortschiebungen hat man für sich zu betrachten. Die Tendenzen zu denselben setzen sich zusammen, und es ergiebt sich, dass von ihnen die Bewegung des Schwerpunkts herrühren müsse. Die wechselseitigen Actionen ändern aber, da sie den Massen proportionale, aber umgekehrte Distanzänderungen hervorbringen, die Form des Systems nur in den absoluten Dimensionen, aber nicht in der Proportionalität der Entfernungen gegen die Theilungspunkte. In Rücksicht auf gewisse Bestandtheile der Kräfte bleibt also der Schwerpunkt unverändert; in Rücksicht auf die übrigen Bestandtheile mag er etwa in einer Curve bewegt werden, ganz als wenn sich diese Bestandtheile an ihm unmittelbar zusammensetzten. An Stelle der Unterscheidung der beiden Bestandtheile, d. h. der gegenseitigen und der äussern Actionen kann man nun auch sofort alle Kräfte ohne Unterschied angebracht denken, da sich ja alsdann die innern Kräfte sofort als gleiche und entgegengesetzte Bewegungsantriebe aufheben.

114. Nicht unerwähnt mag der ziemlich schnelle analytische Nachweis bleiben, bei welchem man von einer Eigenschaft des Schwerpunkts in endlichen Ausdrücken ausgeht und durch zweimalige Differentiation zu derjenigen Gleichung für die Bewegung des Schwerpunkts gelangt, die unsern Satz einschliesst. Die Gesammtmasse multiplicirt mit dem Abstand des Schwerpunkts von einer beliebigen Ebene ist gleich der Summe der Producte aus den Einzelmassen und den zugehörigen Abständen von derselben Ebene. Dieser Satz, in Bezug auf drei Coordinatenebenen gedacht und für jede beliebige Lage zu diesen Ebenen, also für jeden Punkt oder Augenblick der Bewegung eines solchen Systems erwogen, ergiebt drei Gleichungen zwischen dem Orte des Schwerpunkts und den jedesmal zugehörigen Oertern der einzelnen Massen oder, wie man gewöhnlich sagt, zwischen den Coordinaten des Schwerpunkts und denen der einzelnen materiellen Punkte. Die Untersuchung der Form einer einzigen dieser Gleichungen kann für die beiden andern gelten, da die letzteren nur das für die beiden

übrigen Dimensionen des Raumes wiederholen, was für die eine Coordinatenaxe zutrifft. Differenzirt man nun zweimal, indem man den Abstand von der Ebene, d. h. die Abscissen als mit der Zeit veränderlich betrachtet, so erhält man eine Gleichung, in welcher die zweiten Differentialquotienten (des Raumes nach der Zeit) multiplicirt mit den zugehörigen Massen die an den einzelnen Theilen des Systems resultirenden Kräfte vorstellen können. Dieser einen Seite der Gleichung steht auf der andern die ganze Masse des Systems, multiplicirt mit dem Differentialcoefficienten für die Bewegung des Schwerpunkts nach der fraglichen Axe, gegenüber. Die Gleichung besagt also, dass die Bewegung des Schwerpunkts dieselbe sein würde, wenn man sich die Summe der Kräfte, deren Träger die verschiedenen Massen sind, unmittelbar in dem Schwerpunkt wirkend dächte. In einer solchen Gleichung liegt der genaue Ausdruck des Princips.

Man kann jedoch auch unmittelbar, ohne Differenzirung, aus der Grundformel der Abstände das Gesetz der Bewegung des Schwerpunkts entnehmen, indem man die Gleichung sofort als eine endliche Gleichung der Bewegung interpretirt. Die Fassung des Gesetzes gestaltet sich alsdann freilich in der äusserlichen Form etwas anders. Die Bewegung des Schwerpunkts muss aus diesem Gesichtspunkt nämlich stets so ausfallen, dass sie dieselbe bleibt, wenn man an die Stelle der Gesammtmasse, die eine bestimmte Ortsveränderung erfährt, die einzelnen Massen mit den zugehörigen Ortsveränderungen setzt und diese Producte miteinander combinirt. Diese Producte sind nicht eigentliche Bewegungsgrössen, da die Geschwindigkeiten hier ganz beliebige, unbestimmte Grössen bleiben müssen. Grade aber im Hinblick auf letztere Unbestimmtheit kann man ihre Zusammensetzung ebenfalls in der besondern Ausführung offenlassen, und man gewinnt auf diese Weise für das Verhalten des Schwerpunkts in der Bewegung eine Vorstellung, welche, wie der Begriff des Schwerpunkts selbst, ebenfalls nur an die Massen und jeweiligen Abstände anknüpft und alle etwaigen Kräfte oder Beharrungsbewegungen so ansehen lässt, als wenn sie die von ihnen hervorgebrachten Ortsveränderungen der einzelnen Massen unmittelbar im Schwerpunkt hervorzubringen suchten und sich dort mit dieser Art von Wirkungen combinirten.

115. Das zweite Princip, dessen Anführung und geschichtliche Herleitung sich am unmittelbarsten an die bisherige Dar-

stellung anschliesst, findet sich zwar als solches noch nicht einmal bei Lagrange besonders ausgezeichnet und in die Reihe der charakteristischen Hauptsätze aufgenommen, greift aber mit seiner Wurzel bis in die Newtonschen Vorstellungsarten zurück und hat, abgesehen von seinem eignen Inhalt und seiner Bedeutung für die spätere vollständige Zusammenfassung aller principiellen Hauptpunkte der Mechanik, auch noch ein besonderes historisches Interesse. Es ist gleichsam das Seitenstück zu dem Princip der Erhaltung der lebendigen Kräfte, indem es zeigt, in welcher Form sich eine Erhaltung der blossen Bewegungsgrössen, d. h. der Producte von Massen und Geschwindigkeiten, wirklich behaupten lasse, ohne in den Descartesschen Fehler zu verfallen, vermöge dessen die Conservirung derselben Menge ohne Rücksicht auf die gegenseitigen Aufhebungen, d. h. ohne Beachtung des Gegensatzes in der Richtung und im Sinne der Geschwindigkeiten vorausgesetzt wurde.

Sehr zutreffend bemerkte schon Newton[1]), dass die Entwicklung innerer Kräfte die algebraische Summe der Bewegungsgrössen nicht verändere, die man dadurch erhalte, dass man die in demselben Sinne auf derselben Richtung zusammenwirkenden Quantitäten nehme, die entgegengesetzten aber aus demselben Gesichtspunkt subtrahire. Die so entstehende Summe und Differenz erhält sich unverändert. Der ganze Satz, der bei Newton demjenigen von der Erhaltung des Bewegungszustandes des Schwerpunkts unmittelbar vorangeht, ist ebenfalls als ein blosses Corollar zu dem Fundamentalaxiom von der Gleichheit und der entgegengesetzten Richtung der Action und Reaction hingestellt. Er wird durch das Beispiel des Stosses erläutert und hiebei sogar für den Fall erörtert, dass die Linien, auf denen die Körper gegeneinanderlaufen, einen Winkel bilden. Das Princip selbst ist ganz allgemein formulirt, wenn auch die Erwähnung einer Axe fehlt, auf welche man sich die Bewegungsgrössen projicirt denken kann. Stillschweigend ist vorausgesetzt, dass man die Bewegungsgrössen auf eine gemeinschaftliche Richtung beziehen muss. Es wird dies zunächst am allernatürlichsten diejenige Richtung sein, nach welcher sie sich wirklich summiren und aufheben. Das Newtonsche Beispiel des Winkelstosses erläutert dies wiederum, indem ein Theil der Bewegungsquantität bei der nothwendigen Zerlegung in die

[1]) Phil. nat. princ. math., Einleitung Coroll. 3 zum dritten Bewegungsaxiom.

gemeinschaftliche Berührungsebene der beiden Körper fällt und nach diesem Gesichtspunkt der Zerlegung dieselbe bleibt, welche sie aus demselben Gesichtspunkt vor dem schiefen Stoss war. Es ist hier eine bestimmte Richtung, nämlich diejenige der Resultante, welche in jener Ebene liegt, worauf ein Theil der Bewegungsgrössen bezogen wird. Der andere Theil, bei welchem stets eine Differenz in Frage kommt, ist aber in derjenigen Linie zu nehmen, welche im Berührungspunkt auf der gemeinschaftlichen Berührungsebene senkrecht steht. In allen concreten Fällen wird sich in der natürlichsten Weise die Richtung ergeben, nach welcher man sich die Bewegungsgrössen zusammengesetzt oder abgezogen zu denken hat, um die Vorstellung den wirklichen Vorgängen anzuschliessen.

Nun ist aber aus demselben Grunde, aus welchem man die Kräfte nach beliebigen Richtungen in äquivalente Gruppen zerlegen kann, auch die Zerlegung der Geschwindigkeiten und mithin die Projection der Bewegungsgrössen möglich. Diese Projection kann ebenso betrachtet werden, wie die Reducirung einer Kraft nach einer gegebenen Richtung. Steht es nun einmal fest, dass nach der Richtung ihrer natürlichen Wirksamkeit und ihres thatsächlichen directen Antagonismus die Bewegungsgrössen stets dieselbe Summe ihrer einstimmigen und dieselbe Differenz ihrer entgegengesetzten Bestandtheile darbieten, wie es bei Newton grade in dieser Weise formulirt ist, so folgt hieraus auch, dass die fraglichen Quantitäten, die in den verschiedensten Zuständen gleich bleiben, auch in ihren Projectionen auf eine beliebige Richtung diese Gleichheit reproduciren müssen, indem es sich hiebei nur um eine rein mathematische proportionale Aenderung der ursprünglich als gleich gegebenen Grössen handelt. Der scheinbar allgemeinere Ausdruck des Princips, wie man ihn heute zu fassen pflegt, ist daher nur eine mathematische Bearbeitung der Newtonschen Formulirung und enthält, rein mechanisch betrachtet, keine wesentliche Erweiterung. Man muss noch heute, wie Newton, auf die Gleichheit der Action und Reaction zurückgehen, wenn man den Satz erweisen will, dass die algebraische Summe der Bewegungsgrössen nach einer beliebigen Richtung stets dieselbe bleibe, wie auch das Spiel der innern Kräfte beschaffen sein möge. Der ursprünglich gegebene sehr einfache Grund, dass der Mittheilung irgend eines Elements oder Theils von Bewegungsgrösse eine gleiche Mittheilung in der entgegengesetzten Richtung entspreche, und dass es sich mit den Verlusten ebenso verhalte,

ist nichts weiter als eine Berufung auf die Gleichheit von Action und Reaction, und ist noch heute die einfachste Beweisart unseres Satzes. Jede innere Kraft wird als doppelseitig und auf der Verbindungslinie ihrer Träger wirkend vorgestellt. Sie kann den freien Ueberschuss der Bewegungsgrössen nicht vermehren und nicht vermindern, und sie kann die Theile, die sich in Differenz befinden, zwar, wie bei dem unelastischen Stoss, absolut aufzuheben scheinen, aber die ursprüngliche Differenz selbst auch in diesem nicht ändern.

116. Wirken noch ausserdem äussere Kräfte auf die Körper des Systems, so bringen sie neue Bewegungsgrössen hervor, die sich ebenfalls auf die beliebig gewählte grade Linie projiciren lassen und hier den Zuwachs an Bewegungsgrösse nach dieser Richtung repräsentiren. Man spricht daher wohl gegenwärtig das Princip auch so aus, dass man gleich von der Annahme stetig fortwirkender äusserer Kräfte ausgeht und den Zuwachs an Bewegungsgrösse, den diese Kräfte nach einer beliebigen Richtung im Raume hervorbringen, derjenigen Veränderung der Bewegungsgrösse gleich setzt, welche diese Kräfte hervorgebracht haben würden, wenn sie reducirt auf die fragliche Richtung unmittelbar auf derselben gewirkt hätten. Hiebei fallen alle innern Beziehungen, vermöge deren sich gewisse Bestandtheile der äussern Kräfte aufheben, ohne Weiteres als unerheblich fort. Der ganze Satz vertritt auf diese Weise nichts weiter als eine Reduction und Zusammensetzung der vorhandenen oder der zu erzeugenden Bewegungsgrössen eines Systems nach einer beliebigen Richtung. Nicht eine bestimmte grade Linie bildet hier den wesentlichen Anhaltspunkt, sondern die allgemeine Richtung, welche diese Linie im Raume vertritt, und welche durch jedwede andere ihr parallele Linie ebenso vertreten wird. Man denke sich den Inbegriff aller möglichen den Raum erfüllenden Linien, welche dieselbe Richtung haben, und man hat ein Bild für den abstracten, von der besondern Lage unabhängigen Begriff einer Richtung im Raume. Die Projectionen sind für eine solche Richtung stets gleich, welche Linien man auch zu Repräsentanten der Richtung nehmen mag.

Wirken keine äussern Kräfte, so besagt die erweiterte Fassung des Satzes für diesen speciellen Fall, dass der Zuwachs an Bewegungsgrösse Null oder, mit andern Worten, dass die vorhandene algebraische Summe der Bewegungsgrössen beständig dieselbe sein müsse. Auf diese Weise tritt wiederum das Gesetz der Constanz

oder Erhaltung der nach ihren Vorzeichen veranschlagten Bewegungsgrössen hervor. Natürlich würde sich auch der besondere Fall, dass die äussern Kräfte einander nach irgend einer fraglichen Richtung aufheben, für diese Richtung entsprechend gestalten. Sie würden alsdann genau den Charakter der innern Kräfte haben, die sich paarweise für die Entstehung von Bewegungsgrössen neutralisiren.

Später wird sich zeigen, welche Rolle das Princip der Unabhängigkeit der Bewegungsgrössen von den innern Kräften, d. h. der Grundsatz der Erhaltung ihrer algebraischen Summe nach einer beliebigen Richtung im Raume für Statik und Dynamik zu spielen vermöge. Für jetzt sei nur noch daran erinnert, dass schon bei Galilei, wenn auch nicht die unterschiedenen Bewegungsgrössen, so doch die Geschwindigkeiten, die an einer und derselben Masse durch die Schwere nach verschiedenen Richtungen, z. B. auf verschieden geneigten Ebenen erzeugt gedacht wurden, das Gesetz des Zuwachses repräsentirten, welcher durch eine äussere Kraft für die Bewegungsgrössen nach verschiedenen Richtungen in derselben Zeit gewonnen wird.

Eben dieselbe Bemerkung, welche sich bei dem Gesetz der Bewegung des Schwerpunkts über die innern und äussern Kräfte und über die blossen Beharrungsbewegungen machen liess, findet auch auf das Gesetz der Veränderung oder Erhaltung der Bewegungsgrössen nach einer beliebigen Richtung ihre volle Anwendung. Man kann jede vorhandene Bewegungsgrösse, deren Entstehung nicht auf innere Kräfte zurückzuführen ist, oder die nicht zusammen mit einer gleichen und entgegengesetzten Grösse gegeben wird, als äussere Ursache behandeln, indem dieselbe wenigstens in der Vergangenheit eine dem System fremde Kraft zum Ursprung gehabt haben muss. Da nun nach unserer obigen Andeutung die Natur als Ganzes keine äussern Kräfte, d. h. keine Kräfte enthalten kann, die von ausserhalb der Natur stammten, und da mithin alle Kräfte als von irgend einem Körper der Natur ausgehend gedacht werden müssen, so können auch die jeweilig vorhandenen Geschwindigkeiten und Bewegungsgrössen nur als Erzeugungen früherer Kräftebethätigungen angesehen werden. Alsdann muss ihnen aber nach dem Gesetz der Action und Reaction auch eine zugehörige Veränderung in entgegengesetzter Richtung entsprochen haben. Die Veränderung der Bewegungsgrösse kann nicht einseitig gewesen sein, und es muss daher auch jetzt für die

scheinbar isolirte und wie aus Nichts gegebene Bewegungsgrösse, die äusserlich und unmotivirt in irgend einem beschränkten System angetroffen wird, in dem universellen System der Natur eine ihr entgegengesetzte und sie aufhebende Grösse vorhanden sein. Für die gesammte Natur scheidet also die Möglichkeit aus, dass nach irgend einer Richtung im Raume die algebraische Summe der Bewegungsgrössen einen andern Werth als Null ergebe. Dies stimmt auch vollkommen zu der Idee von dem Schwerpunkt der Natur, wie wir sie oben entwickelt haben. Dieser Schwerpunkt und dieses Massencentrum könnte nicht absolut ruhen, wie es nach jener Deduction nothwendig ist, wenn nach irgend einer Richtung im Raume eine Bewegungsgrösse vorhanden wäre, die für das System eine Beharrungsbewegung bedeutete. Die unbestimmte Idee des Cartesius hat hienach einer überraschenden, aber sehr rationellen Thatsache Platz gemacht, dass sich nämlich nicht die Summe der absoluten Bewegungsgrössen, wohl aber die nach einer beliebigen Richtung im Raume genommene algebraische Summe der Bewegungsgrössen unvermehrt und unvermindert erhält, indem sie beständig in allen Richtungen des Raumes gleich Null sein muss. Descartes hatte sich vorgestellt, dass die einmal geschaffene Menge der Bewegungsgrössen sich unverändert erhalte und hatte hiebei jede Grösse ohne Rücksicht auf den Gegensatz und ein Vorzeichen als absolut zu veranschlagen vorausgesetzt. In dieser Gestalt ist nun die Idee thatsächlich falsch, da die absolute Summe der Bewegungsgrössen sehr verschieden sein kann. Sieht man jedoch in der angegebenen Weise auf die Bewegungsgrössen nach einer beliebigen Richtung, und unterscheidet man diejenigen des einen und diejenigen des andern Sinnes in dieser Richtung, so müssen beide Summen einander gleich, d. h. die resultirende Bewegungsgrösse Null sein. Man kann daher, wenn man auf die metaphysische Form der Cartesischen Begriffe eingehen will, allerdings sagen, dass sich dieselbe ursprünglich geschaffene Menge erhalte, und man hat hiebei den Vortheil, dass der Begriff dieser ursprünglich geschaffenen Menge keine logische Bedenken hat, da sein Gegenstand gleich Null ist und daher an sich selbst gegen die Gesichtspunkte einer ursprünglichen Hervorbringung oder einer Vernichtung gleichgültig bleibt. Es lässt sich ohne Widerspruch denken, dass in allen Veränderungen diese Null an resultirender Bewegungsgrösse jederzeit bestanden habe und jederzeit bestehen werde.

117. Ein drittes, sehr berühmtes und sogar noch in der neusten Zeit durch zutreffende Beleuchtungen weiter aufgeklärtes Princip ist dasjenige, welches unter dem Namen eines Satzes der Erhaltung der Flächen am bekanntesten ist, jedoch auch als Princip der Erhaltung der Rotationsmomente auf eine weniger äusserliche Art bezeichnet wird. Es bildet in einer gewissen Beziehung die Ergänzung des Satzes von der Bewegung des Schwerpunkts oder, wenn man will, auch diejenige des Satzes von den nach einer beliebigen Richtung genommenen Bewegungsgrössen. Was jene beiden Principien für die translatorische Bewegung bedeuten, leistet das Princip der Flächenräume für die rotatorische. Auch wird sich später in einer sehr einfachen Weise zeigen lassen, dass die bekannten sechs Gleichungen, wie sie sowohl die Bedingungen des Gleichgewichts als auch in einer allgemeineren Gestalt die nothwendigen Verhältnisse in der Bewegung eines beliebigen, sei es starren oder veränderlichen Systems ausdrücken, den Inhalt dieser Principien zu einem genauen Correlat haben. Streng genommen sind nur zwei Arten der Relation in jenen sechs Gleichungen vorhanden, und nur die Dreizahl der Dimensionen des Raumes und die hiedurch nothwendige Beziehung auf drei Coordinatenaxen verdreifacht jede der beiden Grundbeziehungen. Die eine der letzteren geht auf das Gleichgewicht und die Bewegung, insofern es sich um Fortschiebung des Systems handelt; die andere hat diejenige Seite des Gleichgewichts und der Bewegung zum Gegenstand, bei welcher eine Drehung des Systems in Frage kommt. Nun ist das Princip der Flächen grade dasjenige, welches diese zweite Art der Relation formulirt. Merkwürdigerweise ist es auch zugleich dasjenige Princip, dessen Geschichte unter den charakteristischen Hauptsätzen am weitesten zurückreicht und sich zugleich der wesentlichsten Aufklärungen erst in dem laufenden Jahrhundert rühmen kann.

Als blos beobachteter Sachverhalt ist das Princip der Flächenräume in einer einfachen Gestalt schon bei Kepler vorhanden gewesen, und in der elementaren Darlegung der einfachsten Gründe ist es erst in unserm Jahrhundert durch Poinsot zu seinem gebührenden Platz unter den ersten Elementen der Statik und Dynamik gelangt. Da jedoch die Poinsotschen Wendungen eine ganz allgemeine und in die Fassung aller Principien der Mechanik eingreifende Bedeutung haben, so verschieben wir die eingehendere Erörterung dieser Entwicklungsphase der mechanischen

Grundvorstellungen und mit ihr die schliessliche Beleuchtung des Princips der Flächen auf den nächsten Abschnitt, indem wir uns hier innerhalb unserer mit Lagrange abschliessenden Periode halten und nur hier und da eine anticipirende Hinweisung auf den neuen Standpunkt gestatten. Allerdings hat Poinsot schon gleich am Anfang des Jahrhunderts seine Theorie der Kräftepaare aufgestellt und hiedurch den Rotationsmomenten den Sinn beigelegt, den sie in der freien Bewegung allein haben können. Auch hat er sofort das Princip der Flächen als einen Satz über diese von einer ganz neuen Seite aufgefassten Momente erläutert. Der Abschluss der neuen Vorstellungsart erfolgte jedoch erst mit der 30 Jahre jüngeren neuen Rotationstheorie Poinsots, und da sich überdies die neuen Gesichtspunkte und Vorstellungsarten erst viel später einbürgerten, so haben wir ein Recht, auch das, was noch bei Lebzeiten Lagranges geschehen war, in das spätere Entwicklungsstadium hineinzuziehen.

Wie alle bisher in diesem Abschnitt behandelten Fundamentalsätze hat auch das Princip der Rotationsmomente eine engere oder weitere Fassung erhalten, je nachdem man auf die Erhaltung oder den Zuwachs der Rotationsmomente der Bewegungsgrössen oder, kürzer gesagt, der Rotationsgrössen achtete. Die vorherrschende Idee ist aber immer auf die Erhaltung der Momente, also auf die engere Fassung fixirt geblieben. Die Rotationsmomente sind natürlich ebenso von den innern Kräften unabhängig, wie die nach einer beliebigen Richtung genommenen Bewegungsgrössen, die aus diesem Gesichtspunkt für die Fortschiebung des Systems fraglich werden. Wenn jedoch überhaupt Rotation bestehen soll, so muss ein Ueberschuss der Drehungsmomente in dem einen Sinne (also entweder für Rechts- oder Linksdrehung) in der Form von beharrenden Bewegungsgrössen vorhanden sein. Das Princip der Gleichheit von Action und Reaction, für welches man eine genau entsprechende Anwendung auch für den Fall der Sinnesverschiedenheit der Drehungsmomente erwarten könnte, hat in dieser Richtung bis jetzt zu keinen besondern Aufschlüssen geführt, da man die Erzeugung der eigentlichen Rotationen in einer Weise, die in dem Spiel stetiger Kräfte die Symmetrie von Action und Reaction hervortreten lässt, noch nicht in das Auge zu fassen Gelegenheit fand. Wir werden daher auch an die ganz gewöhnliche Fassung des Princips der Flächen unmittelbar

anknüpfen, zumal diese Auffassungsart schon die ersten historischen Thatsachen für sich hat.

Eines der drei Keplerschen Gesetze besagt, dass die Leitstrahlen, welche man sich von irgend einem Planeten nach der Sonne gezogen denkt, Flächenräume beschreiben, die der Zeit proportional sind oder die, wie man auch sagen kann, für die Zeiteinheit beständig dieselben bleiben, so dass keine Vermehrung oder Verminderung dieser Flächenerzeugung stattfindet. Für Kepler war diese Beständigkeit der in gleich grossen Zeitabschnitten beschriebenen Sectoren eine empirische Thatsache, die für jeden Planeten einzeln ohne Beziehung auf die übrigen galt. Auch war Kepler, wie wir Nr. 77 gesehen haben, von einer mechanischen Zergliederung, ja überhaupt von rein mechanischen Gesichtspunkten noch weit entfernt. Die Ausdrucksart Keplers ist aber für den Namen und für die Vorstellungsart des Princips maassgebend geworden, indem die Unveränderlichkeit der in gleichen Zeiten beschriebenen Flächeninhalte das charakteristische Merkmal einer für die Mechanik überaus wichtigen Grundeinsicht geblieben ist und die Spur des Ursprungs bis auf den heutigen Tag in dem Namen wie in der Sache wenigstens zu einem Theil fortgepflanzt hat.

118. Newton erweist die Keplersche Thatsache als eine mechanische Nothwendigkeit, die zur Voraussetzung hat, dass die auf den umlaufenden Körper wirkende Kraft beständig von einem und demselben Centrum ausgeht. Für die Centripetalkräfte wird der Satz von den Flächenräumen erwiesen und sogar an die Spitze[1]) der Theorie dieser Kräfte gestellt. Hiemit war die Keplersche Thatsache in einen mechanischen Lehrsatz umgewandelt, und alle fernere Entwicklung hat nur die Erweiterung der Voraussetzungen betroffen, unter denen die auf jedes Massenelement oder jede Masseneinheit, die für sich selbst als Endpunkt eines Leitstrahls gedacht wird, zu rechnenden Flächenräume für gleiche Zeitabschnitte gleiche Summen ergeben. Die Summirung der auf die verschiedenen Körper oder Massentheile entfallenden Flächenräume ist die wesentliche Ausdehnung des Princips gewesen, und man hat, um die Ungleichheit der Massen in Rechnung zu bringen, die Flächenräume mit den Massen multiplicirt. Ebensogut hätte man aber auch jede Masseneinheit oder jedes Theilchen der

[1]) Phil. nat. princ. math., Buch I, Sect. II, erster Satz.

Materie, welches allen übrigen gleich gedacht wird, als für sich bewegt denken können, wobei ihm dann sein besonderer Flächenraum zuzutheilen gewesen wäre. Auch ist Derartiges gelegentlich, wie z. B. von Poinsot, geschehen; doch wird hierauf erst später einzugehen sein. Es war nur nöthig, ausdrücklich hervorzuheben, dass die Summirung der Flächenräume für verschiedene Punkte des Systems, auch abgesehen von der Berücksichtigung von Massenverschiedenheiten, die wesentliche Ausdehnung des Princips vertritt. Für einen einzelnen Körper ist auch keine Projection der Flächenräume auf eine beliebige Ebene nothwendig. Für mehrere Körper, die in verschiedenen Ebenen liegen, lässt sich aber das Princip der Flächen gar nicht anders formuliren, als indem man eine beliebige Ebene im Raume zur Projectionsebene nimmt. Man reducirt dann gleichsam die beschriebenen Sectoren auf diese Ebene oder vielmehr auf deren Richtung im Raume, da es auf die besondere Lage der Ebene nicht ankommt und die ganze Erfüllung des Raumes mit Ebenen von gleicher Richtung das repräsentirt, worauf es ankommt. Was man hier zu summiren hat, sind die den Massen entsprechenden Flächenräume oder, was wesentlich auf dasselbe hinauskommt, die Drehungsmomente, mögen die letztern mit Rücksicht auf die Kräfte oder auf die bereits vorhandenen Bewegungsgrössen genommen werden. Dem Punkt, von welchem in der Projectionsebene die Leitstrahlen ausgehen, entspricht für das System eine in diesem Punkt senkrechte Linie, auf die sich die Rotationen als auf ihre Axe bezogen finden. Man kann nun zu jedem System eine beliebige Linie von bestimmter Lage innerhalb oder ausserhalb des Systems als Axe wählen, und hiemit ist die Projectionsrichtung, d. h. die Richtung aller Ebenen mitbestimmt, auf die man für diesen Fall zu projiciren hat. Die Axe selbst projicirt sich in einem Punkt, indem alle fraglichen Ebenen auf ihr senkrecht stehen müssen. Geht man dagegen statt von einer Axe sofort von einer Projectionsebene aus, so wird die Mannichfaltigkeit der zugehörigen Axen ausgeschlossen, indem der Beziehungspunkt der im System gegebenen Rotationen durch seine Projection den Ausgangspunkt der Leitstrahlen natürlich und nicht willkürlich bestimmt.

Hienach kann man überhaupt einen ganz allgemeinen Satz über die Drehungsmomente in Bezug auf eine beliebige Axe formuliren, d. h. man kann das Gesetz der Flächenräume in seiner allgemeinsten Fassung hinstellen oder man kann sich in der

Formulirung eines Hauptsatzes innerhalb derjenigen Voraussetzungen halten, unter denen die Summe der Flächenräume in Beziehung auf eine beliebige Ebene eine constante Grösse bleibt. Diese Constanz kann auch in diesem Falle dahin ausgedrückt werden, dass die Summe der in gleichen Zeitabschnitten beschriebenen Flächenräume dieselbe bleibt, welchen Theil der Zeit man auch betrachten möge, oder auch dahin, dass diese Summe der Zeit proportional wachse.

119. Die allgemeineren Ideen, in denen das Princip der Flächen bereits in einer sehr weiten Fassung theils ausdrücklich theils indirect enthalten war, traten sämmtlich um das Jahr 1745 oder bald darauf hervor. Im Interesse der am vollständigsten ausgefallenen Darlegung müssen wir mit der Hinweisung auf eine ausgedehnte Abhandlung Eulers beginnen, welche im ersten Bande seiner kleineren Schriften den ersten Platz[1]) einnimmt. Sie behandelt die rotirende Bewegung von Körpern, die in einer Röhre eingeschlossen sind, und hat nicht direct die Feststellung eines Princips der Flächen oder der Rotationsmomente zum Zweck. Von gleichem Erscheinungsjahr (1746) und auf dieselbe Aufgabe gerichtet, findet sich unter den Abhandlungen der Berliner Akademie (Bd. I) auch eine Arbeit Daniel Bernoullis[2]), aus welcher man das Princip, welches in Frage ist, unmittelbar entnehmen kann. Die der alten Tradition der Keime des Princips am meisten entsprechende Form ist von d'Arcy eingehalten worden, der es ausdrücklich als solches in den 1752 erschienenen, aber für 1747 gültigen Memoiren der Pariser Akademie[3]) aufstellte und hiebei die Flächenräume zum Ausgangspunkt machte.

Nach d'Arcy ist die Summe der Producte der Massen mit den zugehörigen Flächenräumen, welche um einen festen Mittelpunkt beschrieben werden, in ihrer Projection auf eine und dieselbe Ebene der Zeit proportional. Dies ist die Fassung, die man auch noch heute wählt, um das Gesetz der Erhaltung der

---

[1]) Euler, Opuscula varii argumenti, (Bd. I) 1746, erste Abhandlung: Solutio problematis mechanici de motu corporum tubis mobilibus inclusorum.

[2]) Nouveau problème de mécanique résolu par D. Bernoulli. (Veranlassung war die ihm von Euler für einen einzigen eingeschlossenen Körper zur Lösung vorgelegte Aufgabe, die zu einer allgemeineren Gegenaufgabe führte, wobei auch Clairaut betheiligt wurde.)

[3]) Problème de dynamique, drei zusammengedruckte Memoire, S. 344—362.

Flächen auszudrücken. Wir haben hier schon die Ausdehnung auf mehrere um ein Centrum rotirende Körper und auf ungleiche Massen.

Bei Euler und Daniel Bernoulli trägt die Wahrheit, um die es sich handelt, ein rein analytisches Gewand. Bei Gelegenheit des Problems der eingeschlossen rotirenden Körper hatte sich überhaupt ergeben, dass bei der Bewegung einer Gruppe von Körpern um einen Mittelpunkt die Summe der Producte von Masse, Rotationsgeschwindigkeit und Abstand constant bleibe, wenn keine äussern Kräfte wirken, indem sie von den innern Kräften unabhängig ist. Unter Rotationsgeschwindigkeit ist hiebei natürlich das Kreiselement verstanden, welches in dem Zeitelement, das man constant nehmen muss, um den Mittelpunkt oder die Axe der Bewegung beschrieben wird. Nimmt man das Zeitelement auch zugleich zur Zeiteinheit, so ist die Circulationsgeschwindigkeit unmittelbar durch das zugehörige Kreiselement ausgedrückt. Das letztere, d. h. der kleine Kreisbogen, multiplicirt mit dem Abstande (von dem Centrum oder von der Axe) ergiebt aber das Doppelte des beschriebenen Sectors oder der Projection desselben. Auf diese Weise verwandelt sich das analytisch charakterisirte Product Eulers in den zum Theil geometrischen Ausdruck von d'Arcy. An die Stelle der beiden Factoren von Geschwindigkeit und Abstand tritt überall der entsprechende Flächeninhalt. Euler hatte sich des in der Mechanik immer geläufiger gewordenen Begriffs der Momente bedient, und sein Satz kann hienach auch kurz dahin formulirt werden, dass die Rotationsmomente der Bewegungsgrössen, abgesehen von äussern Kräften, beständig dieselbe Summe bilden. Die Drehungsgeschwindigkeit ist für einen strengen Punkt vorhanden und es ist daher das Product aus dem Abstand in die Masse und jene Geschwindigkeit oder, mit andern Worten, das Rotationsmoment schon an sich selbst eine Grösse, die von dem Abfluss irgend einer, wenn auch noch so kleinen Zeit, unabhängig gedacht werden muss. Die Flächen werden dagegen gewöhnlich in verschiedenen Grössen, d. h. in ihrer Erzeugung vorgestellt, und selbst das Flächenelement, welches dem Kreiselement entspricht, würde als Ausdruck von differentieller Form nicht streng die abstracte Grösse veranschaulichen, um die es sich handelt. Hieraus erklärt es sich, dass d'Arcy den endlichen Ausdruck dem differentiellen vorziehen musste, und dass überhaupt Alle, welche sich an die

Flächen als ein veranschaulichendes Bild halten, genöthigt sind, die Proportionalität derselben mit der Zeit auszusprechen. Dies ist, analytisch betrachtet, schon eine Integrationsform der Auffassung des Princips. Will man sie vermeiden, so kann man allenfalls sagen, dass die Zunahme der in denselben aufeinanderfolgenden Zeitgrössen beschriebenen Flächenräume Null sei. Auch könnte man sagen, dass der die Flächen erzeugende Factor für jeden Punkt in der fraglichen Summe eine constante Grösse ergebe.

Die gegebenen Beharrungsgeschwindigkeiten sind keine äussern Kräfte, und sie gelten herkömmlich nicht einmal als etwas dem System Aeusserliches. Ihre Unabhängigkeit von dem Spiel der innern Kräfte ist das Wesentliche, und grade darin besteht ihre Erhaltung. In den verschiedenen Fassungen sind es also unter irgend einer analytischen oder geometrischen Form stets die Momente der Bewegungsgrössen in Beziehung auf eine Axe, deren Summe constant bleibt, wenn keine äussern Kräfte vorhanden sind, oder wenn sich, was auf dasselbe hinauskommt, die Momente der äussern Kräfte in Beziehung auf jene Axe zu Null aufheben. Letzteres trifft in einem besondern Fall immer zu, wenn nämlich die äussern Kräfte eine Resultante ergeben, die beständig nach demselben Centrum gerichtet ist. Wie man alsdann die Projectionsebenen durch dieses Centrum auch legen möge, so wird die Summe der projicirten Momente der Bewegungsgrössen in Bezug auf dieses Centrum oder, anders ausgedrückt, die Summe der nach Maassgabe der Massen gerechneten Flächenräume constant bleiben, d. h. mit der Zeit für gleiche Zeitabschnitte keine Vermehrung oder Verminderung erfahren. Die entscheidende Vorbedingung für die Anwendung des Princips der Flächen ist also die Abwesenheit einer verändernden Einwirkung äusserer Kräfte. Die Momente dieser äussern Kräfte müssen in Beziehung auf eine Axe, für welche das Princip zur Anwendung gebracht werden soll, eine Summe gleich Null haben. Diese Kraftmomente sind, nebenbei bemerkt, nicht mit den Momenten der Bewegungsgrössen zu verwechseln. Sie werden durch das Product der Kraft, d. h. also der mit der Masse multiplicirten Beschleunigung in den Abstand von der Axe vorgestellt. Jedoch kann man auch noch das Zeitelement als Factor hinzusetzen, indem hiedurch statt des auf die Einheit bezogenen Kraftausdrucks der augenblickliche, der Dauer des Zeitelements entsprechende Impuls der Kraft eingeführt

wird. Diese Impulse müssen sich natürlich zu Null aufheben, wenn nicht im Verlauf der Zeit Bewegungsgrössen entstehen sollen.

Die eben erwähnten Impulse sind es nun aber auch, mit deren Hülfe man einen sehr bequemen Ausdruck nicht für das Princip der Erhaltung, wohl aber für das erweiterte Princip des Zuwachses der Momente der Bewegungsgrössen in Beziehung auf eine beliebige Axe gewinnen kann. Sind nämlich die Voraussetzungen der Constanz nicht vorhanden, indem äussere Kräfte sich in Bezug auf irgend eine Axe zur Geltung bringen, so werden die Impulse, durch welche diese Kräfte die Grössen der Rotationsmomente, d. h. die Momente der Bewegungsgrössen in Beziehung auf eine Axe verändern, innerhalb eines bestimmten Zeitabschnitts einen bestimmten Zuwachs, d. h. eine Summe von Momenten der Bewegungsgrössen hervorbringen, welche der Wirksamkeit der Kräfte während dieser Zeit entspricht. Die Constanz der Momentsummen erscheint hiemit nur als ein besonderer Fall. Auch wenn die verändernden Kräfte einwirken, kann man den Vorgang so ansehen, als hätte die constante Summe fortwährend zu Grunde gelegen, und es hätte sich mit derselben nur die durch die Wirksamkeit der Kraftantriebe gebildete Summe von Momenten der Bewegungsgrössen additiv oder subtractiv zusammengesetzt. Diese Vorstellungsart entspricht der einfachen und allgemeinen Idee von der Beharrung überhaupt und speciell von der Erhaltung der algebraischen Summe der Bewegungsgrössen. Ja sie entspricht ganz im Allgemeinen der Art, wie man Bewegungsgrössen gleich Kräften zusammensetzt und ein strenges Analogon dieser Zusammensetzung auch für die Axenmomente der Bewegungsgrössen aufstellt.

Um also die weiteste Fassung der hier fraglichen Ideen zu bezeichnen, so denke man sich ein beliebiges, gleichviel ob starres oder veränderliches System und innerhalb oder ausserhalb desselben eine beliebige Linie als Axe, auf welche man die Bewegungen der einzelnen Körper bezieht und, soweit diese Bewegungen als Drehungen um die Axe aufgefasst werden können, als Momente in Anschlag bringt. Man wird nun ganz allgemein behaupten können, dass die Summen der Momente der Bewegungsgrössen in Beziehung auf jene beliebige Axe oder, was dasselbe ist, die Projectionen dieser Momente auf irgend eine zur Axe senkrechte Ebene oder in einer dritten Variation der Auffassung, die mit den Flächen multiplicirten, dem jedesmaligen Zeitelement entsprechenden differentiellen Flächenräume innerhalb eines Zeit-

abschnitts einen Zuwachs erfahren, welcher der Wirksamkeit der verändernden Kräfte während dieser Zeit entspricht. Diese Wirksamkeit besteht in der Veränderung der Bewegungsgrössen und der davon abhängigen Momente. Die Gesammtveränderung wird durch das Integral repräsentirt, welches die Summation der Elementarimpulse der Kräfte für die fragliche Combination von Axenmomenten der bewegenden Kräfte vollzieht. Will man jedoch die für eine Gleichung nothwendige Doppelheit des Gesichtspunkts weglassen, so kann man sich auch unmittelbar vorstellen, wie die für einen Zeitpunkt gegebene Summe der Axenmomente der Bewegungsgrössen grade so vermehrt wird, als wenn die äussern Kräfte die durch sie hervorgebrachten Momentquantitäten algebraisch hinzugefügt hätten. Hiedurch wird die Analogie mit dem für die translatorischen Bewegungsgrössen gültigen Princip ganz unverkennbar.

120. Die Behandlung des Princips der Flächen bei Lagrange[1]) bietet nichts Eigenthümliches dar. Die Zurückführung des Satzes auf die allgemeine Grundformel der Mechanik findet hier wie bei den andern Principien statt, und es ist kaum nöthig, noch einmal zu bemerken, dass der Verfasser der Analytischen Mechanik mit einem gewissen Recht überall nur einfache Resultate des Calcüls und der ersten elementaren Principien sieht, wo Andere vor ihm ganz specielle Naturverhältnisse, ja bisweilen wirkliche Naturzwecke entdeckt zu haben glaubten, oder wenigstens die betreffenden Einsichten als merkwürdige Enthüllungen besonderer Eigenschaften der Naturverfassung oder des Naturverfahrens ansahen. Er hebt das Princip der Flächen in demjenigen Grade von Allgemeinheit hervor, in welchem es ausgesprochen werden kann, wenn keine äussern Kräfte vorhanden sind, oder wenn sich die äussern Kräfte in Beziehung auf die Rotation neutralisiren.

Bei der grossen Wichtigkeit, welche die spätere Poinsotsche Umwandlung der Drehungsmomente in Kräftepaare für die Veranschaulichung unseres Princips und für die Vereinfachung seiner Ableitung gehabt hat, soll hier die Thatsache nicht übergangen werden, dass sich schon in der angeführten Abhandlung von Euler[2]) eine Spur findet, die man sehr wohl als eine Annäherung

---

[1]) Méc. anal. Bd. I (1811), Dynamik Sect. III, § 2, besonders Art. 9. Vgl. auch Théorie des fonctions, Theil III, Cap. 6, besonders Art. 37.

[2]) Opuscula (1746) Abhandlung I de motu corporum tubis mobilibus inclusorum, § 83 (S. 113).

an den Begriff der Kräftepaare gelten lassen kann, ohne hiemit irgend etwas mehr beweisen zu wollen, als dass die Natur der Sache die Gedanken schon früh ein wenig in diejenige Richtung gelenkt hat, auf welcher Poinsot zu einer so interessanten Vereinfachung und Berichtigung der mechanischen Raisonnements gelangt ist. Euler spricht es dort ganz entschieden aus, dass ein reales Drehungsmoment nicht von einer einzigen, sondern nur von zwei Kräften herrührend gedacht werden könne, die einander gleich, entgegengesetzt und parallel seien. „Eine einzige Kraft," sagt er wörtlich, „kann nicht zugleich verschwinden und ein reales Moment haben, wenn nicht etwa eine unendlich kleine Kraft, die in einer unendlichen Entfernung am Hebel wirkt, hieher gerechnet werden soll." Was verschwinden soll, ist die translatorische Wirkung, und Euler zeigt, dass die beiden gleichen, entgegengesetzten und parallelen Kräfte, wenn sie an denselben Angriffspunkt sich selbst parallel verlegt werden, keine progressive Bewegung hervorbringen, so dass sich ihre Wirkung auf das Drehungsmoment beschränkt. Er war also ziemlich nahe daran, die Drehungsmomente als selbständige dualistische Kräftecombinationen hinzustellen, und nur der Umstand, dass er immer eine feste Axe als gegeben hiebei vor Augen hatte, hinderte ihn, dem Begriff der Kräftepaare, der von jeder Axe unabhängig gedacht werden muss, noch näher zu kommen.

Setzt man den Begriff der Kräftepaare voraus, indem man anstatt der Drehungsmomente von vornherein ohne Rücksicht auf die noch erst zu findende Axe die gepaarten Kräfte nach denselben Gesetzen wie die einfachen Kräfte, also nach der Regel des Parallelogramms, combinirt und das schliesslich resultirende Kräftepaar ermittelt, so wird das Princip der Flächen einen entsprechenden Ausdruck annehmen, der in einer gewissen Beziehung noch vollständiger ist. Das Maass des Kräftepaars ist hier bekanntlich das Product aus dem Abstande der beiden Kräfte in ihre gemeinschaftliche Grösse. Die Gepaartheit bezieht sich natürlich nicht blos auf eigentliche Kräfte, sondern auch auf Beharrungsgrössen. Nun wird man, wenn sich kein Paar äusserer eigentlicher Kräfte bei der Zusammensetzung ergiebt, eben nur ein Paar von Beharrungen, d. h. mit andern Worten ein Bewegungsgrössenpaar erhalten, und dies muss offenbar constant bleiben, da der Voraussetzung nach die äussern Kräfte nichts ändern, und da die innern Kräfte ebenfalls keinen Einfluss in der einen Richtung

üben können, ohne zugleich in der entgegengesetzten Richtung den Abzug an Bewegungsgrösse wieder durch einen Zusatz so auszugleichen, dass die algebraische Summe dieselbe bleibt. Das Princip der Gleichheit von Action und Reaction muss nämlich ebenso bei den Kräftepaaren wie bei den einfachen Kräften statthaben. Die grössere Bestimmtheit des Flächenprincips, welches sich sofort aus der Zusammensetzung der Paare ergiebt, besteht darin, dass nicht blos eine constante Grösse für die Summe der Flächen, Momente oder Paare, sondern auch die Unveränderlichkeit der Richtung der Ebene erkennbar gemacht wird, für welche diese Summe als Resultat der gewöhnlichen Zusammensetzung hervorgeht. Zwar muss die Projection auf alle möglichen Ebenen die Constanz jener Summe ergeben; allein die von selbst resultirende Ebene ist diejenige, zu welcher die wirkliche Rotationsaxe senkrecht stehen muss, und das Beharren dieser wesentlichen Richtung gehört eigentlich noch zu dem Princip der Flächen. Das letztere ist, wie wir nach allem Bisherigen nun wohl in der einfachsten Form sagen können, wesentlich eine der zusammengesetzten Gestalten, welche das gewöhnliche Beharrungs- oder Trägheitsprincip in der Anwendung auf ganze Systeme annimmt. Zur vollständigen Bestimmung der Beharrung gehört aber nicht blos die Angabe der Bewegungsgrösse, sondern auch diejenige der Bewegungsrichtung. Später werden wir sehen, dass jene constante Ebene, in welcher man sich die resultirende gepaarte Bewegungsgrösse der Richtung nach denken muss, auch aus sehr einfachen Gründen diejenige Ebene ist, in welcher die Flächenräume ein Maximum, d. h. grösser sind, als sie sich in der Projection auf alle andern Ebenen ergeben.

121. Das unbestimmteste von allen Principien, durch welche sich die Wirksamkeit der Kräfte an einem beliebigen System charakterisirt, ist dasjenige der geringsten Action. Wir haben es in einer ganz deutlichen Grundlage schon Nr. 47 als das Princip Fermats zur Ableitung des optischen Brechungsgesetzes besprochen und dort auch gesehen, dass sein Urheber im Allgemeinen die Natur als eine „grosse Arbeiterin“ betrachtete, die in der Vollziehung ihrer Aufgaben immer den kürzesten Weg einschlage, d. h. mit dem geringstmöglichen Kraftaufwand auskomme. Diese Idee, dass die Natur im Sinne des geringsten Widerstandes, also in solcher Art verfahre, dass jede mögliche Abänderung ihres Verhaltens die Ueberwindung eines grösseren Widerstandes und

mithin die Entwicklung einer grösseren Actionsmenge mit sich gebracht haben würde, — diese wenigstens formal an die Gestalt gewisser antiker Naturphilosopheme erinnernde Idee ist gegen die Mitte des 18. Jahrhunderts von Maupertuis zum Ausgangspunkt genommen worden, um innerhalb des Gebiets der eigentlichen Mechanik ein neues Gesetz oder Princip aufzustellen. Zunächst hatte aber Maupertuis ebenfalls die optische Anwendung auf Reflexion und Brechung ausgeführt, und die geschichtliche Anlehnung an Fermats Vorgang, die hierin liegt, erklärt auch einigermaassen den Umstand, dass die abstract mechanische Fassung des Princips, an die Fermat noch nicht hatte denken können, nicht allzu bestimmt ausgefallen ist.

Fermats kürzester Weg, den die Natur in der Brechung der Strahlen gehe, bedeutete, wie die betreffende Gleichung zeigt, einfach und klar nichts Anderes als kürzeste Zeit. Bestimmt man mit ihm die Lichtgeschwindigkeiten in den Medien derartig, dass die zwischen zwei Punkten verbrauchte Gesammtzeit geringer wird, als wenn zwischen diesen zwei Punkten ein anderer Weg genommen würde, so ergeben sich aus der Rechnung die erfahrungsgemässen Geschwindigkeitsverhältnisse, nämlich die umgekehrten Verhältnisse der wirklichen Brechungsexponenten. Auf diese Weise hat Fermat jedenfalls eine richtige Eigenschaft, nämlich das Vorhandensein eines Minimum der Zeit, sichtbar gemacht, wenn auch sein Zweckgesichtspunkt als unzutreffend zu verwerfen ist.

Grade an dieses Unzutreffende hielt sich nun aber Maupertuis, legte überdies, wie in seiner Pariser Abhandlung zu lesen, die erfahrungswidrige Idee von Lichtgeschwindigkeiten zu Grunde, die sich nach Descartes direct wie die Brechungsexponenten verhalten und in dichtern Medien grösser sein sollten, und verdarb auf diese Weise den bessern Fermatschen Vorgang in das confus Philosophastrische.

Maupertuis mit seiner Vorliebe für nebelhafte metaphysische, ja theologische Gesichtspunkte brachte es überhaupt nur zu mehr oder minder vagen Vorstellungen, deren Sinn sich nur in den einzelnen Anwendungen exacter begrenzen liess. Er wollte nach seinem Princip auch ein „Gesetz der Ruhe“ für das Gleichgewicht aufstellen. Seine Anwendungen auf den Stoss und auf das Gleichgewicht am Hebel zeigen erst genauer, was er meinte. Wie wenig jedoch seine Formulirungen zur strengen Abgrenzung eines

unstreitigen Princips bisher geführt haben, beweist eine Bemerkung Jacobis[1]), wonach die gewöhnliche Darstellung des Princips und zwar auch diejenige bei Lagrange nicht zu verstehen sein soll. Obwohl Jacobi das Princip der geringsten Wirkung für ungebührlich vernachlässigt erklärt[2]) und es im Sinne des geringsten Kraftaufwandes aufgefasst wissen will[3]), sich also der naturphilosophischen Idee, die von Lagrange ganz bei Seite gesetzt worden war, wieder zuwendet, so ist doch unverkennbar, dass nur das Schwankende der Maupertuisschen Ideen, welches schon von Lagrange[4]) gerügt wurde, die späteren Divergenzen, ja die gänzliche Hintansetzung oder Uebergehung des Princips in ganz neuen und übrigens nicht schlechten Darstellungen und Lehrbüchern[5]) verursacht hat.

Die Arbeiten Maupertuis', eine Abhandlung für die französische Akademie (1744) und eine in den Veröffentlichungen der Berliner Akademie für 1746 lassen sich, wenn man von den überflüssigen teleologischen Gesichtspunkten möglichst absieht und nur die Hauptidee mit den Hauptanwendungen rein mechanischer Natur ins Auge fasst, ziemlich kurz erläutern. Das allgemeine Princip wird von Maupertuis dahin formulirt: „Wenn in der Natur eine Veränderung vorgeht, so ist die für diese Veränderung nothwendige Thätigkeitsmenge die kleinstmögliche." (La quantité d'action . . . est la plus petite qu'il soit possible)[6]). Es wird sogleich hinzugesetzt, dass die Menge der Action als Product von drei Factoren, nämlich der Masse, der Geschwindigkeit und des mit dieser Geschwindigkeit durchlaufenen Raumes zu denken sei. Diese sogenannte Actionsmenge, die also aus Producten von der Form mvs besteht, in denen m die Masse, v die Geschwindigkeit und s den durchlaufenen Raum bedeutet, soll nun, insofern sie für die Veränderung des Bewegungszustandes erforderlich ist, ein Minimum, d. h. kleiner sein, als alle andern sogenannten Actionsmengen, die unter Voraussetzung anderer Relationen in Beziehung auf dieselbe Veränderung entstehen würden.

Je schärfer man dieses vermeinte oberste Naturgesetz

---

1) Vorlesungen über Dynamik, Berlin 1866, S. 45.

2) Ibid. S. 2. 3) Ibid. S. 45.

4) Méc. anal. Bd. I (1811) Dynamik Sect. I, Art. 17.

5) Delaunay, Traité de mécanique rationelle, 5. Aufl. Paris 1873.

6) Histoire de l'académie de Berlin, für 1746, S. 290, in der Abhandlung: Les lois du mouvement et du repos déduites d'un principe métaphysique.

betrachtet, um so unklarer erscheint seine Formulirung bei Maupertuis. Man muss genau darauf achten, was er unter der Veränderung versteht, die in der Natur vor sich gehen und der jenes Minimum entsprechen soll. Diese Veränderung ist ihm die Differenz zwischen zwei sogenannten Actionsmengen, deren eine dem Zustand vor dem Ereigniss, die andere demjenigen nach dem Ereigniss entspricht, sei nun das letztere ein wirklicher oder nur ein zur Aushülfe als Möglichkeit vorgestellter Vorgang. Bei dem Stoss besteht hienach, wie der Autor ausführt[1]), die Veränderung darin, dass an die Stelle der ursprünglichen Geschwindigkeiten, nach dem Stoss andere Geschwindigkeiten und Räume treten. Die Producte von der Form mvs ändern sich also, jedoch so, dass die Geschwindigkeit der einzige Factor ist, der sich unabhängig verändert, während der auf dieselbe Zeit bezogene Raum eigentlich nur ein wiederholter Ausdruck der Geschwindigkeit ist und es sogar ganz genau wird, wenn man für ihn die Zeiteinheit zu Grunde legt. Hienach besteht die Veränderung offenbar in dem, was man heute die verlornen und gewonnenen Geschwindigkeiten nennt. Es sind dies diejenigen Geschwindigkeiten, die sich ergeben, wenn man unter Berücksichtigung der Vorzeichen die Differenzen für jeden Körper sowohl bei dem elastischen als bei dem unelastischen Stoss sucht. Die Quadrate dieser Differenzen multiplicirt mit den zugehörigen Massen ergeben nun die Summe, die als Minimum betrachtet, und deren Differential demgemäss gleich Null gesetzt wird. Die Differenzirung oder, wie wir heute sagen müssten, die Variirung findet in Rücksicht auf die als unbekannt gesetzten neuen Geschwindigkeiten statt, die sich jedoch auch bei dem elastischen Stoss auf eine einzige Unbekannte reduciren, indem die relative Geschwindigkeit nach dem Gesetz der Erhaltung derselben als constant, d. h. gleich derjenigen vor dem Stoss, vorausgesetzt wird. So gewinnt Maupertuis durch die neue Differentialgleichung den Werth der neuen Geschwindigkeiten. Am einfachsten stellt sich die Sache bei dem unelastischen Stoss, wo nur eine einzige neue Geschwindigkeit, nämlich die gemeinschaftliche beider Körper in Frage kommt. Hier zeigt sich auch am allerdeutlichsten, dass Maupertuis thatsächlich nichts weiter gethan hat, als die Function, welche die Summe der verlornen lebendigen Kräfte ausdrückt, nach seiner Art als ein Mini-

[1]) Ibid. S. 290 fg.

mum zu behandeln, und deren nach der unbekannten gemeinschaftlichen Geschwindigkeit genommenes Differential gleich Null zu setzen. Bei jeder andern resultirenden Geschwindigkeit würde die Function, welche nach unserer Redeweise den Verlust an lebendiger Kraft, nach der Auffassung von Maupertuis aber die zur Veränderung der Actionsgrössen erforderlich gewesene Actionsmenge ausdrückt, grösser ausfallen, oder vielmehr, um genauer zu reden, nicht mehr die Eigenschaft haben, dass der differentielle Ausdruck, den man von ihr ableitet, gleich Null wird. Maupertuis betrachtet seine Idee als ein Naturprincip, welches die entsprechende Intelligenz der Naturleitung beweise, und welches mechanisch noch den Vortheil habe, dem Princip der Erhaltung der lebendigen Kräfte überlegen zu sein, indem es ganz allgemein, wie z. B. für den unelastischen Stoss, ja sogar nicht blos für die Bewegung sondern auch für das Gleichgewicht gelte.

122. Ehe wir zur Kritik der eben erwähnten Ansprüche übergehen, müssen wir noch die Anwendung auf den Fall des Gleichgewichts durchgehen. Wie Maupertuis sich für die Dynamik auf den Stoss beschränkt und nichts weiter als die Ausführung dieses Beispiels liefert, um seine metaphysischen, meist nicht einmal mechanischen Betrachtungen zu ergänzen, so glaubte er auch genug zu thun, wenn er den Fall des Hebels als Bürgschaft für die Gültigkeit seines Princips in der gesammten Statik erörtert. Der Unterstützungspunkt und mithin die Länge des einen Hebelarms wird als unbekannt und in Rücksicht auf das Minimum veränderlich angenommen. Für den Gleichgewichtszustand selbst sind Geschwindigkeit und durchlaufener Raum streng Null. Eine sogenannte Actionsmenge kann daher nur unter Voraussetzung einer kleinen Veränderung gedacht werden. Alsdann repräsentiren die gleichzeitig durchlaufenen Kreisbögen zugleich Geschwindigkeiten und Räume. Die Massen mit beiden, d. h. wiederum mit den Quadraten der proportionalen Geschwindigkeiten oder, was die Proportionalität nicht ändert, mit den Quadraten der Hebelarme multiplicirt, ergeben nun eine Summe, die nach der Maupertuisschen Auffassung ein Minimum sein muss. Sie wird in Rücksicht auf die Länge des einen Hebelarms, also mittelbar in Beziehung auf die relative Geschwindigkeit differenzirt und das Differential gleich Null gesetzt. Mit dieser Differentialgleichung ist dann das bekannte Hebelgesetz gegeben, indem ihre Auf-

lösung zeigt, dass die Gewichte den Längen der Hebelarme umgekehrt proportional sein müssen.

Man wird unter allen Umständen eingestehen müssen, dass es nicht ganz klar wird, wie im Fall des Gleichgewichts die zu einer Veränderung erforderliche Actionsmenge consequent und ganz analog wie im Fall des Stosses als Differenz von zwei Bewegungszuständen gedacht werden soll. Man kann zwar, wie geschehen ist, die Ruhe mit der kleinen Bewegung vergleichen und, da im ursprünglichen Zustand die Actionsgrösse streng Null ist, den zunächst darauf folgenden Zustand in allen seinen Grössen als die Veränderung ansehen, welcher eine minimale Actionsmenge entsprechen müsse. Nimmt man dann die Veränderung selbst infinitesimal, so wird man mit Hülfe des Stetigkeitsgesetzes die Relationen auf den Grenzzustand des absoluten Gleichgewichts übertragen können. Hiebei wird es sogar recht deutlich, dass man, nach unserer heutigen Auffassungsart zu reden, die differentiellen Räume selbst zu variiren hat, um diejenigen Verhältnisse derselben zu ermitteln, die dem Minimum entsprechen. Indessen fehlt bei alledem doch noch Einiges daran, dass man klar einsehe, wie ganz im Allgemeinen eine geringfügige Aenderung in den Positionen eines beliebigen Systems zu behandeln sei. Das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten erscheint hier weit unmittelbarer und klarer auszuhelfen, und übrigens müsste die Gleichung, die sich auf eine mögliche, d. h. virtuelle Actionsmenge bezöge, auch sofort in eine Gleichung der virtuellen Geschwindigkeiten verwandelt werden können. Obwohl sich nun in dieser Beziehung die erforderlichen Aufschlüsse ziemlich leicht ergeben, so ist doch mit dem Beispiel von Maupertuis und mit dessen Vorstellungsart die Sache keineswegs hinreichend aufgeklärt. Sein „Gesetz der Ruhe“ soll darin bestehen, dass die Bedingungen des Gleichgewichts erfüllt sind, wenn die zur Störung desselben erforderliche Actionsmenge in der unmittelbaren Nachbarschaft des genauen Gleichgewichtszustandes ein Minimum ist. Die Wendung beruht also wesentlich darauf, nach dem Gesetz der Stetigkeit den unbeschränkt anzunähernden Bewegungszustand anstatt des strengen Gleichgewichts zu untersuchen, und das dynamische Princip auf diese Weise ebenso zur Geltung zu bringen, als wenn es sich unmittelbar um einen Bewegungsvorgang handelte.

123. In demselben Jahre 1744, aber etwas später als das Pariser Memoire von Maupertuis, veröffentlichte Euler als einen

Zusatz, mit welchem er seine Schrift über die Methode der Auffindung von Curven mit maximalen und minimalen Eigenschaften abschloss, eine Abhandlung darüber, wie sich die Bewegung geworfener Körper nach der Methode der Maxima und Minima bestimmen lasse. Er behandelte hiebei nicht etwa blos die parabolische Wurfbewegung, sondern überhaupt die Bewegungen unter dem Einfluss von Centralkräften, die nach Functionen der Distanzen wirksam sind. Maupertuis berief sich im Eingange der vorher von uns in Bezug genommenen Berliner Abhandlung darauf, dass sich auch Euler mit dem Princip eingelassen habe. In der That ging der deutsche Analytiker von metaphysischen Gesichtspunkten aus; aber man darf nicht vergessen, dass er das Princip der geringsten Action an das Ende einer Schrift stellte, welche die Grundlagen der später von Lagrange erweiterten und systematisirten Variationsrechnung enthielt. Die Methode der Maxima und Minima, in einem sehr engen Sinne gefasst, hatte schon bei Fermat einen Keim zur Differentialrechnung vorgestellt; im weitesten Sinne erfasst, musste sie zur Methode der Variationen werden und so gleichsam eine neue Gattung oder wenigstesn einen neuen Gesichtspunkt des Differenzirens ergeben. War man nun einmal, wie Euler mit der erwähnten Schrift, dahin gelangt, überall in der Betrachtung der Curven die Grössenbeziehungen im Hinblick auf gewisse Maxima und Minima zu variiren, so lag es nahe, auch die natürlichen, durch mechanische Kräfte erzeugten Curven nach dieser Seite hin zu erörtern, und zuzusehen, ob nicht in den Functionen, von denen diese Curven abhängen, in irgend einer mechanischen Beziehung etwas Maximales oder Minimales anzutreffen sei.

Wirklich ist auch Euler um die metaphysische Seite seiner Ausgangspunkte und Ergebnisse nicht sonderlich besorgt. Er gesteht sogar, dass ihn seine Vorstellungsart selbst nicht hinreichend befriedige, und dass er dieselbe nicht zu verallgemeinern, ja deren Tragweite nicht abzugrenzen vermöge. Er hält sich an seine besondern Fälle, und man sieht deutlich, dass ihm nur das als verbürgt gilt, was er in der Bestimmtheit der analytischen Formeln unmittelbar vor sich hat. Was er auf diese Weise ausdrückt, ist weit exacter gerathen, als was Maupertuis selbst nach diesem Vorgang entwickelte. Auch Lagrange[1]) hat dies anerkannt,

[1]) Méc. anal. Bd. I (1811) Dynamik Sect. I, Art. 17.

indem er die Eulersche Fassung des Princips als die deutlichere rühmte, ja sogar als eine ganz verschiedenartige Idee von den Ansichten Maupertuis' trennte und seine eignen Verallgemeinerungen in dieser Richtung bewegte.

Nach Euler[1]) ist ein ähnliches Product wie bei Maupertuis, aber in differentieller Form ins Auge zu fassen. Masse, Geschwindigkeit und Curvenelement (also nach unserer Bezeichnung $mv\,ds$) bilden das Product, dessen Integral zwischen zwei Punkten (oder den entsprechenden Zeitgrenzen) die Eigenschaft haben muss, dass seine Variation gleich Null gesetzt werden kann. Euler drückt sich beständig so aus, dass er sagt, dieses Integral müsse ein Minimum sein. Lagrange schiebt an der angeführten Stelle seine eigne Alternative zwischen Maximum und Minimum unter, womit er zwar Euler verbessert, aber von dessen Auffassungsart keine genaue Vorstellung giebt. Euler hielt sich ausschliesslich an das Minimum, wie es auch seinem Begriff von einer geringsten Action entsprach. Lagrange, der nicht die logischen Begriffe, sondern den Calcül als das Principale ansah, bekümmerte sich demgemäss nur um das, was der Möglichkeit entsprach, die Variation gleich Null zu setzen. Diese Möglichkeit ist aber ebensowohl das Kennzeichen eines Maximums als das eines Minimums. Fasst man aber das Princip in dieser analytischen Allgemeinheit, so wird es vollständig um seine metaphysische Grundlage gebracht und seinem so zu sagen logischen Ausgangspunkt entfremdet; denn was kann dem Gedanken der geringsten Actionsmenge wohl mehr widersprechen, als die Möglichkeit eines Maximums derselben!

Euler war von der Bewegungsquantität ausgegangen und bezeichnete das erwähnte Product, in welchem die Bewegungsgrösse mit dem Curvenelement multiplicirt ist, als die Collectivbewegung (motum collectivum)[2]) für dieses Raumtheilchen. Nun soll zwischen zwei beliebigen Punkten das Integral dieser elementaren Collectivbewegung ein Minimum sein, so dass keine andere Curve, die zwischen den zwei Punkten beschrieben würde, diese Eigenschaft haben könnte und den Bedingungen der sie bestimmenden Kräfte zu genügen vermöchte.

Um aber auch dem Gesichtspunkt zu entsprechen, aus welchem

---

[1]) Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, 1744, Additamentum II: De motu projectorum in medio non resistente per methodum maximorum ac minimorum determinando.

[2]) Ibid. Art. 2, S. 309.

die lebendigen Kräfte diese Art Action repräsentiren, verwandelt Euler die Form seines Products, indem er an die Stelle des Curvenelements, welches ja durch das Zeitelement dividirt die Geschwindigkeit bedeutet, diese Geschwindigkeit multiplicirt mit dem Zeitelement setzt. Indem er also nach unserer Bezeichnungsweise für ds den Ausdruck $v\,dt$ in $mv\,ds$ substituirt, erhält er mv^2dt, d. h. das, was er die augenblickliche lebendige Kraft nennt. Die Summe oder vielmehr das Integral dieser augenblicklichen lebendigen Kräfte zwischen zwei beliebigen Zeitgrenzen muss nun das Minimum sein, oder genauer geredet, die Variation desselben muss gleich Null gesetzt werden können. Diese Wendung näherte das Princip scheinbar den Operationen, die sich an die Summirung der lebendigen Kräfte anschliessen.

Indem Euler das Princip nur für einen einzelnen Körper entwickelt, bleibt die Masse ganz gleichgültig, und man sieht ohne Weiteres, dass man das Integral unmittelbar auf das Product von Geschwindigkeit und Raumelement oder auf dasjenige von Geschwindigkeitsquadrat und Zeitelement beziehen könne. Euler deutet an, dass für mehrere Körper die Summe der schon mehrmals bezeichneten Producte in der einen oder der andern Gestalt zu nehmen und das Integral auf diese Summe oder die Summanden zu beziehen sein würde. Er ist aber der Ansicht, dass sich die Bestimmung der Bahncurven mit weit weniger Calcül aus den gewöhnlichen mechanischen Principien gewinnen lasse, und verzichtet deshalb auf ein weiteres Eingehen. Ueberdies ist er über die Tragweite des Princips eingestandenermaassen nicht ganz sicher. Nimmt man das thatsächlich Erläuterte zusammen, so beschränkt es sich auf die Bewegung eines als Punkt betrachteten Körpers, der von einer Beharrungsgeschwindigkeit afficirt im leeren Raume noch Centralkräften, wie in der Planetenbewegung, unterworfen ist. Euler beginnt mit dem einfachsten Fall, dass gar keine Kräfte wirken und fasst die alsdann allein vorhandene Beharrungsgeschwindigkeit nach seinem Princip auf. Da die letztere constant ist, so muss das Integral des Raumelements für sich selbst ein Minimum sein und ergiebt die grade Linie. Das nächste Beispiel ist bei Euler die gewöhnliche Wurfbewegung an der Oberfläche der Erde, jedoch ohne Rücksicht auf ein widerstehendes Medium, und es wird hier natürlich die Parabel als die Curve des fraglichen Minimum gewonnen. Von diesem Beispiel oder vielmehr von dieser Stufe der dynamischen Grundeinsichten geht er zur

Berücksichtigung der Distanzen und zur freien Centralbewegung über. Ausdrücklich giebt er den Widerstand eines Mediums als einen Fall an, der sich nicht unter das Princip bringen lasse, was allerdings für ein allgemeines Naturprincip bedenklich ist. Schliesslich stellt er es den Metaphysikern anheim, die allgemeine Vorstellungsart, mit der er noch nicht zufrieden sei, weiter aufzuklären. Auch sind in der That seine eignen Gründe bisweilen wenig gelungen. So z. B. meint er noch gegen Ende seines Aufsatzes, dass man für ein System das Verhältniss sich metaphysisch so vorstellen könne, als wenn die Trägheit aller Körper sich durch die einwirkenden Kräfte nur in der geringstmöglichen Weise stören lasse, so dass also die Action der Kräfte hiedurch auf ein Minimum reducirt würde. Dieser Gesichtspunkt erscheint nun sowenig zutreffend, dass man ebensogut sofort das Gegentheil aufstellen kann, indem die Kräfte diejenigen Bewegungen hervorbringen, in denen ihre Wirkung unter allen möglichen Combinationen ein Maximum ist. Doch wollen wir uns hier noch nicht auf diese Gegensätze einlassen, sondern erst die Geschichte des Princips weiter verfolgen.

124. Lagrange knüpfte an die Eulerschen Aufstellungen an, soweit dieselben rein analytisch waren, verwarf jedoch ausdrücklich jede metaphysische, mit Gesichtspunkten des Zweckes oder der Intelligenz zusammenhängende Idee. Ja er liess sogar die ganze von dem Minimum ausgehende Grundlegung dadurch zu einem unerheblichen Umstande werden, dass er regelmässig in allen Behauptungen an Stelle des Minimums die doppelte Möglichkeit von Maximum oder Minimum einführte. In dieser Weise dehnte er die Eulersche Formel in beiderlei Gestalt von dem einzelnen Körper auf ein System verschiedener Massen aus und formulirte demgemäss das Princip, jedoch mit derjenigen Einschränkung, welche die Benutzung der Gleichung der lebendigen Kräfte mit den ihr bei Lagrange anhaftenden Voraussetzungen ergeben musste. Setzt man also gegenseitige Attractionskräfte oder überhaupt Centralkräfte voraus, die nach Functionen der Distanzen wirken, so soll unter dieser Voraussetzung die Variation der Summe der Producte der Massen in die Integrale der mit den Geschwindigkeiten multiplicirten Curvenelemente Null, d. h. also die Summe selbst ein Maximum oder Minimum sein, wofern man zwei Punkte, zwischen denen das Integral zu nehmen ist, als gegeben voraussetzt. Diese Art der Fassung des Princips, die sich bei Lagrange

in der Formel wie in umständlichen Worten[1]) dargelegt und aus der allgemeinen dynamischen Grundgleichung entwickelt findet, wird auch ebenso wiederum benutzt, um in Combination mit der Gleichung der lebendigen Kräfte alle Fundamentalbedingungen der Bewegung und des Gleichgewichts zu gewinnen. Es ist dies die Umkehrung des bei dem Beweise eingeschlagenen Weges; während zuerst die allgemeine dynamische Grundgleichung, welche von Lagrange zum Inbegriff aller mechanischen Einsichten gemacht wird, den Stützpunkt bildete, wird sie nun zum Resultat, was uns nicht wundern darf. Die integrirte Form muss nämlich die differentielle liefern, und die auf das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten gegründete dynamische Grundgleichung hat ja die differentielle Form und giebt unmittelbar die Beziehungen der Bewegung oder des Gleichgewichts nur für den Augenblick an. Früher hatte sich Lagrange, wie er selbst bemerkt, vermittelst der Combination des von ihm erweiterten Princips der geringsten Wirkung mit der Gleichung der lebendigen Kräfte eine allgemeine Methode geschaffen, alle mechanischen Probleme zu behandeln. Später aber und bereits in der 1. Ausgabe der Analytischen Mechanik stützte er sich consequent nur auf die allgemeine dynamische Grundgleichung und sah sein nur noch uneigentlich sogenanntes Princip der geringsten Wirkung, welches man besser als ein Princip des Maximum oder Minimum bezeichnen müsste, kurzweg als ein Resultat des Calcüls an, welches sich, wie die übrigen Haupteigenschaften der Bewegung, aus jener Grundgleichung ergebe.

Da er, ganz wie Euler, auch den durch die zweite Umformung gegebenen Gesichtspunkt nicht für unwichtig hält, so knüpft er daran schliesslich noch die besondere Bemerkung[2]), man könne mit dem besten Recht das Princip als dasjenige „der grössten oder kleinsten lebendigen Kraft“ bezeichnen. Es sind nämlich die Summen der einem Augenblick entsprechenden lebendigen Kräfte des Systems innerhalb der gegebenen Grenzen ein Maximum oder Minimum. In dieser Ausdrucksweise gilt ihm das Princip auch als unmittelbar fähig, auf den Fall des Gleichgewichts übertragen zu werden; denn er hatte schon aus der statischen Grundformel besonders bewiesen[3]), dass unter allen Lagen eines bewegten

---

[1]) Méc. anal. Bd. I (1811) Dynamik Sect. III, Art. 39.
[2]) Ibid. Art. 42. [3]) Ibid. Statik Sect. III, Art. 22.

Systems die der grössten oder kleinsten lebendigen Kraft auch diejenige sei, in welche man es von vornherein würde bringen müssen, damit es sich im Zustande des Gleichgewichts befände. Letztere Wahrheit war mithin das, worauf Maupertuis mit seinem „Gesetz der Ruhe“ gezielt hatte.

Aus dem Angegebenen sieht man genugsam, dass bei Lagrange das Princip der geringsten Wirkung aufgehört hat, noch eine sichtbare logische Bedeutung zu haben, deren Merkmal mehr als die analytische Eigenschaft wäre, die sich in der Möglichkeit ausdrückt, die Variation gleich Null zu setzen oder die Alternative zwischen Maximum und Minimum voraussetzen zu dürfen. Wer zuerst nach den Gleichungen und deren Eigenschaften fragt und in den analytischen Ausdrücken auch ohne weitere logische Auslegung die zutreffendste, in jeder Beziehung genügende Gestalt der Wahrheiten sieht, wird bei einer solchen Abfindung mit dem Princip sehr wohl stehen bleiben können. Ganz anders aber stellt sich die Aufgabe, sobald man für die analytisch noch so bestimmten Ausdrücke auch entsprechende Begriffe verlangt. Für die einzelnen Theile der Ausdrücke hat man sie immer; aber in unserm Fall ist z. B. das mehrmals charakterisirte Product aus Masse, Geschwindigkeit und Raumelement oder dessen zweite Form, nämlich das Product aus der lebendigen Kraft in das Zeitelement, begrifflich zu interpretiren. Wenn man die Summen und die Integrale nimmt, so bleiben die Massen constant, und man kann daher alle Summirungs- und Veränderungszeichen, die sich unmittelbar auf die Producte beziehen, in unserm Fall also das Integral entweder vor oder hinter die Massen setzen. Analytisch ist Derartiges nun ganz gleichgültig; denn die Quantität und die Operationen bleiben dieselben; aber logisch ist ein erheblicher Unterschied vorhanden, da es darauf ankommt, grade das analytisch beisammen zu halten und mit einander zu verbinden, was irgend einem natürlichen Begriff, wie z. B. demjenigen einer Art Action entsprechen könnte. Ausserdem stellt sich noch die ganz natürliche Forderung, den analytischen Umstand, dass die Variation gleich Null ist, entweder in näherer Bestimmung durch weitere analytische Merkmale oder aber in seiner völligen Allgemeinheit mit einem logischen Begriff von den entsprechenden realen Verhältnissen exact zu decken. Bei Euler half die gewöhnliche Vorstellung von einem Minimum aus; aber diese Vorstellungsart war

an sich nur unzureichend begründet und wurde durch die Bedenken Lagranges in ihrer alten Gestalt vollends unhaltbar.

125. Um zu zeigen, wie schwankend die Vorstellungen von einem Princip der geringsten Action jederzeit blieben, und wie man bisweilen nach genaueren leitenden Begriffen suchte, sei die Carnotsche Idee angeführt, welche im Hinblick auf das Beispiel des Stosses die sogenannten verlornen Kräfte als den eigentlichen Gegenstand des Princips der geringsten Action ansieht. Nach dem Stoss, sagt Carnot[1]), ist für unelastische Körper die wirklich statthabende Bewegung diejenige, bei welcher die Summe der Producte der Massen mit den Quadraten der verlornen Geschwindigkeiten ein Minimum ist. Bei jeder andern Bewegung, die man etwa voraussetzen wollte, würde diese Eigenschaft nicht mehr statthaben. Nach Carnot ist also der Verlust an lebendiger Kraft bei dem Stosse unelastischer Körper ein Minimum, und grade hierin soll das Princip der geringsten Wirkung bestehen.

Erinnern wir uns dessen, was wir über die Vorstellungen Maupertuis' beigebracht haben, so ist klar, dass schon in ihnen thatsächlich die verlornen Geschwindigkeiten den eigentlichen Gegenstand der Behauptungen bildeten. Auf den elastischen Stoss bleibt derselbe Gesichtspunkt anwendbar, wenn man an Stelle der wirklich verlornen Action diejenige setzt, welche im Fall des Mangels der Elasticität unter übrigens gleichen Umständen verloren gegangen sein würde. Ueberhaupt kommt es gar nicht auf den sogenannten Verlust als solchen, sondern nur darauf an, dass die gegenseitig aufgehobenen und zur Veränderung verbrauchten, wenn auch nachher bei der Gegenveränderung wieder hergestellten Actionsmengen ein Minimum bilden oder, genauer geredet, die dem Maximum oder Minimum entsprechende analytische Eigenschaft haben. Nur die Veränderung, d. h. die Hervorbringung des Unterschieds in den Bewegungszuständen ist es, wozu eine Actionsmenge ins Spiel gesetzt wird, welche die für das Princip fragliche Eigenschaft haben muss. Es sind also nicht speciell die verlornen, sondern überhaupt die in einer Umwandlung verbrauchten, d. h. in dieselbe eingegangenen Kräfte, auf welche das Princip bezogen werden muss, wenn man dem Carnotschen Gedanken eine höhere Allgemeinheit abgewinnen will. Soviel ist aber in jedem Fall einzuräumen, dass es wichtig ist, diejenigen Theile der Geschwindig-

[1]) Principes fondamentaux etc. Paris 1803, Art. 185, S. 157.

keiten oder Bewegungsgrössen zu unterscheiden, welche sich durch gegenseitige Action in irgend einer Beziehung aufheben und nur unter Voraussetzung der Elasticität in einer entsprechenden Rückwirkung wieder hervortreten. Die wechselseitige Action beruht ganz und gar darauf, dass diese Bestandtheile ins Spiel kommen; die übrigen bilden nur einen Rest, der von einer Veränderung gar nicht afficirt wird, sondern nach dem allgemeineren Gesetz der Beharrung einfach fortbesteht. Hienach ist erklärlich, dass ein auf die eigentliche Actionsmenge bezügliches Princip unmittelbar die Bestandtheile der ersten Art zum Gegenstande haben und daher direct für die dem Verbrauch oder der Verwandlung anheimgefallenen Kraftelemente gelten wird.

Der Grund, aus welchem das Princip der geringsten Action von seinem Ursprung her und in seinen späteren Fassungen mit einer überraschenden Unsicherheit behaftet geblieben ist, dürfte weniger in der metaphysischen Haltung der logischen Ausgangspunkte, als in der mathematischen Zweideutigkeit der dem Minimum entsprechenden Gleichung zu suchen sein. Man hat sich bis auf Lagrange, der exacter verfuhr, durch einen sehr begreiflichen Fehlschluss täuschen lassen. Die alte Tradition vom Minimum, mit welcher der Gedanke eines Maximum nicht verträglich war, veranlasste, den nächsten analytischen Ausdruck dadurch zu suchen, dass man das Differential oder die Variation gleich Null setzte. Mit den Bedingungen, die durch eine solche Gleichung geliefert wurden, operirte man, fand die anderswoher bekannten mechanischen Wahrheiten bestätigt und schloss nun rückwärts, es müsse das zu Grunde gelegte Princip zutreffend sein. In der That hätte man aber nur schliessen dürfen, dass die Ausgangsgleichung eine nothwendige mechanische Voraussetzung oder, mit andern Worten, ein mechanisches Gesetz enthalte. Die in ihr verborgene allgemeine Wahrheit durfte aber nicht als durch die Idee des Minimum gedeckt betrachtet werden, da man ja genau dieselbe Gleichung erhalten haben würde, wenn man von dem völlig entgegengesetzten Gedanken eines Princips der grössten Action ausgegangen wäre. Wirklich hatte auch d'Arcy, von dem wir bezüglich seiner Fassung des Princips der Flächen Nr. 119 gesprochen haben, in der weitern Ausführung dieses seines Princips sich bemüht, dasselbe demjenigen der geringsten Wirkung als Princip der Erhaltung der Action entgegenzusetzen. Erwägt man die maximalen Eigenschaften, welche sowohl bei dem Flächenprincip als bei demjenigen

der Erhaltung der algebraischen Summen der Bewegungsgrössen zur Sprache gebracht werden können und die natürlichen Effecte im Gegensatz zu den beliebigen Projectionen kennzeichnen, so liegt es allerdings nahe, alle diese charakteristischen Eigenschaften zu verschmelzen und ein Gesetz der maximalen Action als die passendste Grundlage aller übrigen, aus einem bestimmten Gesichtspunkt etwa auch minimalen Beziehungen anzusehen.

Die analytische Vorbedingung, die in gleicher Weise für Maximum und Minimum gilt, ist bekanntlich die Möglichkeit, das Differential der Function oder Gleichung gleich Null zu setzen. Diese Regel gilt nicht blos für die gewöhnlichen Maxima und Minima, bei denen es sich darum handelt, den zugehörigen Werth der unabhängigen Veränderlichen zu ermitteln. Sie gilt also nicht blos da, wo der Lauf der Function selbst zu einem Maximal- oder Minimalpunkt führt, sondern auch für jene höhere Art von Problemen, welche die Ermittlung derjenigen Beziehungen zwischen den Veränderlichen zum Ziel haben, vermöge deren das Integral der in diesen Veränderlichen gegebenen Function ein Maximum oder Minimum wird. In unserm Princip liegt nun letzterer Fall vor. Ferner beruht überall die Unterscheidung von Maximum oder Minimum auf der Erkennung der Negativität der zweiten Differentialcoefficienten oder, allgemeiner geredet, derjenigen Functionencomplexe, welche sich auf die zweiten Potenzen oder überhaupt auf die zweiten Dimensionen der Incremente beziehen. Lagrange hat[1]) den Fall des stabilen und des labilen Gleichgewichts derartig unterschieden, dass in dem einen das Maximum, in dem andern das Minimum statthabe, und hat in dieser Rücksicht den Beweis bei Erörterung seiner allgemeinen Annäherungsmethode für die dynamischen Probleme[2]) vervollständigt. Trotzdem ist eine einfache Unterscheidung der Maxima von den Minima grade in Beziehung auf das Princip der geringsten Action ausser für den Fall des Gleichgewichts nicht in Frage gekommen. Obwohl man die analytischen Hülfsmittel besitzt[3]), wenigstens bis zur Feststellung der Positivität oder Negativität der Coefficientengruppen der zweiten Dimensionen der Incremente vorzudringen und nur für den Fall in Umständlichkeiten geräth, dass man, wo die fraglichen Glieder

---

[1]) Méc. anal. Bd. I (1811) Statik Sect. III, Art. 23.
[2]) Ibid. Dynamik Sect. V, § 3, Art. 20 fg.
[3]) Lagrange, Théorie des fonctions, 2. Aufl. Theil II, Art. 64 fg.

Null werden, noch weiter gehen muss, — so findet sich doch bei Lagrange kein Versuch gemacht, ganz im Allgemeinen zu entscheiden, welche mechanischen Eigenthümlichkeiten für das bei dem Princip der geringsten Action fragliche Integral ein Maximum, und welche ein Minimum mit sich bringen.

126. Alle bisher in diesem Capitel betrachteten Principien waren Sätze, durch welche die allgemeinsten Eigenschaften in der Bewegung eines beliebigen Systems kenntlich gemacht wurden. Das Princip, zu welchem wir jetzt überzugehen haben, ist den ersteren insofern nicht gleichartig, als es keine neue Eigenschaft der Bewegung hinzufügt, sondern nur sichtbar werden lässt, wie sich eine Beziehung zwischen gegebenen Kräften und hervorgebrachten Bewegungen durch ein äquivalentes Gleichgewichtsverhältniss ersetzen lasse, vermöge dessen alle Grössenrelationen wesentlich dieselben bleiben und sogar die Aenderung der Vorzeichen nur diejenige ist, welche auch durch blosse algebraische Umformung der unmittelbaren Bewegungsgleichungen hervorgebracht werden könnte.

Gewöhnlich sagt man von dem d'Alembertschen Princip, dass es alle Aufgaben der Dynamik auf statische Beziehungen zurückgeführt habe. Dies ist im Allgemeinen richtig; jedoch hat erst Lagrange die allgemeine dynamische Grundgleichung aufgestellt, und man ist in den Vorstellungen, die man unter dem Namen des d'Alembertschen Princips zur Anwendung brachte, nicht immer genau der eignen Auffassungsart d'Alemberts gefolgt.

Wir haben früher (Nr. 101) das Verfahren Jacob Bernoullis kennen gelernt, durch welches derselbe bei Gelegenheit der Aufgabe vom Schwingungsmittelpunkt alles Wesentliche vorwegnahm, was in dem d'Alembertschen Princip mit dem Bewusstsein einer ganz allgemeinen Gültigkeit formulirt wurde. Wir haben dort auch schon die verschiedenen Möglichkeiten dargelegt, welche sich für die Zusammensetzungsart der drei Kräfteclassen ergeben. Es sei daher daran erinnert, dass die eventuellen Kräftewirkungen im freien, d. h. statisch nicht gebundenen Zustande, dann die durch die statische Beschränkung verlornen Kräfte und endlich die wirklich resultirenden Bewegungen oder die entgegengesetzten Kräfte, welche man zur Aufhebung dieser Bewegungen einführt, die drei Gruppen bilden, von denen man im Hinblick auf das Gleichgewicht jede einzelne nach Belieben als Resultante oder Componente betrachten kann. Jacob Bernoulli hatte den Begriff

der verlornen Kräfte erfasst und die zunächst am meisten natürliche Zusammensetzungsart zu Grunde gelegt. Er hatte die den wirklichen Bewegungen entsprechenden Kräfte als Resultanten genommen, während die freien und die verlornen Kräfte die sich zusammensetzenden Componenten bildeten.

D'Alembert legte sein Princip seiner Dynamik[1]) zu Grunde. Die Behandlungsweise, die er wählte[2]), und die man nicht blos aus der Wortformel, sondern auch aus den zahlreichen Anwendungen im zweiten Theil des Buchs, namentlich aber aus dem einleitenden Beispiel[3]) entnehmen muss, richtete sich unmittelbar auf die Betrachtung der verlornen, d. h. der durch die wechselseitige Beziehung der statisch verbundenen Körper einander aufhebenden Kräftetheile. Diese verlornen Kräfte, für sich allein ins Auge gefasst, müssen im Gleichgewicht sein; denn sonst würden sie zur Bewegung beitragen, was dem Begriff derselben entgegen ist. In der Behauptung des Gleichgewichts dieser verlornen Kräfte besteht das d'Alembertsche Princip, wenn man streng der engern Fassung folgt, die es durch den namengebenden Autor selbst erhalten hat. Dagegen ist die Einführung der den wirklichen Bewegungen entgegengesetzten Kräfte und die unmittelbare Vorstellung von einem Gesammtgleichgewicht, welches zwischen diesen Kräften und den zwei andern Kräftegruppen stattfinde, principiell erst von Lagrange[4]) zu einer allgemeinen Anwendung gebracht worden. Auch die verwandte Vorstellung, dass die Bewegungen, welche die auf das System wirkenden Kräfte, wenn sie frei agirten, hervorbringen würden, sich aus den wirklichen Bewegungen und den verlornen Kräften zusammensetzen lassen müssen, war für d'Alembert selbst nur ein Mittel gewesen, das selbständige Gleichgewicht, welches allein zwischen den verlornen Kräften statthat, näher zu erläutern.

Das schon citirte Hauptbeispiel, mit welchem d'Alembert die mannichfaltigen Anwendungen des Princips einleitet, behandelt den Fall einer an ihrem einen Ende befestigten und übrigens mit verschiedenen Körpern beschwerten Stange. Die Körper werden hiebei unter dem Einfluss von Antrieben gedacht, die ihnen im freien Zustande gewisse gegebene Bewegungen ertheilen würden. Da wir es hiebei mit einer Gestaltung zu thun haben, die sich auf das

---

[1]) Traité de dynamique, Paris 1743.

[2]) Ibid. S. 49. (Andere Ausg. 1796, Theil II, Cap. I, Art. 60).

[3]) Ibid. S. 69. (Andere Ausg. 1796, Theil II, Cap. III, Art. 87).

[4]) Méc. anal. Bd. I (1811) Dynamik Sect. I, Art. 11.

von uns umfassend erörterte Schema des zusammengesetzten Pendels zurückführen lässt, so brauchen wir auf dieselbe nicht näher einzugehen. D'Alembert zerlegt natürlich ganz in dem Sinne, wie es Jacob Bernoulli und l'Hopital gethan hatten, die Geschwindigkeiten derartig, dass er die Gleichgewichtsbeziehungen zwischen den verlornen Kräften ansetzen und so die Geschwindigkeit des äussersten Punktes aus der gewonnenen Gleichung entwickeln kann. Diese Zerlegung der Kräfte in zwei Bestandtheile, von denen die einen im Gleichgewicht sein müssen, während die andern zur Bewegung beitragen, ist das Charakteristische des Princips. Denkt man ausserdem daran, dass der Fall eines nicht im Gleichgewicht befindlichen, an verschiedenen Punkten beschwerten Hebels in seiner Bewegung als Grundtypus für die einander nur theilweise aufhebenden bewegenden Kräfte betrachtet werden kann, so wird es begreiflich, wie es habe soviel Schwierigkeiten verursachen können, bis dieser dynamische Normalfall durch die Ueberlegungen Jacob Bernoullis und deren d'Alembertsche Verallgemeinerung bemeistert wurde. Im Hinblick hierauf könnte man sagen, dass, wenn die Bedingungen des Gleichgewichts am Hebel zugleich der geschichtliche und der rationelle Ausgangspunkt der gesammten Statik gewesen sind, die Dynamik statisch combinirter Körper ihrerseits auf die Bedingungen der Bewegung am Hebel als das historisch zu Grunde liegende Princip zurückzuweisen habe. Das zusammengesetzte Pendel, in der einfachen Gestalt einer mit mehreren Körpern beschwerten und an einem Punkte befestigten Linie, ist wesentlich nichts weiter als der in Bewegung begriffene Hebel, und diese Betrachtungsart erklärt auch zugleich die Bedeutsamkeit des Schrittes, durch welchen Jacob Bernoulli die Kräfte am zusammengesetzten Pendel mit dem Princip des Hebelgleichgewichts in Beziehung setzte. Indem wir an die Betrachtungen über letzteren Gegenstand im vorigen Capitel erinnern, bemerken wir nur noch zum principiellen Abschluss aller bisherigen Auffassungsarten, dass die vollständige Verallgemeinerung der Idee eines partiellen Gleichgewichts, welches bei jeder dynamischen Kräftecombination statthabe, erst die hinreichend abstracte und völlig zutreffende Form liefert, das Verhältniss von Statik und Dynamik in seiner wahren Natur und unverkürzten Tragweite zu begreifen. Es ist jedoch hier noch nicht der Ort, den Gedanken dieses partiellen Gleichgewichts, von dem wir zuerst bei Galilei (Nr. 28) im Hinblick auf die Mischung von Gleich-

gewichts- und Bewegungseffecten eine Andeutung gegeben haben, ausführlicher zu behandeln, da wir zuvor der weiteren geschichtlichen Entwicklung der allgemeinen Principien und der Systematik der rationellen und analytischen Mechanik folgen müssen.

Viertes Capitel.

Princip der virtuellen Geschwindigkeiten und Systematisirung der Mechanik durch Lagrange.

127. Obwohl, wie wir früher gesehen haben, das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten mindestens ebenso alt ist, als die moderne, durch Galilei maassgebend eingeleitete Mechanik, so ist doch die Benutzung dieses Princips als eines Ausgangspunkts zur Entwicklung aller übrigen mechanischen Wahrheiten sehr neu. Dieser letztere Gebrauch, den erst Lagrange von dem Princip machte, bedeutet sogar einen gewissen Abschluss in der Systematik der Mechanik. Die Anwendung eines Fundamentalprincips, welches sich für den Calcül eignet, und die grundsätzliche Durchführung der analytischen Entwicklungen als des Hauptleitfadens für die Verbindung aller Wahrheiten der rationellen Mechanik zu einem einheitlichen System, — das sind die beiden Haupteigenschaften, durch welche sich die Behandlungsart Lagranges auszeichnet.

Ehe wir auf die Rolle eingehen, die das virtuelle Princip in dieser jüngsten und ausgedehntesten Anwendung spielt, müssen wir von der Entwicklungsgeschichte desselben noch Einiges nachholen. Zunächst sei daran erinnert, dass sich die Spuren desselben bis vor Galilei zurückverfolgen liessen, und dass wir es bei Galilei selbst nicht nur ausdrücklich als statische Beziehung hervorgehoben und angewendet gefunden, sondern auch in einer allgemeineren Gestalt insoweit angetroffen haben, als es dem eigenthümlichen Begriff des Moments, den der Urheber der Dynamik vor Augen hatte, überall zu Grunde lag. Auf diesen Begriff des Moments kam, wie wir ebenfalls schon angeführt haben, erst Lagrange wieder zurück, und gründete auf denselben seine Herleitungsart der allgemeinen statischen und der erweiterten

dynamischen Grundformel. Inzwischen war die Galileische Anschauungsweise in Vergessenheit gerathen gewesen; ja das virtuelle Princip selbst, welches doch auch schon bei Cartesius eine fundamentale Bedeutung gehabt hatte, war in den Hintergrund getreten. Die beiläufige und eingeschränkte Art, in welcher wir es (Nr. 86) bei Newton erwähnt und aufgefasst fanden, ist für die spätere Zeit sogar noch als eine besondere Berücksichtigung anzusehen. Johann Bernoulli ist derjenige, der zuerst wieder auf das virtuelle Princip und dessen grössere Tragweite ernstlicher zurückkommt. Zwar ist die Formulirung, die er in seiner Preisabhandlung über die Mittheilung der Bewegung von 1723 aufstellt, noch ziemlich eng an die Newtonsche Fassung angeschlossen. Er sagt dort[1]: „Zwei Agentien sind im Gleichgewicht oder haben gleiche Momente, wenn ihre absoluten Kräfte im umgekehrten Verhältniss ihrer virtuellen Geschwindigkeiten stehen, mögen die aufeinander wirkenden Kräfte in Bewegung oder Ruhe sein. Dies ist ein gewöhnliches Princip der Statik und Mechanik u. s. w." Schon in einem älteren Brief an Varignon (v. 26. Januar 1717) hatte Johann Bernoulli das Princip möglichst allgemein auszudrücken versucht, wie der folgende Satz beweist, welcher Rücksicht auf die Vorzeichen nimmt[2]: „Die Summe der positiven Energien wird gleich der Summe der negativen, aber positiv genommenen Energien sein." In dieser Ausdrucksweise verräth sich etwas von dem Galileischen Begriff der Energie und des ihr entsprechenden Moments einer Kraft. Die Zusammenfassung aller Energien nach zwei Gruppen, welche durch das Vorzeichen geschieden sind, ist hier die Hauptsache. Es ist nicht genug, das Princip für die einfachen Maschinen oder einfache Kräfteverhältnisse, die wesentlich nur aus zwei Gliedern bestehen, geltend zu machen, sondern es kommt darauf an, dasselbe für ein beliebiges System von Kräftecombinationen auszusprechen. Obwohl nun Galilei das virtuelle Princip schon in die Hydrostatik eingeführt hatte, so lässt sich doch nicht leugnen, dass Johann Bernoulli wenigstens den erforderlichen Schritt gethan hat, um die virtuellen Verhältnisse in gesonderter Weise für die Theile eines beliebigen Systems vorstellig und zum Kennzeichen des Gleichgewichts zu

---

[1]) Opera, Lausanne 1742, Bd. III, Discours sur les lois de la communication du mouvement, Cap. 3, S. 23.

[2]) Bei Varignon, Nouvelle Mécanique etc., Bd. II, S. 176.

machen. Hieraus erklärt es sich auch, dass man bisweilen auf Johann Bernoulli, als auf den modernen Urheber des virtuellen Princips hingewiesen findet [1]). In Wahrheit hat sich dieser Mathematiker nur den älteren Vorstellungen wieder genähert und hiebei die grössere Allgemeinheit walten lassen, welche der entwickeltere Zustand der Mechanik fast unwillkürlich nahelegte.

128. Wenn Johann Bernoulli eine allgemeinere Formulirung des virtuellen Princips unternahm, so hat Lagrange die wahrhaft fundamentale Natur desselben am tiefsten erkannt und es demgemäss in seinem System zum Eckstein der ganzen Mechanik gemacht. Um diese Rolle des Princips zu verstehen, muss man jedoch die besondern Vorstellungen untersuchen, die der Vollender der analytischen Grundformen der mechanischen Deduction von dem Wesen des virtuellen Satzes hegte. In der 1. Ausgabe seiner Analytischen Mechanik ging er von dem Princip wie von einem Axiom aus, ohne zu versuchen, den früheren Erläuterungen desselben auch seinerseits eine Art Beweis hinzuzufügen. In der 2. Ausgabe fühlte er das Bedürfniss, seinen ersten und wichtigsten Ausgangspunkt fester als bisher zu sichern, und er nahm seine Zuflucht zu einer Wendung [2]), durch welche das Princip der Kräftewirkung am Flaschenzug das einzige Hülfsmittel wird, den Satz von den virtuellen Geschwindigkeiten zu erweisen. Der Vortheil, der hiemit verbunden wäre, sollte hauptsächlich darin bestehen, die beiden andern statischen Principien, nämlich das des Hebels und das des Parallelogramms der Kräfte, entbehrlich zu machen. In allen früheren Erläuterungen des virtuellen Gesetzes hatte man, wie Lagrange mit Recht behauptet, jene beiden Fundamentalsätze in Anspruch nehmen müssen, um die Combination der virtuellen Geschwindigkeiten zu bewerkstelligen. Man

---

[1]) Unter Andern auch bei Fourier, Mémoire sur la statique, contenant la démonstration du principe des vitesses virtuelles etc. Journal de l'école polytechnique, tome II (an VI), page 21.

[2]) Méc. anal. Bd. I (1811) Statik Sect. I, Art. 18 und 19. — Der Flaschenzugbeweis von Lagrange schon früher veröffentlicht in einem Aufsatz des Journ. de l'école polyt., 5. Cahier, tome II, p. 115, Sur le principe des vitesses virtuelles; im Contrast stehend zu Fouriers eben angeführter, demselben Heft angehöriger Abhandlung. — Unter Andern hat auch Laplace in der Mécanique céleste Buch I, Cap. 3 einen Beweisversuch unternommen und Poinsot sich die Mühe gemacht, dessen Unklarheit und Cirkelnatur in einem besondern Aufsatz in Liouville, Journal des mathématiques, Bd. III, 1838, S. 244—248 zu beleuchten.

hatte allerdings die Beziehungen am Hebel selbst durch die Gleichheit der virtuellen Momente gedeckt; aber man war nie zu einer eigentlichen Deduction aus einem ganz allgemein gefassten virtuellen Princip gelangt. Am wenigsten hatte man aber die Zusammensetzung oder vielmehr Zerlegung der Kräfte entbehren können, indem ja in den Formulirungen des Princips selbst die Reduction der Verschiebungsgeschwindigkeiten auf die Richtungen der Kräfte vorausgesetzt wurde, und indem man die Aufhebung entgegengesetzter virtueller Momente offenbar nur durch die Zurückführung auf einerlei Richtung begreiflich machen konnte. Unter allen Umständen hatte sich also, bald offener, bald versteckter, die Rücksicht auf die Zusammensetzung der Geschwindigkeiten und Kräfte einfinden müssen. Die neue Entwicklung Lagranges hat den Anschein für sich, die Zusammensetzung der Kräfte gänzlich zu umgehen. Der Flaschenzug, jene bekannte Verbindung von Rollen, die theils in festen, theils in beweglichen Fassungen angebracht sind, und um welche sich ein einziges Seil windet, hat, als ideelle Maschine zur Demonstration gebraucht, allerdings zwei wichtige Vortheile. Sie ist ein Mittel, die Einheit einer Kraft, die durch die gleichmässige Spannung des Seils dargestellt wird, nicht nur durch Nebenordnung und Häufung der parallelen Seilstücke beliebig zu vervielfältigen, sondern auch diesen Vervielfachungen der Krafteinheit eine beliebige Richtung zu geben, indem man die Verbindungslinie zwischen der beweglichen und der befestigten Fassung willkürlich in die erforderliche Lage bringt. Auf diese Weise kann man in Gedanken durch die Spannung eines einzigen völlig biegsamen und unausdehnbaren Fadens, den man abwechselnd um feste und um bewegliche Punkte (Rollen) führt, nach jeder beliebigen Richtung eine Kraft von bestimmter Grösse erzeugen und an einem gegebenen Punkte angreifen lassen. Mit einem einzigen Faden kann man beliebig viele derartige Kräfte construiren, und sie alle zusammengenommen sind dann das Resultat einer einzigen Zugkraft, die in Gestalt eines Gewichts oder auf sonst eine Weise an dem unbefestigten Ende des Fadens vorhanden ist. Indem sich bei jedem Angriffspunkte eine gewisse Anzahl von gleichmässig gespannten Theilen des Fadens parallel nebeneinander befindet und vermittelst der beweglichen Fassung auf das anzugreifende Object einheitlich wirkt, finden sich die in den Spannungen gegebenen Zugkräfte summirt. Die Anzahl der Seil- oder Fadenstücke ist hienach der

Ausdruck für die Kraft. Es ist dies die einfachste Form der parallelen Kräftecombination, die sich denken lässt.

Nimmt man nun ein System von Körpern oder Punkten an, auf welches beliebige Kräfte wirken, so kann man diese Kräfte sämmtlich durch einen einzigen Flaschenzug hergestellt denken. Ein einziger Faden mit seiner gleichmässigen Spannung und mit dem Hülfssystem der festen und beweglichen Punkte, um die er gewunden wird, ersetzt mit der Coordination und den verschiedenen Richtungen seiner Spannung alle Kräfte des Systems. Soll nun das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten als allgemeingültig dargethan werden, so ist es nur erforderlich, nachzuweisen, dass im Falle einer unbegrenzt kleinen Verschiebung des Systems, d. h. des Inbegriffs der Angriffsörter der Kräfte, die Entfernungsveränderungen der beweglichen gegen die festen Fassungen sich zu einander so verhalten, dass die Kraft am freien Ende keine entsprechende Ortsveränderung ihres Angriffspunkts durch eine Längenveränderung des freien unbefestigten Fadenstücks erfahren kann. Lagrange, der sich an diesem Ende ein wirkliches Gewicht denkt, geht von dem specielleren Gesichtspunkt aus, dass dieses Gewicht unter Voraussetzung der erwähnten Verschiebung nicht sinken dürfe. Da aber der allgemeine Begriff der Kraft mit der Schwere und der verticalen Richtung hier nichts Wesentliches zu schaffen hat, und da ohnedies der Flaschenzug nicht als wirkliche Maschine, sondern als ideelle Combination dient, an welcher man alles nur empirisch Nöthige, aber ideell Unwesentliche ausmerzen muss, so ist nicht abzusehen, warum man sich unnütze Schwierigkeiten bereiten und die Allgemeinheit des Raisonnements durch die blosse Ausschliessung des Sinkens einschränken soll. Es muss vielmehr jede Möglichkeit, also auch die des Steigens oder überhaupt der Ortsveränderung am freien Wirkungsende des Fadens gegen die dort angebrachte Kraft ausgeschlossen werden. Ist das System, auf welches die gesammte Fadenvorrichtung wirkt, im Gleichgewicht, so müssen die unbegrenzt kleinen Verschiebungen seiner Theile sich compensiren, und es darf aus denselben keine analoge Affection der Länge des freien Endes entstehen.

129. Um zu beurtheilen, was der Beweis vermittelst des Flaschenzuges leiste, und welchen Sinn er haben könne, ist es nöthig, zuvor den Inhalt des virtuellen Princips und einen in seiner Formulirung höchst wesentlichen Umstand näher ins Auge zu fassen. Sobald in einem System Gleichgewicht besteht, so werden

die bei einer unbegrenzt kleinen Verschiebung auf den Richtungen der Kräfte durchlaufenen unbegrenzt kleinen Räume, d. h. also die virtuellen Geschwindigkeiten so beschaffen sein, dass die Summe der Producte dieser Räume oder Geschwindigkeiten mit den zugehörigen Kräften gleich Null ist. Man kann diese Beschaffenheit auch dadurch ausdrücken, dass man sagt, die Kräfte müssten sich im Fall des Gleichgewichts umgekehrt wie die virtuellen Geschwindigkeiten verhalten. Doch ist diese Vorstellungsart nur dann ohne Weiteres deutlich, wenn man nicht mehr als zwei Körper zu vergleichen hat. Für das Beispiel des Hebels sind beide Vorstellungsarten sehr geläufig; man hat hier nur zwei mögliche d. h. virtuelle Verschiebungen, nämlich entweder in dem einen oder in dem andern Sinne der Drehung um den Unterstützungspunkt. Die kleinen Kreisbögen, welche gleichzeitig durchlaufen werden, sind in diesem Fall den Hebelarmen proportional. Die Gewichte müssen sich umgekehrt wie dieselben verhalten oder, nach der zweiten Vorstellungsart zu reden, die Producte aus ihnen und den zugehörigen Bogentheilchen müssen eine Summe gleich Null ergeben. Letzteres geschieht nun, sei es, dass man in dem einen oder dem andern Sinn die Drehung voraussetze; denn beide Producte sind gleich, und eines derselben, nämlich jedesmal dasjenige, welches dem gegen die Kraftrichtung durchlaufenen Bogen entspricht, wird negativ. Hiemit haben wir das einfachste Beispiel, wie man in die algebraische Summe der virtuellen Momente die Vorzeichen einzuführen habe. Doch ist die Bestimmung gewisser Momente als negativ keineswegs eine leicht abzumachende Nebensache, sondern wird sich sogleich als ein Cardinalpunkt erweisen, der für die Fassung und Begründung des Princips gleich wichtig werden muss, sobald er in seiner ganzen Bedeutung erkannt ist.

Wenn die Verschiebung des Angriffspunktes einer Kraft genau im entgegengesetzten Sinne der Wirkungsrichtung dieser Kraft stattfindet, so wirkt die Kraft negativ, indem sie die fragliche Lageveränderung in ihrem eignen Sinne zu hemmen strebt. Anders verhält es sich, wenn die Verschiebung genau im Sinne der Kraft vor sich geht. Alsdann ist zwar auch ein Widerstand vorhanden; aber er rührt von der Gegenkraft her, die sich von einem andern Punkte des Systems auf den in Frage stehenden Punkt überträgt, wie das Hebelbeispiel leicht deutlich macht. Die unmittelbar an diesem Punkt betrachtete Kraft wirkt positiv

und ergiebt ein positives Moment, indem der virtuelle Weg nach ihrer eignen Richtung durchlaufen wird.

Weniger einfach gestaltet sich das Verhältniss, sobald der gewöhnliche Fall eintritt, dass keine genaue Entgegensetzung oder Uebereinstimmung des Sinnes der Verschiebungen und der Kräfte statthat. Dennoch sind alle Zwischenfälle innerhalb dieser beiden äussersten Möglichkeiten sammt den Extremen selbst nur die besondern Gestaltungen einer und derselben allgemeinen Beziehung. Man bemerkt diesen wichtigen Umstand recht deutlich, wenn man noch erst einen dritten, besonders ausgezeichneten Fall untersucht, nämlich denjenigen, in welchem die Verschiebung auf der Kraftrichtung senkrecht steht. Alsdann ist bekanntlich das virtuelle Moment Null, weil die virtuelle Geschwindigkeit Null ist. Auf der Kraftrichtung wird in diesem Falle gar kein Raum durchlaufen, indem die Projection der Verschiebung einen blossen Punkt ergiebt. In allen andern Zwischenlagen, also in dem allgemeinen Fall, in welchem der Winkel, den die Verschiebungsrichtung mit der Kraftrichtung bildet, weder Null noch ein rechter noch ein grader ist, wird eine bestimmte Reduction stattfinden, und es wird die durch Projection auf die Kraftrichtung reducirte Verschiebung positiv zu nehmen sein, wenn der Winkel ein spitzer, negativ aber, wenn er ein stumpfer ist. Diese Fälle, sowie die besonders ausgezeichneten, vereinigen sich jedoch unter der allgemeinen Regel, stets die Verschiebung nach Lage und Sinn der Kraftrichtung zu reduciren und so nach Grösse und Vorzeichen zu schätzen. Auch die äussersten Gestaltungen sind nur vereinzelte Ergebnisse eines und desselben Gesichtspunkts. Die Reduction der Verschiebung auf denjenigen Theil, der im Sinn oder gegen den Sinn, also überhaupt nach der Linie der Kraftwirkung durchlaufen wird, ist das Entscheidende, und wenn man die Ursache der Verschiebung selbst als eine Kraft ansehen wollte, so würde man sagen können, dass die den unbegrenzt kleinen Verschiebungen entsprechenden, das Gleichgewicht störenden Kräfte, gemessen nach der Richtung der am System wirksamen Kräfte, mit ihren gegenseitigen Einwirkungen einander aufheben und die Momentensumme gleich Null ergeben müssen.

Ein logisch natürlicher Ausdruck des virtuellen Satzes setzt voraus, dass man die herkömmliche Projection der möglichen Verschiebungen auf die Kraftrichtungen durch die umgekehrte Projectionsart, also durch die Reduction der Kräfte auf die

Verschiebungsrichtungen ersetze. Nur der Umstand, dass den vielen Verschiebungsmöglichkeiten gegenüber die Richtung der wirkenden Kraft eine einzige bleibt, erklärt die sonst unnatürliche Auslegung in der Gruppirung der Factoren des virtuellen Moments. Rein analytisch kann man den Cosinus des Winkels, den die Verschiebungsrichtung mit der Kraftrichtung bildet, ebensowohl mit der elementaren Verschiebung als mit der absoluten und freien Kraft multiplicirt denken. Naturgemäss ist aber nur die Einschränkung und Reduction der Kraft auf die Richtung der möglichen oder als möglich gesetzten Verschiebung des Angriffspunktes. Nach dieser Vorstellungsart ergiebt sich auch allein die einfachste Formulirung des Hauptprincips, nämlich dass im Fall des Gleichgewichts die virtuelle, d. h. nach den Möglichkeiten der Verschiebungen reducirte und bemessene Kräftewirkung gleich Null sein müsse. In voller Strenge schliesst diese Formulirung überdies noch die Voraussetzung ein, dass man, wie Lagrange in seiner Functionentheorie, die Verschiebungen als reine Hülfsgrössen ausmerze, und dass man auf die für die Entwicklungen der Verschiebungen von vornherein maassgebenden und den Verschiebungen so zu sagen vorangehenden Grössenfactoren und mithin streng punktuellen Geschwindigkeitsmöglichkeiten zurückgreife.

130. Wenn es die virtuelle Wirkung der Kräfte ist, auf die man zu achten hat, so steht das Princip bereits fest, und die weitere Frage ist nur die, wie diese virtuelle Wirkung zu messen sei. Um aber zu wissen, wie man die virtuelle Wirkung der Kräfte zu schätzen habe, muss man zuvor darüber einig sein, wie und durch welche Factoren die Kräftewirkung überhaupt bestimmt werde. Die actuelle oder die freie Kräftewirkung giebt auch das Maass ab, die blos mögliche und virtuelle, d. h. die eingeschränkte Action auszudrücken. So weist also das virtuelle Princip auf den Begriff der Kraftgrösse und deren Factoren zurück. Ueber die Beziehungen der Kraft zur Geschwindigkeit und zum Raume muss entschieden sein, ehe man daran denken kann, das virtuelle Princip auf einen sichern Grund zu stützen. Ist aber über diesen Fundamentalpunkt entschieden, dann genügt auch der blosse Satz, dass die virtuelle Wirkung im Fall des Gleichgewichts Null sein müsse. Diese virtuelle Wirkung übersetzt sich dann sofort in die Summe der virtuellen Momente, und diese Momente wiederum kann man nach Belieben als Producte aus den der Richtung nach reducirten Kräften und den relativen Geschwindigkeiten, oder

aber aus diesen Kräften und den Elementarräumen zusammengesetzt denken. Ja man kann diesen Momenten jeden mechanischen Begriff unterlegen, der geeignet ist, die momentane Action einer Kraft auszudrücken, die genöthigt ist, nach einer bestimmten Richtung und innerhalb vorgeschriebener Geschwindigkeitsverhältnisse zu agiren.

Um Missverständnisse auszuschliessen, sei schon hier daran erinnert, dass die virtuelle Thätigkeit ein Inbegriff von vielerlei Möglichkeiten sein kann, während actuell nur eine einzige Bewegung denkbar ist. Der Endpunkt eines Hebels kann in zwei Richtungen verschoben werden. Von zwei Punkten, die an dieselbe Entfernung gebunden sind, kann jeder in allen Richtungen verschoben werden, und es giebt sogar zwei Verschiebungen, bei denen die entsprechende virtuelle Verschiebung des andern Punktes Null sein kann. Ein einziger in der Ebene freier Punkt ist auch eine Art System, sobald er der Angriffspunkt mehrerer Kräfte ist, und die virtuellen Verschiebungen sind der Inbegriff aller Radien, die man in einem kleinen Kreise um ihn herum denken mag. Sollen nun die Kräfte um diesen Punkt im Gleichgewicht sein, so müssen sie sich für jeden Radius, auf dem man sie wirksam denkt, und auf den man sie projicirt, zu Null neutralisiren. Die virtuelle Verschiebung selbst ist in diesem Fall ein gemeinschaftlicher Factor, den man nicht zu berücksichtigen braucht. Es bleiben mithin nur die reducirten Kräfte selbst übrig, und diese müssen daher auf jeder beliebigen Richtung in der Ebene eine Gesammtsumme gleich Null hervorbringen. Hätten wir den Punkt als frei im Raume betrachtet, so würden wir eine noch grössere Mannichfaltigkeit, nämlich alle Radien einer kleinen um den Punkt beschriebenen Kugel als virtuelle Verschiebungen zu berücksichtigen gehabt haben. Die Möglichkeit, dass für irgend eine dieser Verschiebungen die Summe der zugehörigen virtuellen Momente oder, was hier dasselbe ist, der auf die Verschiebungsrichtung reducirten Kräfte, nicht gleich Null sei, muss ausgeschlossen werden, wenn unter den Kräften Gleichgewicht bestehen soll. Bekanntlich kann man diese vielen virtuellen Verschiebungen auf drei wesentliche reduciren, die den drei Dimensionen des Raumes entsprechen. Sind nämlich die Momente oder Kraftreductionen für drei nicht in einer Ebene liegende Richtungen Null, so müssen sie es auch für alle übrigen sein, indem sich jedes andere Moment aus jenen drei, die selbst Null sind, durch

Projectionen ableiten lassen muss. Die Methode, die Virtualitäten oder Möglichkeiten, welche in grösserer Anzahl vorhanden sind, auf die wesentlichen und unabhängig maassgebenden Fälle zurückzuführen, ist das Hauptmittel Lagranges, vermöge dessen die analytischen Variationen der für ein mechanisches System geltenden Bedingungsgleichungen eine so grosse Tragweite erhalten. Doch war es uns an dieser Stelle nur darum zu thun, bemerken zu lassen, wie der Begriff der virtuellen Kraftwirkung die Vorstellung von Möglichkeiten einschliesst, die sich im Hinblick auf die Verfassung eines mechanischen Systems näher bestimmen. Hiebei ist es aber nicht einmal nöthig, dass man alle Einschränkungen, die durch das System gegeben sind, auf einmal berücksichtige, sondern man kann schrittweise die einzelnen nothwendigen Beziehungen und die ihnen entsprechenden Bedingungsgleichungen zur Verengung des Bereichs der Möglichkeiten der Kraftwirkung benutzen. Auf diese Weise erhält man Anfangs einen weitern Spielraum, für den man die virtuelle Kräftewirkung bestimmen kann, um dieselbe nachher noch weiter einzuschränken und schliesslich die geringste Zahl der unter allen Umständen offenbleibenden Möglichkeiten zum Anknüpfungspunkt für die entscheidende Gesammtbeurtheilung des virtuellen Effects zu machen. Hiemit werden dann alle Möglichkeiten in einer übersichtlichen Weise erschöpft, indem Alles, was an diesen Möglichkeiten secundär, d. h. eine blosse Consequenz anderer schon erwogener Möglichkeiten ist, als unerheblich ausgeschieden wird. In dieser Wendung beruht Lagranges Hauptmethode, das virtuelle Princip analytisch zu verwerthen. Kehren wir jedoch zu dem Ausgangspunkt unserer Rechenschaft zurück und sehen wir zu, wie sich, nach Feststellung des allgemeinen Sinnes des virtuellen Princips, der Beweis desselben durch den Flaschenzug ausnimmt.

131. Bei der Beurtheilung des Beweises durch den Flaschenzug hat man sich zu erinnern, dass der virtuelle Satz umkehrbar ist, und dass er mithin zwei Behauptungen einschliesst. Wenn Gleichgewicht vorhanden ist, so wird die Summe der virtuellen Momente in jeder Hinsicht gleich Null sein, und umgekehrt, sobald Letzteres der Fall ist, wird auch Gleichgewicht vorhanden sein müssen. Der principale Satz ist natürlich das, was wir hier als Umkehrung bezeichnet haben; denn es handelt sich in der Mechanik weniger um die Folgen und Eigenschaften als vielmehr um die Vorbedingungen des Gleichgewichts und der Bewegung.

Das Princip soll uns lehren, die Bedingungen des Gleichgewichts zu bestimmen, wenn es auch historisch zuerst blos zur Charakteristik einer allgemeinen Eigenschaft des vorhandenen Gleichgewichts gedient hat. Lagrange geht jedoch vom gegebenen Gleichgewicht aus und beweist zuerst den Satz, dass unter Voraussetzung dieses gegebenen Gleichgewichts die Summe der virtuellen Momente gleich Null sei.

Die Veranschaulichung, die der ideelle Flaschenzug hiefür darbietet, entspricht in einem gewissen Sinne derjenigen Vorstellungsart, die wir in Beziehung auf die Richtungsreduction als die erste und gewöhnliche auseinandergesetzt haben. Nach der oben beschriebenen Zurüstung greifen die beweglichen Fassungen an den verschiedenen Punkten des Systems an. Der Einfachheit wegen denke man sich z. B. eine Hebellinie, d. h. eine um einen Punkt drehbare Stange, an deren Endpunkten die Kräfte, d. h. die beweglichen Fassungen des Flaschenzuges nicht in rechten Winkeln, sondern in unterschiedenen schiefen Richtungen angreifen sollen. Die virtuelle Verschiebung wird nun eine Verlängerung des Abstandes der einen beweglichen Fassung von der festen mit sich bringen, und es wird dieser Verlängerung eine Verkürzung am andern Endpunkt entsprechen. Die virtuellen Verschiebungen sind in unserm Beispiel, in welchem wir die Hebelstange horizontal denken, offenbar vertical. Die ihnen entsprechenden Verkürzungen und Verlängerungen oder, mit andern Worten, die Verschiebungen der Angriffspunkte auf den Richtungen der Kräfte selbst sind aber die oben erörterten Reductionen, welche durch Multiplication der Verschiebung mit dem Cosinus des Winkels entstehen, den die hier verticale Verschiebungsrichtung mit der Kraftrichtung, d. h. hier mit der Richtung der angreifenden Seilgruppe bildet. In der That verkürzt oder verlängert sich die Ausdehnung der fraglichen Seilgruppe nur um die Projection der virtuellen Verschiebung auf die Seilrichtung; denn während der Angriffspunkt, als Endpunkt der Wirkungslinie der Kraft betrachtet, die Verschiebung vertical durchläuft, nähert oder entfernt er sich zugleich nach der schiefen Richtung der Seilgruppe, deren Ende er bildet, um die Projection jener Verschiebung. Dies ist so anschaulich, dass man keine bessere Verdeutlichung auffinden dürfte. Der Dienst, den hier der Flaschenzug leistet, ist wirklich ein Mittel, der gewöhnlichen Vorstellungsart von der Reduction der Verschiebung wenigstens einen indirecten mechanischen Sinn zu geben. Das virtuelle

Moment, welches auf diese Weise construirt wird, setzt sich in der That aus der unreducirten Kraft, die durch die Anzahl der Seile gemessen wird, und aus der auf die Richtung dieser Kraft, also auf die Seilrichtung reducirten Verschiebung zusammen. Lagrange nennt kurzweg diese letztere die virtuelle Geschwindigkeit. Man müsste sie genauer als virtuelle Geschwindigkeit nach Richtung der Kraft bezeichnen; denn sie ist keine blosse Folge der Systemverfassung oder Systemvorrichtung, sondern hängt von der zufälligen Lage der angreifenden Kraft ab. Die Verkürzungen und Verlängerungen, die sich für das Hebelbeispiel sehr einfach gestalten, müssen nun für jedes Gleichgewichtssystem offenbar so beschaffen sein, dass sie an der Gesammtlänge des Seils nichts ändern. Thäten sie Letzteres, so würden sie das Gewicht oder überhaupt die Kraft am freien Ende des Seils afficiren und deren Angriffspunkt verschieben, was gegen die Voraussetzung sein würde, indem ein Rest von bewegender Kraft als Ueberschuss über die gegenseitigen Aufhebungswirkungen übrigbliebe. Diese Möglichkeit ist aber durch den Begriff des Gleichgewichts ausgeschlossen. Jede Bewegung des freien Endes, auch wenn sie unbegrenzt klein gedacht wird, würde eine freie überschüssige Kraft ausdrücken. Eine solche Kraft darf aber nicht entstehen, wenn die Kräfte, die nach der Voraussetzung actuell einander die Waage halten, auch virtuell gegeneinander wirksam gedacht werden. Die Unmöglichkeit der Längenveränderung des Seils ist durch das Gleichgewicht selbst unmittelbar gegeben und hieraus folgt sofort, dass die partiellen Verkürzungen und Verlängerungen einander compensiren müssen. Jede Verlängerung oder Verkürzung der Ausdehnung des einfachen Seils, welches durch eine Gruppe paralleler Seile vorgestellt wird, drückt das virtuelle Moment der zugehörigen Kraft aus. Indem man nämlich die jedesmalige Anzahl der Seile mit der zugehörigen Verkürzung der Gruppe als solcher, d. h. mit der Projection der virtuellen Verschiebung multiplicirt, berechnet man ja das virtuelle Moment und zugleich die Totalverkürzung der einfachen Seillänge in der Parallelgruppe. Die Constanz der gesammten Seillänge, die sich aus den Partiallängen der Gruppen zusammensetzt, bedeutet also, dass die Summe der virtuellen Veränderungen gleich Null sein müsse, und dies ist der virtuelle Satz unter Voraussetzung des gegebenen Gleichgewichts.

Die Umkehrung[1]) ist nicht schwer. Ist nämlich als Thatsache nicht das Gleichgewicht, sondern der Umstand gegeben, dass die virtuellen Momente einander zu Null aufheben, so heisst dies im Hinblick auf den ideellen Flaschenzug nichts Anderes, als dass die Gesammtlänge des Seils nicht verändert wird und mithin dessen freies Ende mit der dort angebrachten Kraft in derselben Position bleibt. Letzteres ist aber das Zeichen des Gleichgewichts; denn hätten die Kräfte in ihrer gegenseitigen Einwirkung einen Ueberschuss ergeben, so hätte sich dieser durch eine Verlängerung oder Verkürzung des Seils bethätigen müssen.

132. Dies ist in den wesentlichen Zügen die neu erfundene Beweisart, deren sich Lagrange bedient, um das Fundamentalprincip vom Hebel und vom Parallelogramm der Kräfte unabhängig zu machen und es allein auf den ideellen Flaschenzug zu gründen. Der nächstliegende Einwand, dass der Flaschenzug unter den sogenannten einfachen Maschinen die am wenigsten einfache sei, indem er die Wirkung an der Rolle voraussetze, — dieser Einwand lässt sich allenfalls beseitigen, da ja der ideelle Flaschenzug nur lauter gedanklich beherrschbare und sehr einfache Begriffe erfordert. Eine unausdehnbare, biegsame Linie nebst den Gruppen fester und beweglicher Punkte ist, wie wir gesehen haben, ein genügendes Denkschema, um alle Kräfte in der gewünschten Weise nach Intensität und Richtung darzustellen und die virtuellen Vorgänge zu veranschaulichen. Bedient sich auch Lagrange nicht ausdrücklich eines blossen Denkschema, so lässt er doch die Reibung zur Seite und setzt voraus, dass die Rollen unbegrenzt verkleinert werden können. Ein einziger weiterer Schritt würde also genügen, um den Flaschenzug in ein Schema zu verwandeln, welches ebensowenig wie das des Hebels oder das der schiefen Ebene mit mechanischen Zufälligkeiten behaftet wäre. Wie jede Linie, an der ein Punkt als fest, die übrigen aber als drehbar vorgestellt werden, das ideelle Schema des Hebels vorstellt, so braucht sich auch das strengste Raisonnement nicht zu scheuen, mit der gedanklichen ganz durchsichtigen Combination einer Fadenlinie und gewisser fester und beweglicher Punkte zu operiren. Der einzige Begriff, dessen Ungewohntheit Bedenken erregen könnte, wäre das Herumführen und Gleiten der biegsamen Linie in Bezug auf die festen und beweglichen Punkte. Indessen bedient sich die mecha-

[1]) Vgl. Méc. anal. Bd. I (1811) Statik Sect. I, Art. 20.

nische Deduction ja auch ideeller Canäle, um eine Bahnlinie als vorgeschrieben zu denken, und es muss überhaupt erlaubt sein, über die reinen geometrischen Begriffe durch neue ideelle, der Mechanik angepasste Gebilde hinauszugreifen. Ein solches ist nun der ideelle Flaschenzug, und er kann daher als ein vorzügliches Mittel betrachtet werden, die Kräfteverhältnisse zur Anschauung zu bringen.

Trotz dieser vorzüglichen Eigenschaft bleibt aber dennoch ein ungünstiger Umstand bestehen, der da zeigt, wie die Richtungsreduction einer Kraft für das virtuelle Princip ein Begriff sei, der sich auf keine Weise umgehen lässt. Was hilft es also, das Combinationsgesetz der unter einem Winkel wirkenden Kräfte in einer ausdrücklichen Formulirung zu verbannen, wenn man es in irgend einer verhüllten Form dennoch zur Anwendung bringen muss? Allerdings bietet das Princip des Flaschenzuges selbst eine Handhabe dar, um sichtbar zu machen, wie eine Kraft bei Vorzeichnung der Bahn ihres Angriffspunktes nur eine Bewegungswirkung üben könne, die sich im Verhältniss des Cosinus des fraglichen Richtungsunterschiedes reducirt. Die Bewegungseffecte, welche die Seile in den verschiedenen Neigungen hervorbringen, beschränken sich stets auf die wirklichen Verkürzungen, sobald man das Resultat der Bewegung auf die eigne Richtung der Seile bezieht. Indessen ist der Sinn dieser Verkürzung keineswegs unmittelbar klar, da die Verkürzung selbst ein zusammengesetztes Ergebniss ist, welches zergliedert und erläutert sein will. Nehmen wir daher zur Vereinfachung an, dass es sich um keine virtuelle Geschwindigkeit, sondern nur um eine virtuelle Richtung handle, die man durch einen graden Canal determinirt denken kann, so wird das angreifende Ende einer Seilgruppe etwa längs einer Spalte dieses Canals den in demselben eingeschlossenen beweglichen Punkt in einer der beiden möglichen Richtungen fortschieben. Wirkten die Seile nicht schief, sondern in der Richtung des Canals selbst, so würde die ganze in ihnen enthaltene Kraft zur Bewegung verwendet, und eine Richtungsreduction fände nicht statt. So aber ziehen die Seile zum Theil gegen die Wandung des Canals und bringen durch diese Pressung keine Bewegung hervor. Nur mit dem übrigen Theil der Kraft, der in die Richtung des Canals fällt, bringen sie eine Ortsveränderung hervor. Die Grösse der letzteren verhält sich nun zu der Verkürzung der Seilgruppe, d. h. zu der Bewegung, die sie nach ihrer eignen Richtung hervorbringt,

wie die Einheit zur Projection oder, wie man auch sagen kann, zum Cosinus des fraglichen Winkels. Jene Einheit selbst, die durch das Bewegungsstück im Canal repräsentirt wird, kann aber ebenfalls als eine Reduction derjenigen Bewegungswirkung angesehen werden, die entstanden sein würde, wenn die absolute Kraft nicht schief, sondern nach der Richtung des Canals angegriffen hätte. Es kann daher die auf der Seilrichtung selbst projicirte Strecke nicht diejenige reducirte Bewegung bedeuten, welche nach der gewöhnlichen Reduction im Canal entsteht. Diese letztere ist der Weg, der unter dem Einfluss der reducirten Kraft durchlaufen wird; der andere Weg ist aber derjenige, der mit der vollen Kraft durchlaufen werden muss, damit das Product aus Weg und Kraft ein Aequivalent der reducirten Action bleibe. Ein anderer Sinn lässt sich mit der Verkürzung der Seilgruppe nicht verbinden. Es hat sich mithin gezeigt, wie die blosse Richtungsreduction der Wirkung einer Kraft zwar durch den Flaschenzug veranschaulicht, aber nicht deutlicher gemacht werden könne, als sie ohnedies und bei der einfachen Anbringung einer Kraft ohne solche Vorrichtung wird. Gesetzt, man brächte unmittelbar eine von einem festen Centrum aus wirkende Zugkraft an, die durch Verkürzung eines Fadens nach diesem Centrum hin entwickelt würde, so würde in dem Canal eine Verschiebung entstehen, die man durch Division der Verkürzung durch den Cosinus des fraglichen Winkels erhielte. Dieser Sachverhalt wäre sogar ein rein geometrischer, da der Punkt nur dadurch die Annäherung zum Centrum vollzieht, dass er die fragliche zugehörige Strecke in dem unverrückbaren Canal zurücklegt. Man könnte demnach in dieser ganz einfachen Wendung, die auf den Nothwendigkeiten und Beziehungen phänomenaler Bewegungen beruht, einen mathematischen Beweis des Gesetzes der Richtungsreduction einer Kraft sehen, wenn dadurch irgend etwas mehr als eine Relation zwischen Bewegungserscheinungen gegeben wäre. Sowenig die Zusammensetzung der räumlichen Bewegungen schon an sich selbst eine Zusammensetzung der Kräfte ist, ebensowenig kann jene Richtungsreduction oder, wenn man will, jene projective Auffassung einer Bewegungserscheinung bereits an und für sich die Angabe des Werthes einer Kraft für eine bestimmte Wirkungsrichtung und das allgemeine Princip dieser Angabe vertreten. Ist nun aber schon dieses einfache Schema unzulänglich, so wird es der Vorgang am Flaschenzug, in welchem es mit einigem Nebenwerk

erscheint, noch weit mehr sein. Die Richtungsreduction einer Kraft bleibt also eine unabhängige principielle Voraussetzung und ein Axiom, welches weder durch das Gesetz des Flaschenzugs noch durch irgend einen Bestandtheil des virtuellen Princips ersetzt werden kann.

133. Der Satz, der auch im Princip des Flaschenzugs nicht enthalten ist und auch nicht aus demselben als aus etwas Einfacherem abgeleitet werden kann, betrifft, wie wir eben gesehen haben, diejenige Regel, nach welcher die Wirkung einer Kraft auf eine gegebene feste Richtung reducirt wird. Dieser Satz ist nun aber mit dem allgemeinen Princip der Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte so ziemlich äquivalent; denn wenn man ihn einmal hat, so kann man ihn auch leicht in das Parallelogramm der Kräfte verwandeln und mit seiner Hülfe die wichtige Reduction der Kräftewirkungen nach Coordinatenaxen vornehmen. Hieraus folgt, dass alle Versuche, die mechanischen Grundwahrheiten ohne jenen Satz von der Richtungsreduction zu entwickeln, ihren Zweck verfehlen müssen. Von welchem Princip man auch ausgehe, man wird diesen Satz mit oder ohne deutliches Bewusstsein einschliessen, da man ohne ihn keinen Schritt zu thun vermag, sobald es sich um die Combination von Wirkungen in verschiedener Richtung handelt. Wer, wie Lagrange, sofort mit der analytischen Zurüstung beginnt, kann nicht umhin, wenigstens die Zerlegung der Bewegungen nach Coordinatenaxen sogleich einzuführen, und da sich dieser Zerlegung der Bewegungserscheinungen mit der Berücksichtigung der Kraftintensitäten und der Massen gar bald eine Zerlegung der eigentlichen Kräfte unterschiebt, so hüllt sich in die Reduction aller Verhältnisse auf Coordinatenaxen ganz offenbar das gewöhnliche Zusammensetzungsprincip der Kräfte. Ein Beweis also, der auf diesem Wege geführt wird, kann noch so vortreffliche Eigenschaften haben; aber er wird auf den Anspruch verzichten müssen, nicht auf dem Parallelogramm der Kräfte zu beruhen.

Das ganze fünfte Capitel des dritten Theils von Lagranges Functionentheorie ist einer Entwicklung des virtuellen Princips gewidmet, die als die letzte vollendetste Fassung des Flaschenzugbeweises angesehen werden kann, aber in der That noch weit mehr ist, indem sie die allgemeine Formel des Princips aus den einfachsten und elementarsten Verhältnissen hervorgehen lässt. Wenn also noch in der zweiten Ausgabe der Analytischen Mechanik der virtuelle Satz fertig hingestellt und nur durch den Flaschenzug

bewiesen und dann in eine analytische Formel umgesetzt wird, so hat die zweite Ausgabe der Functionentheorie, die zwei Jahre später als der erste Band der zweiten Bearbeitung der Analytischen Mechanik erschien, den nicht unerheblichen Vorzug, den virtuellen Satz analytisch als eine Consequenz der Bedingungsgleichungen erscheinen zu lassen, von denen die einzelnen Körper oder Punkte des Systems mit ihren gegenseitigen Actionen abhängig sind. Die vorgeschriebene Fläche oder Bahn wird hier der Typus für alle Bedingungen, und der Inbegriff aller möglichen Beziehungen, die durch Gleichungen zwischen den Coordinaten der verschiedenen Punkte gegeben sein können, bildet Alles, was durch die blosse Verfassung des Systems als vorgeschrieben und als Determination für die gegenseitigen Verschiebungen gelten kann. Es ist gleichsam das gewöhnliche Capitel von der Kräftewirkung in Rücksicht auf feste Flächen oder Bahnen in ein solches verwandelt, welches von einem weit allgemeineren Gesichtspunkt ausgeht und von der Bewegung oder überhaupt Kräftewirkung innerhalb einer gegebenen Systemverfassung die universellste Rechenschaft giebt. Das Schlussergebniss dieser Rechenschaft ist dann eben die Formel des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten.

Lagrange giebt es deutlich genug zu verstehen[1], dass er sich bewusst sei, mit der Darstellung in der zweiten Ausgabe der Functionentheorie einen Fortschritt gemacht und das Princip aus den Bedingungsgleichungen abgeleitet zu haben. Die Methode dieser Ableitung besteht darin, zuerst den ganzen Inbegriff der nach den Bedingungsgleichungen möglichen gegenseitigen Bewegungsactionen in unbestimmten Kräften auszudrücken, deren Factoren aber durch die Differentialcoefficienten oder ersten Ableitungen gegeben sind, die sich aus jenen Gleichungen partiell für jede Coordinate bilden lassen. Diese unbestimmten Multiplicatoren vertreten solche Bestandtheile der Kraftmomente, die sich erst aus der Reaction gegen die angreifenden Kräfte näher bestimmen. Sie müssen also gleichsam offenbleiben, damit sich in völliger Abstraction nur das bestimmt ausgedrückt und gleichsam definirt finde, was wirklich blos von der Systemverfassung herrührt und die gegenseitigen Verschiebungen in einer ganz allgemeinen Weise regelt. Diese gegenseitigen Actionen müssen nun einander aufheben, und wenn man die ihnen entgegengesetzten Kräfte

[1]) Théorie des fonctions anal. dritte Abth. Cap. 5, Art. 30.



einführt und ihnen gleich setzt, so ergiebt die Summirung dieser Gleichungen das virtuelle Princip. Die Formel des letzteren ist mithin ausschliesslich aus den Bedingungsgleichungen hergeleitet, welche die gegenseitige Lage der Punkte des Systems normiren. Nur darf ein einziger Umstand hiebei nicht mit Stillschweigen übergangen werden. Es ist nämlich nöthig, die aus den Bedingungsgleichungen, welche die Zeit gar nicht enthalten, abgeleiteten Functionen formal so zu bearbeiten, dass sie nicht als unmittelbare Functionen der Coordinaten, sondern als Functionen der Zeit erscheinen, während welcher eine Lageveränderung vor sich geht oder überhaupt die Lage eines Punktes irgend einer Determination, sei es der Ruhe oder der Bewegung, unterliegt. Diese Beziehung auf die Zeit ist eine analytisch sehr einfache Operation und hat logisch keine Bedenken, da die Zeit unter allen Umständen die unabhängige Variable bilden kann, auf die man die Coordinaten sogar im Falle der Ruhe wenigstens formal beziehen kann.

134. In einem nicht unwesentlichen Punkt weicht der Gebrauch des ideellen Flaschenzugs in der Functionentheorie von dessen Anwendung in der Analytischen Mechanik ab. In der letzteren war es noch die vollständige, wenn auch ideelle Maschine, mit einem freien Ende des Seils, ja sogar mit einem Gewicht oder einer Kraft an diesem unbefestigten Ende. In der neuen, weit rationelleren Fassung setzt sich die ganz ideelle Vorrichtung aus festen Rollen und einem Faden zusammen, der ohne die Hülfe beweglicher Rollen um die zu bewegenden Körper selbst mehrmals herumgeführt und schliesslich an dem letzten Körper mit dem sonst freien Ende auch befestigt wird. Auf diese Weise sind thatsächlich noch gar keine Kräfte an den Körpern thätig, sondern es sind nur die Verhältnisse und Richtungen dargestellt, auf welche sich die etwa an den Körpern angreifenden Kräfte reduciren müssen. Stellt man sich aber vor, dass irgend ein Körper einen Zug ausübe, so pflanzt sich die Spannung auf alle übrigen fort und die Verhältnisse der gegenseitigen Actionen sind sofort bestimmt, sobald man noch hinzufügt, dass Gleichgewicht bestehen solle. In diesem Fall muss nämlich der Zug, der in dem Faden in dem einen Sinne statthat, dem Zug in dem andern Sinne völlig gleich sein, so dass kein Bewegungsüberschuss in der einen Richtung hervorgebracht wird. Damit also nicht nur die Länge des Fadens überhaupt constant bleibe, was auch bei einer einseitigen Bewegung stattfinden könnte, sondern damit die angestrebten Ver-

änderungen dieser Länge in entgegengesetztem Sinne sich nach Maassgabe der Bedingungsgleichungen gegeneinander compensiren, ist es erforderlich, dass der unbestimmte Spannungsfactor, den man voraussetzt, sich bei jedem Körper derartig vervielfältige, dass die virtuelle Verkürzung oder Verlängerung mit diesem Factor ein Product ergebe, welches, mit Seinesgleichen summirt, das Resultat Null liefert. Hienach wird man die Rolle des unbestimmten Kraftfactors in diesen virtuellen Momenten klar übersehen. Erst wenn man ein System von Kräften an den Körpern angebracht denkt, bestimmt sich die Spannung des Fadens und das Absolute an der gegenseitigen Action. Bis dahin war es nur das Relative, was durch die Fadenvorrichtung, die den Bedingungsgleichungen äquivalent ist, ausgedrückt wurde. Analytisch wichtig ist nun der schon in der vorigen Nummer erörterte Punkt, dass die partiellen Differentialquotienten oder Ableitungen, die man aus den Bedingungsgleichungen bestimmt, die Proportionen vorstellen, in denen die Körper vermöge der blossen Systemverfassung aufeinander wirken.

Ein weiterer Vorzug der neuen Gestalt des Beweises besteht in dem stufenweisen Vorschreiten desselben. Zuerst ist es ein einfacher Faden, der über eine feste Rolle hinweg zwei Körper miteinander verbindet; dann wird dieselbe Veranstaltung durch zwei feste Rollen hervorgebracht, um weiterhin die verschiedenen Umschlingungen der Körper und Rollen durch den Faden vornehmen zu können. Die Bedingungsgleichungen halten mit diesen Vorkehrungen Schritt und werden jedesmal durch eine äquivalente einfache Form, die von Lagrange als tangirende Gleichung nach Analogie der geometrischen Berührungen bezeichnet wird[1]), derartig ersetzt gedacht, dass man sieht, wie in der That die Verhältnisse der abgeleiteten Functionen die gegenseitigen Nothwendigkeiten der Lage ausdrücken und in der Fadenvorrichtung wirklich ein allgemein veranschaulichendes Gegenbild erhalten.

Dies sind die grossen Vorzüge der neuen Beweisvariante; aber es ist noch einer hervorzuheben nöthig, der auf den ersten Blick sogar als ein Fehler erscheinen könnte. Das citirte fünfte Capitel beruht nämlich mit seinen Entwicklungen auf den drei ersten und stützt sich auf die dort dargelegten Reductionen der Räume, Geschwindigkeiten und Kräfte auf die Coordinatenrichtungen.

---

[1]) Ibid. Art. 28.

Es ist also hier ganz unverkennbar, dass die Zerlegung der Kräfte die Voraussetzung der Entwicklung des virtuellen Princips bildet. Das letztere tritt in der Functionentheorie als der Endpunkt einer Entwicklungsreihe hervor, innerhalb deren alle elementaren Beziehungen, die für die Bewegung eines als Punkt betrachteten Körpers gelten, bereits abgethan sind. Was im sechsten und siebenten Capitel noch zur Erledigung der mechanischen Functionentheorie folgt, enthält jene principiellen Hauptsätze (Bewegung des Schwerpunkts, Flächenprincip, Erhaltung der lebendigen Kräfte u. s. w.), die von Lagrange durch analytische Bearbeitung der Formel des virtuellen Princips gewonnen werden. Vergleicht man diese Systematik mit derjenigen der Analytischen Mechanik, so unterscheidet sie sich von der letzteren nur dadurch, dass sie in alledem, was dem virtuellen Princip vorangeht, einen elementaren Unterbau mehr enthält, in welchem die eigentlichen Axiome der Mechanik hervortreten, und in welchem auch das Zerlegungsprincip der Kräfte seine Stelle[1]) hat.

Freilich wird dieses Zerlegungsprincip oder, was dasselbe ist, das allgemeine Zusammensetzungsprincip der Kräfte von Lagrange in dem angeführten Zusammenhang ausdrücklich als mit der Zusammensetzung der Räume zusammenfallend angesehen. Er behauptet[2]) sogar, dass alle Beweise, die man von der Zusammensetzung der Kräfte gegeben habe, nur eine Verkleidung der Zusammensetzung der Räume (la composition des espaces déguisée) gewesen wären, allenfalls mit der einzigen Ausnahme derjenigen, die man auf das Gleichgewicht des graden Hebels gegründet hätte. Diese Auffassungsart verstärkt aber nur um so mehr die systematische Consequenz; denn gleichviel ob in Wirklichkeit das Zusammensetzungsprincip principiell richtig erläutert ist, so soll es doch wenigstens aus der Zusammensetzung der blossen Bewegungsräume an der fraglichen Stelle bereits gefolgert sein und dient daher um so offenkundiger als Ausgangs- und Stützpunkt für alles Weitere und darunter auch für das virtuelle Princip. Die Fadenvorrichtung hat also nicht mehr die Aufgabe, die Kräftezerlegungen nach verschiedenen Richtungen zu rechtfertigen, sondern sie dient nur dazu, die Systemverfassung ganz im Allgemeinen, d. h. Alles zu veranschaulichen, was in den Beziehungen

---

[1]) Ibid. 3. Abth. Cap. 2, Art. 8 und 9.

[2]) Ibid. Endworte von Art. 9.

der Körper durch irgend welche Verbindungen und Abhängigkeiten derselben vorgeschrieben sein kann.

Schliesslich sei bei dieser Gelegenheit noch darauf hingewiesen, dass in einem gewissen sehr einfachen Sinn der Flaschenzug ein Princip der Zusammensetzung der Kräfte auf einer und derselben Linie vermittelst der Coordination der Spannungen vorstellt. Ausserdem ist er ein Mittel, die volle Kraft in eine andere Richtung zu übertragen, und endlich veranschaulicht er, wenn man ihn in Bewegung setzt, auf die unmittelbarste Weise die Arbeit einer Kraft und das Gesetz der Aequivalenz der beiden Factoren der Arbeit. Die Intensität der Kraft ist durch die Anzahl der Seile, der Weg nach Richtung der Kraft aber durch die Verkürzung oder Verlängerung ausgedrückt. Das Product aus Weg und Kraft behält seinen Werth, wenn man die Anzahl der Seile in demselben Verhältniss vermindert oder vermehrt, in welchem man die Längenveränderung der Gruppe grösser oder geringer macht.

135. Zur Kennzeichnung der historischen Bedeutung, zu welcher das virtuelle Princip in der Epoche Lagranges gelangte, sind einige besondere Thatsachen zu berücksichtigen. Nachdem Lagrange in der Analytischen Mechanik (1788) jenes Princip zum Systemfundament und zum allgemeinen Grundtypus aller Differentialgleichungen der Mechanik gemacht hatte, blieben weder Monographien noch eigenthümliche Reflexionen über den wieder in den Vordergrund getretenen Satz und über dessen neue Consequenzen aus. Eine besondere, ziemlich umfangreiche Schrift von Fossombroni, welche ausschliesslich das virtuelle Princip behandelte [1]), gab sogar Lagrange selbst Veranlassung, sich in einem Briefe an den Verfasser [2]) über ein Ergebniss dieser Specialuntersuchung und über die allgemeinen Principien der Mechanik sehr bezeichnend zu äussern. Lagrange schreibt: „Wenn es noch etwas in der Mechanik zu wünschen giebt, so ist es die Annäherung und Vereinigung der Principien, die ihr zur Grundlage dienen, und vielleicht sogar der strenge und directe Beweis dieser Principien." Dann bemerkt er, Fossombroni habe gefunden, dass es Fälle giebt, in denen die virtuelle Gleichung für endliche Differenzen gilt, und dies seien diejenigen, in denen etwas Mitt-

---

[1]) Fossombroni, Memoria sul principio delle velocità virtuali, Firenze 1796.

[2]) Vom 31. Mai 1797; angeführt in der neusten Ausg. der Werke Galileis, Bd. XIII (1855) Vorrede Seite XXIV.

leres zwischen dem stabilen Gleichgewicht und demjenigen statthabe, in welchem die Störung ein Bestreben der weiteren Entfernung vom Gleichgewicht erzeugt. In diesem Fall, der das heute gewöhnlich als indifferent bezeichnete Gleichgewicht betrifft, muss man sich, wie wir hinzusetzen müssen, die Störung nur als eine geometrische Lageverschiebung, nicht aber als Wirkung einer wenn auch unbegrenzt kleinen Störungskraft denken. Die Hebellinie ist hier ein gutes Beispiel, da bei der Unterstützung des genauen Schwerpunkts auch eine beliebige endliche Drehung den Gleichgewichtszustand nicht ändert. Die universelle Behandlung der drei Arten des Gleichgewichts geht uns jedoch hier nicht näher an, und Lagrange hat in der Analytischen Mechanik alle Hülfsmittel des Calcüls aufbieten müssen, um die beiden Seiten des Gegensatzes unter bestimmte Merkmale zu bringen und namentlich die Minima und Maxima der lebendigen Kraft als die auszeichnenden Charaktere von Stabilität und Labilität nachzuweisen.

Was die allgemeine Bemerkung Lagranges über den Zustand der Principien der Mechanik betrifft, so kann dieses Geständniss um so mehr zur Erläuterung der eignen Systematik des Autors dienen, als seine Analytische Mechanik ja schon beinahe ein Jahrzehnt lang vorhanden war. Lagrange arbeitete, wie die zweite Ausgabe am Ende seines Lebens zeigt und wie die erste und zweite Ausgabe der Functionentheorie lehren, immer wieder von Neuem an einer grösseren Vertiefung und strengeren Sichtung der principiellen Fundamente. Um so weniger dürfen daher die Anregungen überraschen, die andere Denker unter dem Einfluss seiner Schriften erfuhren. Zu den letzteren gehört besonders der ältere Carnot, der in seiner, von uns schon öfter angeführten Schrift über die Grundprincipien der Mechanik[1]) auch das virtuelle Princip, welches er im Anschluss an die Vorstellungsart von Lagrange kurzweg das Galileische Princip nennt[2]), mit einer eigenthümlichen Reflexion zu bereichern sucht.

Carnot legt nämlich grosses Gewicht darauf, dass man die virtuellen Verschiebungen regelmässig als rein geometrische Vorgänge denke, denen keine Kraftrealität entspricht, und für die also eine erzeugende Störungskraft nicht vorauszusetzen sei. Ja

---

[1]) Principes fondamentaux de l'équilibre et du mouvement. Paris 1803.
[2]) Ibid. Art. 121, S. 93.

er behauptet ausdrücklich[1]), das Gleichgewicht werde durch die geringste Kraft in eine blos geometrische Bewegung verwandelt; es sei aber eine endliche Kraft nöthig, um eine andere Art der Störung hervorzubringen. Geometrisch werden nämlich von ihm alle Bewegungen genannt, welche die gegenseitigen Verhältnisse der Körper nicht ändern, sondern nur eine gleichgültige, nicht auf gegenseitiger Einwirkung beruhende Positionsveränderung ohne dynamischen Effect repräsentiren. Klar ist nun aber an dieser Idee der rein geometrischen Verschiebung nichts weiter als die Absicht, dem gewöhnlichen Verfahren gemäss die Verschiebungen als solche als etwas Willkürliches und Unmotivirtes einzuführen, um für die Ursachen derselben keine besondere Rechenschaft und Veranschlagung nöthig zu haben. Offenbar muss auch die geringste Kraft, wenn sie überhaupt vorausgesetzt wird, dem strengen Gleichgewichtszustande gegenüber eine dynamische Veränderung hervorbringen. Am wenigsten lässt sich die entgegenstehende Vorstellung bei Carnot rechtfertigen, der, wie eine eigne verdienstvolle Schrift desselben[2]) zeigt, zur Klärung der infinitesimalen Begriffe neben Lagrange wohl das Erheblichste beigetragen hat. Zur dauernden Aufhebung des stabilen Gleichgewichts gehört allerdings nicht blos eine endliche, sondern auch eine jenseits einer gewissen Quantitätsgrenze liegende Kraft; aber die auf blosse Oscillationen beschränkte Störung wird auch in diesem Fall durch die allergeringste Kraft bewirkt. Im strengen Raisonnement muss auch die unbegrenzt kleine, in das genaue Gleichgewicht eingreifende Kraft mit einer Wirkung vorgestellt werden, die sich nur der Grösse, aber nicht der Art nach von der einer bestimmten Kraft unterscheidet. Die Möglichkeit der unbegrenzten Verkleinerung reducirt alle Wirkungen auf die elementare Form, macht dieselben aber nicht zu rein geometrischen Gebilden ohne mechanische Bedeutung für die Verhältnisse der gegebenen Kräfte.

136. Das Einzige, wodurch Carnots Vorstellung einen gewissen Sinn erhalten kann, ist die Ueberlegung, dass für die unbegrenzt kleinen Verschiebungen die Kräftewirkungen nur um Grössen zweiter Ordnung gegeneinander verändert werden, und dass diese Veränderungen mithin nach den Grundsätzen des Calcüls bei der

---

[1]) Ibid. Art. 159, S. 129.

[2]) Die Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal, zuerst 1797, 2. Aufl. 1813, 4. Aufl. Paris 1860.

Aufstellung der Gleichung ausser Ansatz bleiben können. Aber schon die modernere Form der Auffassung der virtuellen Gleichung als einer Relation zwischen den virtuellen Arbeiten der gegebenen Kräfte zeigt deutlich genug, dass man nicht umhin kann, die Störung als dynamischen Effect zu denken.

Dennoch hat Carnot das Verdienst, durch seine Hinweisung auf den Begriff der rein geometrischen Verschiebung darauf aufmerksam gemacht zu haben, dass die gewöhnliche Conceptionsart der elementaren Positionsveränderungen in der Systemgruppe etwas gleichsam von Aussen Hinzugedachtes einführt, ohne nach dem mechanischen Effect dieser Störung zu fragen. Es ist hiemit also unabsichtlich der Punkt bezeichnet, der eigentlich die Schuld trägt, dass die Vorstellungen von der eventuellen Kräftewirkung nicht vollständig befriedigen. Sobald das virtuelle Princip auch auf bewegte Systeme übertragen wird, kann man vollends nicht mehr umhin, die möglichen Verschiebungen als eventuelle Kräftewirkungen zu denken, die sich nach den gewöhnlichen Gesetzen bestimmen und mithin auch secundäre Grössenelemente zweiter Ordnung ins Spiel bringen. Die virtuelle Gleichung hat im Allgemeinen den Charakter aller Differentialgleichungen, d. h. sie ist von abgekürzter Form, oder sie repräsentirt, um mit Carnot zu reden, eine unendlich kleine Ungleichheit. Natürlich ist diese Ungleichheit bei Gleichungen zwischen eigentlichen und unmittelbaren Differentialien mindestens von der zweiten Ordnung, und wenn daher die Summe unbegrenzt kleiner Grössen gleich Null gesetzt wird, so darf man sich, um die Abkürzung wieder hergestellt zu denken, nur vorstellen, dass an Stelle der Null eine unbestimmte, unendlich kleine Grösse der zweiten Ordnung stehe. Diese ideelle Correctur ist für das strenge Denken durchaus nothwendig, und grade im Geiste der zuletzt angeführten Carnotschen Schrift, welche den lichtvollen Begriff der unvollkommenen Gleichungen (équations imparfaites) aufstellt, müsste man sogar mit der virtuellen Gleichung auch den Flaschenzugbeweis von Lagrange dahin erläutern, dass allerdings eine unendlich kleine Gesammtveränderung der Fadenlänge zwischen den Punkten des Systems, aber nur eine solche von zweiter Ordnung vorausgesetzt werden könne. Wo der Faden am zweiten Ende nicht frei, sondern befestigt ist, wird die entsprechende Vorstellung schwieriger; aber auch hier muss man im Allgemeinen als Folge der Verschiebung Grössenveränderungen zweiter Ordnung annehmen, die da, wo sie

die Fadenlänge nicht zu afficiren vermögen, irgend eine unerhebliche Veränderung in der Spannung bewirken. Natürlich giebt es besondere Fälle, in denen mit oder ohne Rücksicht auf die Grössen einer weiteren Ordnung die strengste Gleichheit statthat, und in denen daher die Fadenlänge nicht im Mindesten afficirt wird. Im Hinblick auf diese Fälle mag man sich der Bemerkung von Lagrange über das Resultat Fossombronis erinnern. Wenn man nämlich an Stelle der Differentialien beliebige Differenzen setzen kann, so dass für eine bestimmte Grösse derselben die virtuelle Gleichung genau, d. h. ohne Abkürzung gilt, so ist hiemit ausgedrückt, dass die verändernde Verschiebung einen Zustand herbeiführt, in welchem wiederum das strengste Gleichgewicht besteht. Dieser Sachverhalt schliesst jedoch nicht aus, dass man auch in diesem Fall von der zusätzlichen Störungskraft abstrahiren müsse.

Was den Mangel der Carnotschen Auffassungsart anbetrifft, so erklärt sich derselbe einigermaassen, wenn man bedenkt, dass der fragliche Autor trotz seiner vorzüglichen Aufschlüsse über die Gesetze der Operation mit unvollkommenen Gleichungen es dennoch offenlassen konnte, ob man sich mit Euler die Differentialien als strenge Nullen denken wolle oder nicht. Thatsächlich geschieht nur das Letztere, indem man ja sogar diese Grössen construirt, die Zeitelemente oder überhaupt die unabhängigen Elemente constant macht u. dgl. Der ganze Vortheil und die Klarheit der differentiellen Vorstellungen würde verloren gehen, wenn man sie nicht als Differenzen dächte, die unter Voraussetzung uneingeschränkter Verkleinerung ihre Rolle spielen. Sie unterscheiden sich von den endlichen Differenzen nur dadurch, dass Alles, was über sie und ihre Beziehungen aufgestellt wird, nur Gültigkeit haben soll, wenn es auf den Fall der unbeschränkten Verkleinerung bezogen wird und wenn man also voraussetzen darf, es könne über jeden angenommenen Grad der Kleinheit immer noch hinausgegangen werden. Selbstverständlich fixirt man irgend einen Grad dieser Kleinheit, indem man z. B. das Zeitelement oder überhaupt das Element einer unabhängigen Veränderlichen constant setzt. Jede solche Voraussetzung ist aber willkürlich, und nur die Nothwendigkeit, dass man sie in irgend einer Weise mache, ist nicht vom Belieben abhängig. In der Dynamik sind alle infinitesimalen Grössenvorstellungen vom Zeitelement (dt) abhängig. Dieses Element selbst muss aber in jedem bestimmten Gedanken als ein Zeittheilchen von einer gewissen Grösse gedacht

werden. Es muss ausserdem die Eigenschaft haben, dass die Wahl dieser Grösse gegen Null hin unbeschränkt sei. Hat man aber einmal für eine Reihe von Operationen eine Grösse fixirt, so darf man dieselbe in dem betreffenden Zusammenhang nicht wieder verlassen. Man kann sie durchgängig durch die Voraussetzung eines andern Grades von Kleinheit ersetzen; aber man wird eine solche Voraussetzung nie blos theilweise für ein Stück des Zusammenhangs ändern dürfen.

Aller dieser Erläuterungen über die blossen Annäherungsgleichungen, die, wenn auch eine unbegrenzte Approximation, so doch immer die approximative Form vertreten, kann man sich entschlagen, sobald man sich mit Lagrange entschliesst, die virtuelle Gleichung auf ungemischte endliche Ausdrücke zu reduciren, in denen nichts Infinitesimales mehr enthalten ist. Alsdann werden die Verschiebungen zu provisorischen Hülfsvorstellungen, deren man sich in dem Resultat vollständig entäussert, so dass also auch in dem entsprechenden realen Ausdruck des virtuellen Princips in Begriffen und Worten eigentlich nicht die geringste Spur des Gedankens einer unendlichkleinen Positionsveränderung bestehen bleiben sollte. Diese letztere Forderung ist jedoch weniger erfüllt worden, als die rein analytische Ausmerzung der nebensächlichen Hülfsgrössen. Um Lagranges Auffassungsart und deren nicht hoch genug anzuschlagende Verdienste um die Strenge des Raisonnements zu verstehen, müssen wir uns auf ein paar Gesichtspunkte der strengen analytischen Methode näher einlassen.

137. Die Geschwindigkeit wird von Lagrange in der Functionentheorie streng punktuell gefasst und entspricht mithin einem Zeitpunkt, der selbst keine Dauer hat, sondern als streng markirende Abscheidung der folgenden von der vorangegangenen Zeit fungirt. Diese Art, den Begriff der Geschwindigkeit vorzustellen, steht im Gegensatz zu derjenigen, bei welcher die Geschwindigkeit ohne weitere Unterscheidung auf das Zeitelement von einer unbeschränktkleinen Dauer bezogen wird und mithin der Quotient ist, welcher der Division des zugehörigen Raumelements durch das Zeitelement entspricht. Indem man mehrere Zeitelemente betrachtet und die Veränderung der Zeit ausdrückt, wird man das Zeitelement selbst als unveränderlich setzen müssen, d. h. man wird es constant zu machen haben. Unter Voraussetzung eines solchen beliebig gegen Null verkleinerbaren, aber sich

beständig gleichen Zeitelements wird man nun, wenn man die Geschwindigkeit für ein solches bestimmt, darunter jedesmal den zugehörigen durchlaufenen Elementarraum in Vergleichung mit der Grösse des Zeitelements verstehen. Man wird nicht in den Fall kommen, für die Bestimmung der Geschwindigkeit zu unterscheiden, ob dieser Elementarraum in streng gleichförmiger Bewegung durchlaufen werde oder nicht. Im Gegentheil wird der regelmässige Fall der sein, dass sich zu der gleichförmigen Bewegung noch ein abänderndes Element zweiter Ordnung hinzugesellt und mit derselben gemischt findet. Das Raumelement dx wird nämlich nur dann streng gleichmässig durchlaufen, wenn es selbst constant d. h. der Zeit proportional ist. Wie dann die verschiedenen Raumelemente einander gleichen, so ist in diesem besondern Fall auch innerhalb der Ausdehnung des Raumelements völlige Gleichmässigkeit und Proportionalität mit den zugehörigen Unterabschnittchen des Zeitelements vorhanden, und der Ausdruck der Geschwindigkeit gilt ohne jede Abkürzung nicht blos für die Dauer des Zeitelements, sondern auch für dessen strengen punktuellen Anfang. In allen andern Fällen ist der Differentialquotient, durch welchen die Geschwindigkeit ausgedrückt wird, eben nur der einheitliche Ausdruck für das Verhältniss des Zeitelements zum Raumelement, und es ist in diesem Verhältniss ausser dem wesentlichen endlichen Bestandtheil noch ein infinitesimaler Rest enthalten. Diesen Rest, mit welchem man im eigentlichen Differentialcalcül mitoperiren muss, hat nun Lagrange in der Functionentheorie entfernt, während er ihn in der Analytischen Mechanik im Sinne der herkömmlichen Vorstellungen und der dort adoptirten Methode des Unendlichkleinen bestehen liess. Der Augenblick oder Zeitpunkt, für den auf die zweite unvollkommenere Art die Geschwindigkeit gedacht wird, ist der Begriff einer kleinen Dauer, deren Anfang, Ende und Mitte so zu sagen in Eins zusammenfliessen, so dass die in ihr möglichen Mannichfaltigkeiten grundsätzlich ununterschieden bleiben sollen. Die differentielle Vorstellung der Geschwindigkeit wird jedoch völlig rationell, sobald man sich nur bewusst wird, dass man an derselben einen Begriff hat, innerhalb dessen eine Beimischung von Veränderung zu denken ist.

Wie bequem nun aber auch die differentielle Notation sein möge, so darf sie doch nicht hindern, dass die Behandlung der Mechanik den Begriffen der antiken Mathematik Rechnung trage.

Es darf nicht zwei Begriffe vom geometrischen Punkte geben, und wenn man von der einem Punkte entsprechenden Geschwindigkeit redet, so ist man, auch ganz abgesehen von der Begriffsfassung des Zeitpunkts, schon durch die Strenge der Geometrie gezwungen, einen ebenso bestimmten Begriff der Geschwindigkeit aufzustellen. Im Gefühl dieser Nothwendigkeit hat Lagrange in seiner Functionentheorie und in seinen Vorlesungen über den Functionencalcül[1]) die abgeleiteten Functionen (fonctions dérivées) an die Stelle der Differentialquotienten der verschiedenen Ordnungen gesetzt oder, mit andern Worten, er hat reine Differentialcoefficienten ohne infinitesimale Beimischung durch eine neue Notation von den gewöhnlichen Differentialquotienten unterscheidbar gemacht. Die Entwicklungsart dieser Functionen bei Lagrange aus einer Fundamentalreihe, die zwar mit der Taylorschen Reihe zusammenfällt, aber nicht aus dem Differentialcalcül abgeleitet wird, geht uns hier nicht näher an. Doch sei im Allgemeinen bemerkt, dass die Entwicklung einer Function nach den ganzen und positiven Potenzen des Zuwachses ihrer unabhängigen Variablen das überall entscheidende Mittel ist, die modernen geometrischen und mechanischen Begriffe auf das Maass der antiken Strenge zurückzuführen. Lagrange will ebensowenig die Tangente an einem Punkt zur Gemeinschaft mit einem Curvenelement, als die Geschwindigkeit in einem Punkt zu einem schwankenden Begriff werden lassen, in welchem verschiedene, von einander abweichende Bewegungen dennoch eine Gemeinschaft haben können. So streng als der Begriff der alten Mathematiker von der geometrischen Berührung soll auch derjenige von der mechanischen Geschwindigkeit sein. Diese Forderung ist um so natürlicher und zwingender, als der Begriff der Geschwindigkeit ja noch im phoronomischen Gebiet liegt und mithin, wie die reine Mathematik, dem ausschliesslich ideellen Denken angehört.

Nach dieser strengen Fassung wird die Geschwindigkeit eine bestimmte, mit keinem unendlichen Element gemischte Quantität und entspricht dem mathematischen d. h. ausdehnungslosen Raumpunkt ebenso exact, als es in seiner Art der antike Begriff einer Tangente thut. Auch hat die Entwicklung bei Lagrange in beiden Fällen der Begriffsfassung etwas Analoges. Er bestimmt nämlich[2])

---

[1]) Leçons sur le calcul des fonctions, 2. Aufl. 1806.

[2]) Théorie des fonctions anal. (1813) dritte Abth. Cap. 1, besonders Art. 4. Auch Calcul des fonctions, 9. Vorlesung am Ende, S. 109.

an Stelle der Geschwindigkeit für den Punkt eine gleichförmige Bewegung, welche die gegebene noch so veränderliche Bewegung gleichsam zeitlich tangirt, indem für beide in einem einzigen Zeitpunkt ein gemeinschaftlicher Ort des beweglichen Punktes vorhanden ist, übrigens aber jeder gleichzeitige Ort in der gleichförmigen Bewegung dem entsprechenden Ort in der veränderlichen Bewegung so nahe liegt, dass keine zweite gleichförmige Bewegung gedacht werden kann, die sich näher an den Gang der veränderlichen anschlösse. Mit derselben Wendung, mit welcher die grade Tangente als Richtung der Curve in dem Berührungspunkt aufgefasst wird, kann nun auch die tangirende gleichförmige Bewegung der bezeichneten Art als Geschwindigkeit der gegebenen veränderlichen Bewegung angesehen, d. h. eben mit diesem Ausdruck kenntlich gemacht und unter andern Begriffen ähnlicher Art hervorgehoben werden. Hienach bestimmt die Geschwindigkeit in einem Punkte unter Voraussetzung einer veränderlichen Bewegung nicht ausschliesslich die wirklich erfolgende Bewegung, sondern nur diejenige, welche erfolgen würde, wenn in dem Gesetz der gegebenen Bewegung alle abändernden Ursachen plötzlich gestrichen würden. Die wirkliche Bewegung kommt aber dieser hypothetischen für ein unbeschränkt kleines Element auch unbegrenzt nahe, so dass Alles, was an derselben als gleichförmig abgesondert werden kann, in dem entsprechenden Element der gleichförmigen Bewegung seinen exacten Ausdruck findet. Man kann also die elementare noch so gleichförmige Bewegung, wie jedes veränderliche Differential, als eine Summe denken, die sich aus zwei Bewegungen zusammensetzt und zweierlei Grössenerzeugungen entspricht. Die eine Bewegung ist alsdann gleichförmig, und der andere Bestandtheil repräsentirt den verändernden Zusatz oder Abzug. Diese letztere Hinzufügung ist aber im Element immer von zweiter Ordnung, d. h. sie verringert sich mit der unbeschränkten Verkleinerung des Elements im Vergleich mit dem letzteren selbst ins Unbegrenzte, so dass sie gegen dasselbe verhältnissmässig so klein wird, wie eine unbegrenzt kleine Grösse gegen eine endliche. Hieraus ist denn auch klar, dass man mit derselben unbegrenzten Approximation, mit welcher man das Curvenelement als Richtung der Curve nimmt, auch das Bewegungselement als Geschwindigkeit der Bewegung nehmen kann. Das Curvenelement weicht unbegrenzt wenig von der graden Linie ab, die man zwischen seinen zwei Endpunkten

ziehen kann; ebenso weicht das Bewegungselement unbegrenzt wenig von derjenigen gleichförmigen Bewegung ab, die man zwischen den zwei zeitlichen Endpunkten dieses Elements ausgeführt denken kann. Noch zutreffender und dem Geiste der strengen Analogie entsprechender wird die Vorstellungsart, wenn man auch in der Geometrie das Curvenelement nicht mit der Sehne, sondern mit dem zugehörigen Tangentenelement vergleicht, und in der Mechanik nicht die mittlere Geschwindigkeit zwischen den zwei zeitlichen Endpunkten des Elements, sondern die gleichsam tangirende gleichförmige Elementarbewegung zum Vergleichungsgegenstand nimmt. Freilich kann man von einer Zugehörigkeit des Tangentenelements in der Geometrie nur reden, wenn man Curve und Tangente als durch eine correspondirende Bewegung construirt denkt und mithin die Geometrie phoronomisch näher bestimmt. Alsdann ist aber auch die Analogie ganz streng, und es giebt in der Mechanik dann ein Element der gleichförmigen Bewegungstangente zu berücksichtigen, von welchem das wirkliche Bewegungselement nach Raumgrösse und Bewegungsform nur unbegrenzt wenig abweicht.

In die Gestalt der vorangehenden Darlegungen mussten wir die Idee Lagranges kleiden, um das Bestreben des für die strengere Fassung der Begriffe der modernen Mathematik und Mechanik gewissermaassen classischen Autors ohne besondern Calcül und unter Anlehnung an die gewöhnlichsten Vorstellungen der Differentialtradition sichtbar zu machen.

138. Das entscheidende Beweismittel ist, wie schon gesagt, bei Lagrange die allgemeine Entwicklungsreihe einer Function nach den ganzen und positiven Potenzen des Zuwachses der Veränderlichen. Er geht hiebei von einer beliebigen Gleichung der Bewegung aus und verwandelt den Ausdruck des Raumes durch die Zeit in eine Reihe nach den Potenzen des Zeitelements, welches unbeschränkt klein muss gedacht werden können, damit jedes Glied für sich allein mit unbeschränkter Approximation auch zugleich den Werth aller folgenden Glieder vertrete. Unter dieser Voraussetzung ist der bekannte Ausdruck für den Rest der Reihe, den Lagrange einführte und der vor Cauchys Restformel die vollkommenste Form lieferte, offenbar eine formale Ueberflüssigkeit, die nur dann Bedeutung haben würde, wenn es sich um einen Zuwachs handelte, der nicht unbeschränkt verkleinert werden dürfte. Sind die Bedingungen des Falles aber der

Art, dass man den Zuwachs unbegrenzt verkleinern darf, was für jede stetige Grössenveränderung zulässig ist, so stellen die steigenden Potenzen des Zuwachses, die sich mit den abgeleiteten Functionen multiplicirt finden, die verschiedenen Grössenordnungen dar. Hiemit fand sich der falsche Begriff von einem Etwas ausgemerzt, welches unter dem herkömmlichen Namen des Unendlichkleinen eine Art Vorwegnahme aller Verkleinerungen durch die Idee einer jenseits aller Verkleinerung liegenden Grösse, über welche hinaus keine kleinere mehr gedacht werden könne, vorstellen sollte. Unzureichend waren die Bemühungen Lagranges aber insofern, als sie für das eigentlich differentielle Verfahren keine unmittelbare Rechtfertigung lieferten. Auch Carnot bewegte sich noch sehr unsicher, und sein Begriff der unvollkommenen Gleichungen ist schliesslich für die Hauptsache nur ein unbestimmter und ebenfalls unzureichender Umweg. Der denkbar einfachsten und zugleich unmittelbarsten Weise, einen Begriff des Unbeschränktkleinen an Stelle des herkömmlich absurden Unendlichkleinen zu Grunde zu legen und als durchführbar zu kennzeichnen, glaube ich schon in meinen ersten Arbeiten, nämlich in meiner lateinischen Abhandlung über Raum, Zeit und Causalität sowie über die Logik der Infinitesimalanalysis (Berlin 1861) und in meiner Natürlichen Dialektik (Berlin 1865, besonders Theil II, Abschn. I, Cap. 3) entsprochen zu haben. Hier sei nur noch bemerkt, wie das Differential nie etwas Anderes sein kann, als eine Differenz mit der Eigenschaft, unbeschränkter Verkleinerung fähig zu sein und im Hinblick auf die Möglichkeit dieser schrankenlosen Kleinsetzung betrachtet zu werden. Ist es unabhängig oder nur linear abhängig, so kann es auch constant sein, und man kann es daher nicht, wie neuerdings einzelne französische Mathematiker gethan haben, als eine Veränderliche definiren. Die überlieferte Notation bildet hienach kein Hinderniss für die logische Rationalisirung des Gebiets. Wohl aber ist es erforderlich, die abgeleiteten Functionen, welche die elementaren Bestandtheile nicht mehr enthalten und den rein punktuellen geometrischen oder mechanischen Eigenschaften entsprechen, von den Differentialquotienten zu unterscheiden, die stets noch elementare, d. h. unbeschränktkleine Grössenbestandtheile enthalten, und hiezu ist die Bezeichnungsart von Lagrange ein sehr brauchbares Mittel. Man könnte ausserdem noch die abhängigen und mithin auch Grössenelemente einer secundären Ordnung mitenthaltenden Differentiale von dieser

Beimischung befreien und gleichsam abkürzen. Dann würden die Weglassungen in den Differentialgleichungen einander entsprechen und die Gleichungen streng auf Null gebracht werden, anstatt dass man sich sonst an Stelle der Null eine unbeschränktkleine Grösse von secundärer Ordnung zu denken hat. Es sind also nur die hinkenden Abkürzungen, welche statt zu strengen, blos zu unbeschränkt approximativen Gleichungen führen. Auch haben in der That die Producte, welche aus der abgeleiteten Function und dem unabhängigen, constant gesetzten Differential bestehen, an sich und in den Anwendungen eine besondere Bedeutung, die man von derjenigen der unverkürzten und daher noch mit secundären Grössenelementen gemischten Differentiale unterscheiden muss. Beispielsweise wird eine Differentialgleichung in dieser nicht hinkenden, sondern auf beiden Seiten abgekürzten Gestalt auf die strenge Tangente und zwar auf dasjenige Stück bezogen werden können, welches den Zuwachselementen der Abscisse und Ordinate entspricht, und analog würde die hypothetische Fortsetzung der Bewegung als Beharrungsbewegung während eines unbeschränktkleinen Zeittheilchens durch das Verhältniss doppelseitig abgekürzter Differentiale auszudrücken sein.

Es versteht sich, dass die Reihenmethode von Lagrange, derzufolge die abgeleiteten Functionen durch strenge Nullsetzung des Zuwachses gewonnen werden, gestattet, nicht blos den Begriff der Geschwindigkeit, sondern auch den der streng punktuellen bewegenden Kraft nebst allen geometrischen Vor- und Hülfsbegriffen im Sinne antiker Genauigkeit oder, besser gesagt, nach Maassgabe einer zutreffenden mathematischen Logik zu gestalten und analytisch ohne Zweideutigkeit auszudrücken. Dennoch hat der Verfasser der Functionentheorie in seiner 2. Auflage der Analytischen Mechanik nicht nur die Differentialnotation ohne nähere Bestimmung ihrer unsicheren Bedeutung beibehalten, sondern auch als Raisonnement so eingerichtet, als wenn der Begriff des Unendlichkleinen an sich eine gleichgültige und unschuldige Conception wäre. Thatsächlich dachte Lagrange bei den differentiellen Grössen allerdings nur elementare Incremente und verfiel daher nicht in Ausdrucksweisen, die einen offenbaren Widerspruch formuliren. Er setzte aber auch voraus, dass der eigentliche Differentialcalcül durch die Functionentheorie gerechtfertigt wäre, und kam daher, wie sich dies ja auch sonst bei dem speciellen Gebrauch der infinitesimalen Methoden öfter ereignet, nicht weiter

in die Verlegenheit, von deren Sinn unmittelbare Rechenschaft geben zu müssen. Den Begriff der Beschleunigung nebst dem der bewegenden Kraft[1]) gewinnt er hienach dadurch, dass er das Differential der bereits durch einen Quotienten von Differentialen ausgedrückten Geschwindigkeit durch das Zeitelement dividirt. Die entsprechende reale Vorstellungsart kann äusserst anschaulich sein; aber um auch zugleich streng zu werden, erforderte sie die vorgängige Untersuchung und Zerlegung der verschiedenen Bestandtheile der differentiellen Elemente und den Nachweis, wie man sich zwischen dem Anfang und Ende eines solchen Elements den Zwischenvorgang zu denken habe. Hiemit würde man aber die herkömmliche Infinitesimalmethode selbst ganz und gar verlassen und ihrer Notation einen weit bestimmteren Sinn zugesellen, als dieselbe jemals gehabt hat. So etwas ist bei Lagrange nicht geschehen, und hierin besteht der Mangel, welcher auch zugleich derjenige der Functionentheorie ist. Die Bezeichnungsart in der letzteren ist ihrer breiteren Wirksamkeit sehr hinderlich geworden und hat in ihrer Ausschliesslichkeit auf dem von Lagrange gewählten Ausweg selbst beruht, der die Differentialrechnung nicht unmittelbar und von innen, sondern nur mittelbar und von aussen, d. h. nur in ihren Ergebnissen, aber nicht in ihrer eignen Methode rechtfertigte und berichtigte.

Um zu einem einheitlichen, die Strenge mit der Bequemlichkeit und Anschaulichkeit vereinigenden System zu gelangen, würden übrigens nicht blos die rein analytischen, sondern auch die geometrischen und mechanischen Begriffe selbst zurechtzulegen und namentlich in ihrer Doppelgestaltung, je nachdem sie elementar ungemischter oder gemischter Art sind, sorgfältig zu unterscheiden sein. Lagrange hat bis zum Ende seines Lebens sich von einem Rest des Unendlichkeitsaberglaubens nicht zu befreien vermocht, so sehr er auch in dieser Richtung sich bemüht hat. Das Unendlichkleine blieb ihm bis zuletzt ausgesprochenermaassen eine mögliche Hypothese, deren man sich bedienen dürfe. Nun darf aber auch in einer Hypothese nichts Ungereimtes enthalten sein; Lagrange hatte also die Absurdität nicht vollständig erkannt, sondern nur die Unklarheit der Sache empfunden, verabscheut und in der ersten Auflage der Functionentheorie consequent umgangen. Als er sich aber in der zweiten über das Verhältniss

---

[1]) Méc. anal. Bd. I (1811) Dynamik Sect. II, Art. 3.

der abgeleiteten Function zum Differentialquotienten ausdrücklich ausliess, nämlich beide gleichsetzte, wurde der in seinem Geist conservirte Fehler sichtbar. Er vertrat nämlich in seiner Weise denselben Irrthum, dem auch d'Alembert gehuldigt hatte, indem er die strenge Grenze ausdrücklich mit dem Differentialquotienten gleichsetzte. Diese Verwechselung und Confusion war schon ein Erbstück von Newton her, der aber jedenfalls auch nicht der erste Vater dieser Nachlässigkeit und Unschärfe gewesen ist. Es gehörte auch kein Genie, sondern nur Unachtsamkeit und Ungenauigkeit des Denkens hiezu, um Derartiges zu erfinden. Mit dem Unendlichkeitsaberglauben haben erst wir, und zwar in allen Gebieten, ordentlich und vollständig aufgeräumt. Die letzten Ergebnisse dieses Aufräumens findet man in den betreffenden Capiteln unserer neuen mathematischen Grundmittel.

139. Vorausgesetzt, dass die Schwierigkeiten und Ungenauigkeiten der differentiellen Fassung der mechanischen Grundbegriffe entfernt sind, so kann die weitere principielle Frage nur noch darauf gehen, die Beschränkung derselben auf gewisse ausgezeichnete Vorstellungen gehörig zu begründen. Lagrange geht in der Functionentheorie zunächst von den blossen Bewegungserscheinungen aus und entwirft, so zu sagen aus dem willkürlich festsetzenden Gedanken heraus, die verschiedenen möglichen Bewegungsarten. Er geht hiebei von den Gattungen der analytischen Beziehungsformen aus, in denen zwei veränderliche Grössen, hier also Zeit und Raum, überhaupt stehen können. Ist die Gleichung in Beziehung auf die Zeit vom ersten Grade, so ist die Bewegung gleichförmig; ist sie eine reine quadratische, so ist sie gleichförmig veränderlich; sie ist dies auch, wenn die Gleichung überhaupt vom zweiten Grade ist, aber sie kann alsdann, sobald die Gleichung gemischt ist, in eine gleichförmige und eine gleichförmig veränderliche zerlegt werden. Geht man von diesen analytischen Festsetzungen der Bewegungsformen aus, so hat man mit der unmittelbaren Gleichung zwischen dem Raume und der Zeit den Raum durch eine Function der Zeit, d. h. durch eine gewisse analytische Form mit bestimmten Constanten ausgedrückt. Diese Form ist für dieselbe Art von Bewegung ebenfalls einunddieselbe. Das, wodurch sich verschiedene Bewegungen derselben Art unterscheiden, sind also nur die Constanten. Entfernt man aus den Bewegungsformen alle unwesentliche Zusammensetzung und Mischung, so bleiben sogar nur die unentbehrlichen, charak-

teristischen Constanten übrig. Eine solche ist bei der Gleichung ersten Grades der Factor, mit welchem sich im Ausdruck des Raumes die Zeit multiplicirt finden muss. Dieser Factor ist es allein, wodurch sich eine Ortsveränderung dieser Art von einer andern gleicher Art unterscheidet. Die zweite Constante kann nur die Lagebestimmung der Raumcoordinate betreffen, indem bei der Bewegung von vornherein ein fester Abstand vom Anfangspunkt der Coordinatenaxe in Rechnung gebracht werden muss. Jene charakteristische Constante ist es also allein, durch welche sich irgend eine gleichförmige Bewegung von einer andern gleichförmigen Bewegung unterscheidet. Man erhält dieses unterscheidende Merkmal ohne Weiteres mit der Herstellung der einfachen und geordneten Grundform der gleichförmigen Bewegung. Zeichnet man es durch irgend einen Namen aus, so kann man mit diesem neuen Begriff operiren, und es ist klar, dass man in ihn nichts weiter hineingelegt hat, als diejenige Bedeutung, die ihm die in freier Feststellung gleichsam erdachte Gleichung durch den Zusammenhang ihrer Theile zu geben vermag. Dieser Begriff ist nun derjenige, welchen man Geschwindigkeit nennt, und er ist auf diese Weise erst aus dem Gedanken heraus construirt und gleichsam geschaffen.

Verfährt man analog mit der Gleichung zweiten Grades, so zeigt sich, dass auch sie, abgesehen von der Mischung mit einer gleichförmigen Bewegung, nur eine einzige charakteristische Constante enthält, durch welche sich irgend eine gleichförmig veränderliche Bewegung von einer andern ebenfalls gleichförmig veränderlichen Bewegung einzig und allein zu unterscheiden vermag. Diese Constante muss mithin als ein neuer Begriff ausgezeichnet und benannt werden; sie ist bekanntlich das, was man Beschleunigung nennt. Ob man das Einfache oder Doppelte des Factors nimmt, mit welchem sich das Quadrat der Zeit multiplicirt findet, ist hier noch nicht wesentlich.

Gesetzt, man gehe statt von den beiden erwähnten Formen von einer ganz allgemeinen Gleichung ohne besondere Formbestimmung aus, so drückt diese Gleichung analytisch und logisch nichts weiter aus, als dass der Raum in einer beliebigen Weise von der Zeit abhängig, d. h. als irgend welche Function der Zeit gedacht werden solle, möge dieselbe algebraisch sein oder nicht. Diese Vorstellung umschliesst alle nur erdenklichen oder vielmehr zu erdichtenden Möglichkeiten. Bei dieser Voraussetzung kann

man nicht mehr unmittelbar von den zwei erwähnten charakteristischen Constanten reden; denn wenn z. B. auch die Beziehung nur vom dritten Grade wäre, so würde man den Factor der dritten Potenz der Zeit als das eigentlich Unterscheidende zu markiren und alles Uebrige nur als unwesentliche Mischung der neuen Bewegungsform mit den niedern Formen anzusehen haben. Die zweimalige Differentiation, die sonst die constante Beschleunigung liefert, würde eine im Verhältniss der Zeit veränderliche Grösse ergeben. Was nun aber diese letztere real sollte bedeuten können, lasse sich, sagt Lagrange[1]), gar nicht wissen, und hiemit motivirt er das Stehenbleiben bei den zweiten Differentiationen. Es soll uns also nur das interessiren, was an den Bewegungen in Beziehung auf die Zeit quadratisch ist oder, mit andern Worten, nur das, was an ihnen gleichförmig veränderlich ist. Hier zeigt sich nun das Ungenügende des Ausgangspunkts, und es zeigen sich auf einmal zwei Mängel zugleich. Erstens sieht man nicht ein, warum man nicht wenigstens theoretisch die Differentiationen fortsetzen solle; denn Lagranges Berufung auf die Erfahrung, derzufolge man in der Natur keine mehr als quadratisch von der Zeit abhängige Bewegung kenne, begründet wohl eine Beschränkung der Anwendungen der Theorie, aber nicht eine in sich ungerechtfertigte Abreissung der Theorie selbst. Zweitens wird auch positiv der Fall der Natur durch die einfache Beschränkung auf die quadratische Abhängigkeit des Raumes von der Zeit gar nicht gedeckt, da nicht die gleichförmig veränderliche, sondern die nach Maassgabe der Distanzen selbst veränderliche Bewegung die Fundamentalthatsache der Natur bildet. Jede functionelle Beziehung entspricht einer logischen Abhängigkeit. Nun wäre es aber sehr künstlich, die Ursache, vermöge deren der zu durchlaufende Raum selbst von einer Raumgrösse, nämlich von der Distanz (p) des Kraftcentrums vom jedesmaligen Angriffspunkt, abhängig ist, als eine Function der Zeit denken zu wollen, da zwischen dem Zeitablauf als solchen und den Veränderungen der Kraft kein unmittelbarer Zusammenhang besteht. Die Raumposition entscheidet über die Kraft, und es ist an sich gleichgültig, wie und in welcher Zeit der Körper zu dieser Position gegen das Kraftcentrum gelangt sei. Die Gleichung der Bewegung eines Punktes auf der Richtung der Kraft wird also nur dann

---

[1]) Théorie des fonctions, 2. Aufl. 3. Abth. Cap. I, Art. 2 und 4.

in genügender Allgemeinheit gedacht, wenn man den Raum nicht blos einer Function der Zeit, sondern einer Function, die ausser der Zeit auch noch den veränderlichen Abstand enthält, gleichsetzt und mithin anstatt $x = ft$ von vornherein $x = f(p, t)$ schreibt. Geht man von dieser Grundbeziehung aus, so zeigt sich bei den Differentiationen, dass die Beschleunigung im Allgemeinen variabel sei, und dass sie ein ebenso punktueller Begriff sei, wie die Geschwindigkeit. Nur für einen bestimmten Raumpunkt und also, insofern es sich nicht um Ruhe sondern um Bewegung handelt, auch nur für einen bestimmten Zeitpunkt existirt auf der Kraftrichtung eine und dieselbe Beschleunigungsgrösse. Diese punktuelle Beschleunigung oder, wenn man sie auf die Masseneinheit bezieht, diese punktuelle Kraft kann stets nur approximativ als eine in der Wirklichkeit constante Grösse gedacht werden. Ihre Constanz ergiebt sich daher auch im Calcül nur unter der Voraussetzung, dass man den Abstand p constant macht, d. h. von seiner Veränderung als von etwas, was in gewissen Fällen unerheblich ist, völlig abstrahirt. Nur so gewinnt man z. B. die constante Beschleunigung der Schwere für irgend einen Breitengrad; aber abgesehen von aller Approximation ist die Gravitationsbeschleunigung oder das Gewicht für jeden Punkt ein anderes; ja es ändert sich nicht blos unmittelbar mit jedem Raumpunkt, sondern auch mittelbar mit jedem Zeitpunkt, da die planetarischen Körper in fortwährenden, wenn auch in dieser Beziehung sehr unbeträchtlichen Lageveränderungen begriffen sind. Es wird sich später zeigen, dass für die Principien der Mechanik die Beziehung der Kräfte auf die Distanzveränderungen eine elementare Wichtigkeit hat, indem ohne diese Beziehung die sogenannte Erhaltung der Kraft nicht in ihrem vollständigen Umfang begriffen werden kann.

Was aber die oben erwähnte Abreissung der Theorie bei den Quadraten der Zeit oder des unbegrenztkleinen Zeitzuwachses betrifft, so ist es allerdings möglich, auch die Abhängigkeit von der Distanz formal als eine Function der Zeit zu denken, indem sich ja in jedem besondern Fall der Bewegung die Distanz in einer stetigen Weise mit dem durchlaufenen Raum ändert und mithin indirect zu der aufgewendeten Zeit in irgend einer Grössenrelation steht. In diesem Fall und nach dieser Auffassungsart wird die Function der Zeit für den Raum eine Reihe ergeben, in welcher auch die höheren Potenzen des Zeitelements in Frage

kommen müssen. Ueberhaupt darf es für die Phoronomie als solche keine Grenzen geben, indem jede ohne Widerspruch denkbare Bewegung in dem rein phoronomischen Gebiet als Gegenstand der Theorie zugelassen werden muss. Anders hat man sich aber zu verhalten, sobald engere, eigentlich mechanische Bedingungen den Rahmen der möglichen Begriffsgebilde abgeben.

140. Im Bereich der Principien ist der Uebergang von den blossen Bewegungserscheinungen zu der Berücksichtigung der Massen einer der wesentlichsten Schritte. Lagrange thut ihn, indem er sich auf die Erfahrung[1]) beruft. Namentlich wird der Stoss unelastischer Körper, deren Massen sich umgekehrt wie die Geschwindigkeiten verhalten, dafür in Bezug genommen, dass die Massen und Geschwindigkeiten einander proportional ersetzen. Die Wirkung einer gespannten Feder in der Bewegung von zwei ungleichen Massen, zwischen denen sie eingesetzt ist, gilt ebenfalls als Instanz. Endlich wird auch die Bewegung, die das Uebergewicht an der Atwoodschen Fallmaschine der Summe der Massen ertheilt, als Erfahrungsschema für die Vertheilung der Schwerkraft einer kleineren auf eine grössere, aber träge Masse verwerthet. Die beiden für sich im Gleichgewicht befindlichen Massen sind nämlich insofern träg, als sich in ihnen die Schwerkraft durch den Gegensatz der Richtung aufhebt. Sie bilden daher ein System, welches einschliesslich der Masse des angehängten Uebergewichts von der in dem letzteren wirksamen Kraft bewegt werden muss. Die Beschleunigung reducirt sich also im Verhältniss der Gesammtmasse zum Uebergewicht oder, was dasselbe ist, zur Differenz, welche sich durch Abzug der im Gleichgewicht befindlichen Massentheile von der Gesammtmasse ergiebt. Die Berufung auf die Beobachtung und das Experiment liefert hienach den Begriff von etwas, was man Massenbeschleunigung nennen könnte, und was gewöhnlich kurzweg Kraft heisst. Die Beschleunigung hat nur einen phoronomischen und keinen mechanischen Sinn, wenn sie nicht auf eine Masse bezogen wird. Die Krafteinheit ergiebt sich also, wenn man die Beschleunigungseinheit, d. h. irgend eine auf die Zeiteinheit bezogene Raumeinheit, mit der Masseneinheit verbindet. Da nun Lagrange es als Erfahrungsprincip ansieht, dass die Kraft im graden Verhältniss der Masse, welche von der

[1]) Théorie des fonctions; 3. Abth. Art. 14 u. 15. Vgl. auch Méc. anal. Dynamik Sect. I, Art. 4 u. 5.

Beschleunigung afficirt ist, wirksam sei, so gewinnt er hiedurch den Satz, dass der Ausdruck für die Kraft, also z. B. auch das Gewicht, durch die Masse zu dividiren sei, um die Beschleunigung zu erhalten. Genau stellt man sich aber das Verhältniss nur vor, wenn man sich ausdrücklich bewusst ist, dass man durch die fragliche Division keine blos phoronomische Beschleunigung, sondern die Beschleunigung für die Masseneinheit und mithin einen eigentlichen Kraftausdruck erhält, dem man es analytisch nur nicht immer anzusehen braucht, dass er mit dieser Einheit multiplicirt zu denken sei. Lagrange verwandelt alle seine, in der Functionentheorie gewonnenen, zunächst auf die blossen Bewegungserscheinungen bezüglichen Formeln dadurch in sichtbar mechanische Beziehungen der Massen, dass er die abstracten Ausdrücke der Kräfte, die überhaupt eine Bewegungsursache bedeuteten, mit einem Divisor versieht, der die Massen der Punkte oder Körper vorstellt, an denen sie wirken. Die Einführung dieses Divisors kann so ausgelegt werden, dass hiedurch die Kräfte, welche sonst als Beschleunigungen für gleiche Massen gedacht wurden, jetzt auf Beschleunigungen für gegebene verschiedene Massen reducirt werden. Man kann sich aber auch das Verhältniss anders vorstellen, indem man annimmt, dass die unbestimmten Ausdrücke für die Kräfte, die verschiedene Massen als unausgedrückte Factoren enthielten, durch die Division auf Beschleunigungen der Masseneinheit reducirt werden. Ganz offenbar ist es, dass man in eine Gleichung, auf deren einer Seite die Beschleunigung der Coordinate des punktuellen Körpers und auf deren anderer Seite eine Summe von Kräften steht, die Berücksichtigung der Masse nur dadurch einführen kann, dass man die Kraft durch die Masse des Körpers dividirt, oder anstatt dieses Divisors die Masse auf der andern Seite als Factor der Beschleunigung hinzusetzt. Auf diese Weise gewinnen die Gleichungen die mechanische Form, während sie sonst nur ein phoronomisches Ansehen hatten. Dies ist wenigstens die Idee Lagranges, in welcher sich jedoch eine bedenkliche Wendung verhüllt. Er setzt in einer der vorher angeführten Stellen[1]) anstatt der Ausdrücke für das, was er absolute Kräfte nennt, nämlich für P, Q u. s. w. einfach $\frac{P}{M}$, $\frac{Q}{M}$ u. s. w., ohne auf der andern Seite der Gleichung, wo der Ausdruck für

[1]) Théorie des fonctions, 3. Abth. Art. 15.

die Beschleunigung steht, irgend etwas zu verändern. Nachher bringt er den Divisor M auf die andere Seite, so dass er zum Factor der Beschleunigung wird. Dieses Verfahren ist unexact, wenn man seinen Fehler nicht stillschweigend dadurch verbessert, dass man unter P, Q u. s. w. das erste Mal andere Grössen denkt als diejenigen, welche in den Brüchen gelten sollen. Die Umformung einer Gleichung durch eine ausschliesslich auf die eine Seite derselben beschränkte Division mit M würde sich nicht rechtfertigen lassen, wenn man nicht zugleich annähme, dass auf eben dieser Seite eine entsprechende Multiplication stattfände. An Stelle der absoluten Kraft P hat man also eine vervielfachte Kraft zu denken, die durch M dividirt den ursprünglichen Werth P ergiebt. Hiemit ist denn aber auch sichtbar geworden, dass die Einführung der Massen in die Gleichungen wirklich nichts weiter bedeuten kann, als den Ausdruck der Körpermasse, die bisher als gemeinsame Einheit galt und unberücksichtigt blieb, durch eine kleinere Einheit. Auf diese Weise treten die Massen als sichtbare Factoren hervor, und wenn sie auf der einen Seite auch in den Symbolen P, Q u. dgl. nicht erscheinen, so ist hievon nur der absichtlich unbestimmte Ausdruck der Kräfte der Grund. Eine gewisse Federspannung kann kurzweg durch ein solches Symbol bezeichnet werden; sieht man aber näher zu, so muss die Ertheilung einer gewissen Beschleunigung an eine bestimmte Masse, d. h. irgend ein äquivalentes Product aus Masse und Beschleunigung als Maass der Kraft gedacht werden können. Es ist mithin nothwendig, dass die Massen auf beiden Seiten der Gleichung denkbar seien oder, mit andern Worten, dass ein Aequivalent der Masse in jeder Kraftvorstellung und in jedem mechanischen Effect irgendwie berücksichtigt werde. Eine blosse Beschleunigung wäre ein rein phoronomischer Begriff; man hat daher zu derselben in der Mechanik und in den Kraftgleichungen stets die Masseneinheit hinzuzudenken, wo etwa der Ausdruck der Beschleunigung isolirt vorkommt.

In den Gleichungen, welche von Lagrange umgeformt werden, ist die Beschleunigung des Körpers auf der Coordinate dem durch den Cosinus reducirten Kraftsymbol P oder der Summe solcher Glieder gleichgesetzt. Soll diese Gleichung nur phoronomische Bedeutung haben, so kann sie durch kein Verfahren, welches nicht erst den bewegten Körper auf beiden Seiten als Masse einführt, in eine eigentlich mechanische Gleichung umgewandelt werden. Nun kann man aber die Kraft als eine solche denken, welche

äusserlich auf den Körper und gegen dessen Trägheit wirkt, während man die Beschleunigung, die sich ergiebt, als an dem Körper haftend vorstellt. Unter dieser Voraussetzung wird eine Reduction der Glieder auf die Masseneinheit hier eine Division oder dort eine Multiplication als erforderlich erscheinen lassen, und dies ist der Gesichtspunkt, aus welchem das Verfahren Lagranges einigermaassen begreiflich wird. Man muss sich hiebei denken, dass in der Gleichung P bereits durch die Einheit dividirt vorzustellen gewesen sei. Trotz alledem bleibt aber eine Incongruenz übrig. Entweder war die Gleichung nicht echt, d. h. das Gleichheitszeichen bedeutete nicht einen äquivalenten, sondern nur einen zugehörigen Effect; oder aber die einseitige Division ist unberechtigt. Man kann sagen, dass eine Kraft an einem Körper eine gewisse Beschleunigung ergiebt und sofort folgern, dass sich diese Beschleunigung proportional der Masse vervielfältigen muss, wenn die Kraft anstatt auf den ganzen Körper nur auf die Masseneinheit wirkt; denn bei sich gleichbleibender Kraft steigen und fallen Masse und Beschleunigung gegeneinander im umgekehrten Verhältniss. Ebenso kann man sagen, dass dieselbe Beschleunigung nur den M^{ten} Theil Kraft ergebe, wenn man sich die Masse des Körpers durch die Einheit desselben ersetzt denkt. Dessenungeachtet bleibt alle Mühe vergebens, die einseitige Division oder einseitige Multiplication mit der Masse zu rechtfertigen. Es dürfte daher durch diese Ueberlegungen wenigstens soviel festgestellt sein, dass man aus blosser Phoronomie keine Gleichungen herausspinnen kann, durch welche die Massen in Rechnung kommen. Der einzige Weg zu dem Ziele besteht vielmehr darin, völlig direct die Körper durch Masseneinheiten auszudrücken und auf diese Weise sofort das Princip einzuführen, dass die Massengeschwindigkeiten, d. h. die Producte aus Massen und Geschwindigkeiten äquivalent seien, gleichviel wie man diese Producte verschiedentlich zusammensetzt. So geläufig also auch der Ausdruck $j = \frac{P}{M}$ ist, in welchem j die Beschleunigung der Masseneinheit und P das Gewicht oder überhaupt die Kraftaffection (vis motrix) ausdrückt, so kann doch neben ihm ohne Veränderung der Bedeutung der einzelnen Symbole nicht auch zugleich die Gleichung $j = P$ bestehen, was offenbar der Fall sein müsste, wenn Lagranges Wendung völlig exact befunden werden sollte. Freilich ist es algebraisch möglich, $M = 1$ vorauszusetzen, und dann ist eine

solche Form der Gleichung das Resultat; nur schade, dass über die Relation, um der verschiedenen und versteckten Einheiten willen, nichts mehr unmittelbar ersichtlich ist. Wer sich auf die Möglichkeit beruft, die in einer Gleichung vorkommenden Grössen als Einheit zu nehmen, wird sich auch gefallen lassen müssen, wenn die Gleichung immer sinnleerer wird und in unserm Fall, wenn auch noch j und P zu Einheiten ihrer Grössengattungen gemacht werden, auf die Form $1 = 1$ zurückkommt.

141. Die Erörterungen der vorangehenden Nummer lassen die Bedenklichkeit eines unbestimmten Kraftbegriffs deutlich ersehen. Die phoronomische Kraft, welche nichts als eine Beschleunigung sein kann, wurde nicht streng genug von der mechanischen Kraft unterschieden, die eigentlich erst diesen Namen verdient und kurzweg als Massenbeschleunigung definirt werden kann. In der Phoronomie kann man die Ursache einer bestimmten Veränderlichkeit der Bewegung, also z. B. die ideelle Festsetzung der Beschleunigung eines geometrischen Punktes immerhin Kraft nennen; aber dieser uneigentliche Ausdruck wird nicht dazu verleiten dürfen, den mechanischen Kraftbegriff zu verflüchtigen. Der letztere bezieht sich immer auf eine Grösse, die in unbegrenzt vielen Arten aus Masse und Beschleunigung zusammengesetzt sein kann, in welcher aber die Masse ebensowenig als die Beschleunigung jemals verschwinden darf. Der Schein, der etwa dadurch entsteht, dass die Masse zur Einheit wird und in den analytischen Ausdrücken verschwindet, ändert an dem realen Verhältniss gar nichts. Es ist vielmehr nur eine Unvollkommenheit der analytischen Sprache, dass die Einheiten als Factoren sich nicht sichtbar zu erhalten brauchen.

Ein besonderer Kraftbegriff wäre für die Mechanik sogar überflüssig, und man könnte sich allenfalls mit den Begriffen seiner Elemente, nämlich der Masse und der Beschleunigung behelfen, wenn nicht die Art der Zusammensetzung des Products aus Masse und Beschleunigung ganz gleichgültig wäre und diese Gleichgültigkeit einen besondern Ausdruck forderte. Das Etwas und die Grösse, die diesem Product entspricht, ist unabhängig davon, wieviel die Masse und wieviel die Beschleunigung dazu beitrage. Der Begriff Kraft ist also auch in seiner klarsten Fassung, in welcher er sich durch jenes Product definirt, noch immer etwas von einer bestimmten Combination der Factoren Verschiedenes. Die Abstraction, die in ihm liegt, muss einen

Ausdruck erhalten, und das Wort sowohl als die analytischen Symbole der Kraft sind nur dazu da, die fragliche Art von Producten ohne Beziehung auf eine bestimmte Zerlegung in Factoren auszudrücken. Es verhält sich also hiemit wie mit dem Begriff der Bewegungsquantität. Ueberhaupt ist ja die Massenbeschleunigung (Mj) nur diejenige Bewegungsquantität, welche in der Zeiteinheit erzeugt wird.

Hienach ist es ganz offenbar, dass man einen grossen Theil unnützer metaphysischer Gesichtspunkte erledigt, wenn man von vornherein in der Kraft nichts als ein Product von Masse und Beschleunigung denkt, welches jedoch zugleich den Inbegriff aller gleichwerthigen Producte vorstellt, in denen Masse und Beschleunigung anders vertheilt sind. In dieser Fassung ist der Kraftbegriff ebenso unzweideutig als derjenige der Bewegungsgrösse. Wäre die Terminologie der Mechanik ebenso wie diejenige der Chemie entstanden, so würde man statt Bewegungsgrösse den Ausdruck Massengeschwindigkeit und statt beschleunigender Kraft das Wort Massenbeschleunigung gesetzt haben.

Lagrange hat in wesentlicher Uebereinstimmung mit der vorherrschenden Uebung als Kraft im engern Sinne stets die punktuelle Ursache der Massenbeschleunigung vor Augen. Thatsächlich wird dieser Begriff, wenn man auf die Formeln und nicht auf deren scheinbar unterschiedene Auslegung sieht, für Statik und Dynamik gemeinsam. Die Tendenz gilt hier gleich viel, ob sie sich nun statisch oder dynamisch bethätige. Auch in der Dynamik ist für den strengen Punkt nur eine Tendenz vorhanden, die sich erst mit dem Uebergang zu andern Raumpunkten in wirkliche Bewegung verwandelt.

Im Sinne Lagranges müssen wir hienach alle Kräftesymbole als Repräsentanten irgend welcher Massenbeschleunigungen, d. h. als Vertreter derjenigen Affectionen irgend welcher Massen denken, vermöge deren im freien Zustand gewisse Beschleunigungen erzeugt werden würden, wenn man von dem Einfluss der Distanzen abstrahirt. Es sei nebenbei bemerkt, dass die analytischen Formeln erst dann die Probe der völligen Klarheit bestehen, wenn man im Stande ist, sie wenigstens hypothetisch in lauter Zahlen zu übersetzen und für jedes Zeichen anzugeben, wie die Einheit seiner Zahl zu denken sei oder wie, falls die Zahl eine abstracte ohne Benennungseinheit sein soll, diese abstracte Eigenschaft entstanden sei und sich rechtfertige. Wendet man diese Regel der Ver-

deutlichung und der Kritik auf die Kraftsymbole an, welche dieser Beleuchtung am bedürftigsten sind, so wird man schon für die Fundamentalgleichungen der Statik und Dynamik ein neues Licht gewinnen; ja man wird erkennen, dass die genaue Aufmerksamkeit auf den exacten Sinn der Symbole hinreicht, um sich zu überzeugen, dass Lagrange nicht nöthig gehabt hätte, erst eine statische Fundamentalgleichung aufzustellen und die Statik abzuhandeln, ehe er die allgemeine dynamische Grundgleichung entwickelte.

142. Kehren wir nun zum virtuellen Princip zurück, so sind die virtuellen Momente oder, wie Lagrange kurzweg sagt, die Momente der Kräfte im Grunde nur die Maasse der reducirten, in ihrer differentiellen Wirkung aufgefassten Kräfte selbst. Denkt man sich die Ursachen der Reduction hinweg und nimmt also eine völlig freie Kraftwirkung auf einen freien Punkt an, so muss sich das Moment der Kraft im Sinne von Galilei und Lagrange ebenfalls als ein selbständiger Begriff denken lassen. Unter dieser Voraussetzung ist aber das infinitesimale Moment eben nichts als der in der vorigen Nummer gerechtfertigte Kraftausdruck, vermehrt um einen gleichgültigen Factor, durch welchen das im Zeitelement zu durchlaufende Raumelement, oder aber dieses Raumelement dividirt durch das Zeitelement, repräsentirt wird. Es findet sich also, um in der neuern Ausdrucksweise zu reden, durch die Hinzufügung des elementaren Factors der abstracte Kraftausdruck in einen Ausdruck der elementaren Arbeit der Kraft, oder aber, wenn das Zeitelement noch als Divisor hinzutritt, einfach in einen infinitesimalen Ausdruck der Kraft verwandelt, indem im letzteren Fall das Raumelement dem Quadrat des Zeitelements proportional ist und mithin nach der Division das Zeitelement als Factor der Kraft übrigbleibt. Auf diese Vorstellungsart haben wir jedoch hier bei der Behandlung Lagranges nicht näher einzugehen.

Die virtuellen Momente stellen die elementaren möglichen Kräftewirkungen vor. Für die freie Kräftewirkung sind sie den Kräften selbst proportional und bedürfen für den Fall, dass man die elementaren Hülfsgrössen entfernt, keiner andern Repräsentation als derjenigen durch die Kraftsymbole. Nimmt man also an, dass die Kraftwirkungen alle in einer Coordinatenaxe liegen, so sind ganz einfach die Ausdrücke für die Kräfte mit Rücksicht auf die Vorzeichen zu summiren, um die resultirende Kraft, d. h. die Gesammtkraft oder collective Massenbeschleunigung zu erhalten,

die längs dieser Coordinatenaxe wirkt. Soll Gleichgewicht vorhanden sein, so muss die algebraische Summe der Kräfte gleich Null sein. Genauer drückt man sich jedoch aus, wenn man sagt, dass dies die Bedingung der Ruhe oder vielmehr der Abwesenheit einer resultirenden Bewegung sei. Es erinnert nämlich der Ausdruck Gleichgewicht zu leicht an die einschränkenden Bedingungen, die vermöge einer besondern Systemverfassung, also irgend einer Vorzeichnung der Bahnen oder relativen Geschwindigkeiten eintreten. Wir haben aber soeben vorausgesetzt, dass die Kräfte frei, d. h. ohne solche Bedingungen wirken sollen. Sieht man näher zu, so schliesst allerdings jede Combination von Kräften wenigstens eine gegenseitige Einschränkung ein, und diese Einschränkung kann in einem weiteren Sinne als Systemverfassung angesehen werden. Aus diesem Gesichtspunkt wäre nur die isolirte Kraft völlig frei, und das Hinzutreten einer zweiten Kraft, die an demselben Punkt wirkt, constituirte schon ein System. Diese allgemeine Betrachtungsart ist nun für die Anwendung des virtuellen Princips sehr nützlich, indem sie überall eine Beschränkung der Kraftwirkung voraussetzen lässt und nur zu der einzigen Unterscheidung zwischen festen Hindernissen und solchen Bedingungen nöthigt, die nur in der Combination mit andern Kräften von modificirbarem Effect ihren Grund haben. Indessen auch diese Unterscheidung lässt sich durch eine allgemeinere Vorstellungsart ersetzen, aus welcher grade Lagrange die besten Früchte gezogen hat. Zunächst könnte man die festen Bahnen und vorgeschriebenen Geschwindigkeitsrelationen als durch Kräfte verursacht ansehen, die in Vergleichung mit den andern an dem System wirkenden Kräften unüberwindlich oder, wie man auch wohl gesagt hat, unendlich gross sind. Letztere Seite dieser Idee hat jedoch etwas entschieden Unklares; in der Wirklichkeit sind die festen Hindernisse durch Kräfte vertreten, die nur unerheblich wenig nachgeben. Man müsste diese Gedankenform also erst im Sinne eines richtigen Unendlichkeitsbegriffs bearbeiten, um sie zum Gebrauch in einem strengen System geschickt zu machen. Doch bedürfen wir hier dieser Untersuchung nicht, da Lagrange selbst einen ganz andern Weg eingeschlagen hat, welcher auch weit natürlicher ist. Er führt nämlich unbestimmte Kräfte ein, welche die Reactionen des mechanischen Systems gegen die an demselben wirkenden Kräfte vertreten. Die Grösse jener Kräfte bleibt unbestimmt. Führt man sie aber ein, so kann das System im gewöhnlichen

Sinne als frei gelten; denn die Verbindungen im System und die diesen Verbindungen entsprechenden Bedingungsgleichungen sind durch die unbestimmten Kräfte und deren (virtuelle) Momente erstezt.

Nehmen wir nun wieder unsere einzige Coordinatenaxe vor, so können wir uns zwischen den auf derselben bewegten Körpern allerlei willkürliche Bedingungen gegeben denken, die sich durch die unbestimmten Kräfte ersetzen lassen. Diese unbestimmten Kräfte sind aber mit der abgeleiteten Function multiplicirt zu denken, welche die Geschwindigkeit ihres Angriffspunktes ausdrückt. Es bleibt mithin an ihnen nur der eigentliche Kraftfactor, nicht aber die virtuelle Geschwindigkeit unbestimmt, mit welcher sie sich entwickeln. Auf diese Weise ergeben sich neue Glieder der Summe, welche diejenigen Kräfte vorstellen, welche die Systemverfassung ersetzen. Jedoch täusche man sich nicht darüber, dass die fest vorgeschriebenen Umstände der Bewegung weniger durch die unbestimmten Kraftfactoren selbst als durch die zugehörigen abgeleiteten Functionen ausgedrückt werden. Nimmt man dagegen das Product beider Factoren zusammen als Symbol für eine selbständige freie Kraft, so hat man allerdings die Systemverfassung und die Bedingungsgleichungen durch eine Anzahl von Kräften ersetzt. Diese letztern Kräfte treten nun als Glieder zu den andern Kräften und bilden zusammen mit diesen eine algebraische Summe, welche die collective Massenbeschleunigung oder, mit andern Worten, die resultirende Kraft auf der Coordinatenaxe ergiebt.

Vertauscht man das einfache Arrangement auf unserer einzigen Coordinatenaxe mit eben denselben Beziehungen, jedoch so, dass diese Beziehungen auf unserer Axe als Reductionen von Verhältnissen gedacht werden, die an sich selbst nicht durch eine einzige Axenreduction vollständig aufgefasst werden können, so erhält man die Grundvorstellung und Grundgleichung, von welcher Lagrange in der Functionentheorie[1]) ausgeht. Die Reduction auf drei Axen schliesst die Zerlegung der Kräfte und Geschwindigkeiten ein, und von dieser Voraussetzung haben wir schon gehandelt. Ist diese Voraussetzung aber einmal anerkannt, so reduciren sich alle übrigen principiellen Fragen auf die Beziehungen, die auf einer einzigen Coordinatenaxe statthaben. Jede Kraft, jede vorgeschriebene Geschwindigkeit, jede Bedingungsgleichung, kurz jede

---

[1]) Théerie des fonctions anal., 2. Aufl. 3. Abth. Cap. 5, Art. 26.

gegebene Nothwendigkeit, Möglichkeit oder Thatsache kann auf die Coordinatenaxe reducirt, d. h. in demjenigen Theil festgestellt werden, welcher für die Richtung dieser Axe gilt. Die Kräfte finden sich alsdann mit den Cosinus der Winkel multiplicirt, welche ihre Richtungen mit der Axe bilden. Die unbestimmten Kräfte aber erhalten einen andern Factor, der eigentlich die Hauptsache und den Ausgangspunkt bildet, nämlich die nach der fraglichen Coordinate von der Bedingungsgleichung abgeleitete Function. Diese Function vertritt das Virtuelle in der Kraftwirkung, d. h. sie giebt die Determination der Bewegung nach Maassgabe der Systemverfassung und der Bedingungsgleichung an. Drückt man sie in der Art Lagranges ohne die infinitesimalen Hülfsgrössen aus, so zeigt sich zugleich, wie das virtuelle Princip nicht eigentlich von der Grösse der Verschiebungen, sondern von denjenigen Grössen handelt, die der Entstehung der Verschiebungen gleichsam erzeugend vorangehen und, auch abgesehen von jeglicher Bewegung, in einer streng punktuellen Position oder speciell im Gleichgewichtszustande selbst vorhanden sind.

Durch die hier fragliche algebraische Summe der gegebenen reducirten und der unbestimmten, mit den abgeleiteten Functionen multiplicirten Kräfte kann ebensogut Null als irgend eine resultirende Kraft gegeben sein. Diese Aufstellungsart der Beziehungen hat also auch noch den Vortheil, sofort bemerken zu lassen, wie das virtuelle Princip seine Anwendung nicht blos im Fall des Gleichgewichts habe, sondern ganz allgemein für die Bewegung und jede Kräftecombination gültig sei. In diesem allgemeinsten Sinne kommt es auf den einfachen Satz zurück, dass die Kräfte nach Maassgabe der virtuellen Geschwindigkeiten wirken, oder dass sie mit den unbestimmten Kräften zusammengesetzt werden müssen, durch welche man sich die Virtualitäten d. h. die Vorzeichnungen der Bewegungsmöglichkeiten im System ersetzt denken kann. Hiemit ist denn aber auch ersichtlich, wie das virtuelle Princip nur die Consequenz eines richtigen Kraftbegriffs sei. Die einschränkenden Geschwindigkeitsverhältnisse sind nicht Grössen, die erst durch stetige Kraftwirkung im Verlauf einer Zeit zu entstehen hätten; — es sind vielmehr Grössen, die mit der Systemverfassung unmittelbar gegeben sind. Hieraus erklärt sich, dass die unbestimmten Kräfte einen Factor erhalten, welcher ein Geschwindigkeitsverhältniss ausdrückt. Aendert sich die Systemverfassung selbst im Verlauf der Zeit, so steht auch dies der Anwendung des Princips

nicht entgegen; denn man braucht die Anordnung zunächst immer nur für einen Punkt zu kennen, um die virtuelle Grundgleichung, d. h. überhaupt die allgemeine Kräftegleichung aufzustellen. In Wahrheit lehrt also das virtuelle Princip nichts weiter als die Summirung der Kräfte und zwar speciell derjenigen, deren Begriff und Wirkung durch die ihrer Wirkungsart anhaftenden Geschwindigkeitsverhältnisse näher bestimmt wird.

143. Das Eigenthümliche des virtuellen Satzes liegt in der Berücksichtigung derjenigen Kräfte, die man die Systemkräfte nennen könnte, weil sie in der Verfassung des Systems ihren Grund haben. Diese Berücksichtigung kann nun auf eine doppelte Weise statthaben. Entweder reducirt man die gegebenen, auf das System wirkenden Kräfte nach Maassgabe der Systemverfassung; oder man führt sie als freie Kräfte ein und stellt ihnen die vorher gekennzeichneten unbestimmten Systemkräfte zur Seite. Nur in dem ersteren Fall werden aus den gegebenen Kräften eigentliche virtuelle Momente gebildet. Im zweiten Fall haben aber diese Momente nichts virtuell Beschränkendes in sich aufzunehmen und sind nichts als die Ausdrücke freier Kräfte mit oder ohne den hier ganz willkürlichen Factor einer infinitesimalen Verschiebung. Das eigentlich Virtuelle findet sich in diesem zweiten Fall in den Ausdruck der Systemkräfte und besonders in deren functionelle Factoren verlegt, wie wir dies vorher auseinandergesetzt haben.

In der Analytischen Mechanik stellt nun Lagrange seine zunächst blos statische virtuelle Grundgleichung zuerst aus dem ursprünglicheren der beiden eben erwähnten Gesichtspunkte auf. In der zweiten Section der die Statik enthaltenden Abtheilung werden die gegebenen Kräfte P, Q u. s. w. zum Ausgangspunkt genommen. Die Verfassung des Systems, auf welches diese nach ihrer freien, absoluten Grösse gegebenen Kräfte wirken sollen, gilt als beliebig. Um der grössern Allgemeinheit willen wird unter dieser Verfassung auch so zu sagen die Verfassungslosigkeit, d. h. der Fall eines völlig freien Systems mitvorzustellen sein. Eine derartige Freiheit besteht in dem Mangel an Verbindungen zwischen den Punkten oder Körpern des Systems. Indessen stellt, wie wir schon öfter bemerkt haben, schon ein einzelner Punkt an sich selbst im weiteren Sinne eine Art Systemverbindung vor, indem durch seine Vermittlung mehrere an ihm wirkende Kräfte einander beschränken und hiedurch ein System mit einer wenigstens

relativen Verbindung bilden. Fassen wir jedoch direct den Fall der gewöhnlichen Systemverbindung ins Auge. Was diese Systemverbindung wirkt, besteht in den Virtualitäten, unter denen die gegebenen Kräfte sich am System zu bethätigen vermögen. Die modificirte Wirkung der gegebenen Kräfte wird also, wenn wir mit Lagrange die von uns (Nr. 129) erörterte erste Auffassungsart der Reductionen zu Grunde legen, durch die virtuelle Verschiebung auszudrücken sein, welche durch die Kraft aus dem Gesichtspunkt der Richtung der Kraft hervorgebracht werden kann. Hiedurch wird zur absoluten Kraft eine Verhältnissgrösse hinzugefügt, vermöge deren sie sich reducirt. Ist also die Linie der gegebenen Kraft und zugleich der Abstand des Angriffspunktes vom Kraftcentrum p, so wird dp die virtuelle Veränderung dieses Abstandes oder, mit andern Worten, die virtuelle Verschiebung des Angriffspunktes aus dem Gesichtspunkt der Kraftrichtung sein. Die Annäherung oder Entfernung des Angriffspunktes in Beziehung auf das Kraftcentrum wird die Proportion ausdrücken, nach welcher die absolute Kraft P zu ihrer durch das System eingeschränkten Wirksamkeit gelangt. Man muss also an Stelle der absoluten Kraft ihre virtuelle Reduction, d. h. ihr virtuelles Moment $P\,dp$ setzen. Da ein Gleiches in Beziehung auf die Kraft Q für den Abstand q gilt, so hat man das virtuelle Moment $Q\,dq$ und analoge Ausdrücke für die übrigen Kräfte. Da in diesen Ausdrücken die Vorzeichen schon mitberücksichtigt sind, je nachdem die Verschiebungsprojectionen im Sinn oder gegen den Sinn der Kräftewirkung oder der Messung der Abstände ausfallen, so hat man als virtuelle Gleichung des Gleichgewichts zwischen den Kräften P, Q u. s. w. den Ausdruck $P\,dp + Q\,dq + \dots = 0$. Dies ist die Fundamentalgleichung. Sie ist ohne gemeinsame Coordinaten ausgedrückt; denn die Linien der Abstände der Angriffspunkte von den Kraftcentren sind noch keine Vertretung einer Reduction auf eine geringste Anzahl von Mitteln zur Angabe der Lagen. Jede Kraft ist für sich betrachtet, und man kann noch nicht einmal sagen, dass ihre Wirkung auf die Verbindungen des Systems reducirt sei, sondern muss umgekehrt sagen, dass die Verbindungen des Systems auf die Richtung der gegebenen Kraft reducirt sind. Man hat also eine Anzahl beliebig gerichteter, bereits virtuell reducirter Kräfte, deren Summe gleich Null gesetzt wird. Nun kann man sich unmittelbar nicht sofort vorstellen, wie diese Kräfte in ganz

verschiedener Lage sich algebraisch summiren sollen. Nur für zwei Kräfte, die auf derselben Linie wirken, ist diese Anschauungsweise ganz klar. Diesem Mangel hilft aber die Möglichkeit ab, auch ganz verschieden gerichtete Kräfte vermittelst eines Fadens, der durch feste Punkte nach verschiedenen Richtungen gleichsam gebrochen wird, unmittelbar so aufeinander wirken zu lassen, dass sie sich ganz oder theilweise grade so summiren oder subtrahiren, wie wenn es sich um eine ungebrochene grade Linie handelte. Erinnern wir uns ausserdem der Umschlingungen, welche die Intensitäten der Kräfte vorstellen, sowie überhaupt des ideellen, vom Flaschenzug abstrahirten Schema, so ist klar, dass Lagrange nicht nur ein Recht hat, seine Formel als streng anzusehen, sondern dass er auch dafür gesorgt hat, dass man bei näherer Untersuchung verhindert werde, in seiner Fundamentalgleichung den Vortheil der Unabhängigkeit von bestimmten Coordinaten zu verkennen. Uebrigens ist die bekannte Summirung der elementaren Wirkungsgrössen in Abstraction von der Verschiedenheit der drei Coordinatenaxen diejenige Gestalt, in welcher sich die Zusammenfassbarkeit der Beziehungen in eine einzige Gleichung anschaulich genug auch als Consequenz der gewöhnlichen Ableitungen herausstellt.

144. In der vierten Section der Statik wird die eben gekennzeichnete Grundformel in einer neuen und allgemeinern Form aufgestellt, deren Herleitungsmethode wir im Wesentlichen schon Nr. 142 besprochen haben. Es sollen nämlich die gegebenen Kräfte als frei gelten, indem die unbestimmten Kräfte hinzutreten. Die Geltendmachung dieses Gesichtspunktes vollzog sich in der Functionentheorie nach Maassgabe der Reductionen der Kräfte und Bedingungsgleichungen auf eine Axe. Hier fallen diese Reductionen fort; aber die Bedingungsgleichungen können nicht anders als in Coordinaten gegeben vorgestellt werden. Allenfalls könnte man sich die Bedingungsrelationen ganz willkürlich eingekleidet denken; aber stets würden es Beziehungen zwischen den Oertern der Punkte oder Körper, also irgend welche Ausdrücke für die gegenseitigen Verbindungen sein müssen. Die Methode zur Aufstellung der universellen Gleichung ist nun bei Lagrange diejenige der unbestimmten Multiplicatoren. Jede Bedingungsgleichung, die doch in ihrem blos geometrischen Ausdruck nur eine phoronomische Bedeutung haben würde, wird durch das Product ihres vollständigen Differentials mit einem Coefficienten

ersetzt. Dieser Coefficient stellt die unbestimmte Widerstandskraft vor, welche von der einschränkenden Bedingung ausgeht oder, besser gesagt, diese Bedingung begleitet. Diese neuen Producte haben die Form virtueller Momente und sind es auch in der That, indem sie die Verbindungskräfte nach absoluter Grösse und den zugehörigen Geschwindigkeitsverhältnissen darstellen.

Auf diese Weise findet sich die Grundgleichung um soviel Glieder vermehrt, als Bedingungsgleichungen vorhanden sind. Die virtuellen Momente der gegebenen Kräfte haben nun aber nicht mehr den ursprünglichen Sinn, sondern sind Verschiebungsmomente freier Kräfte. Die Einschränkungen, die sonst schon in die Grössen der Verschiebungen verarbeitet gedacht wurden, sind jetzt anderswohin verlegt und zeigen sich völlig sichtbar in den aus den Bedingungsgleichungen gebildeten Momenten der unbestimmten Kräfte.

Die rein analytische Begründung, auf die sich Lagrange zunächst stützt, ist in der Aequivalenz zweier Operationsgruppen zu suchen. Man kann nämlich von der ersten Art der Grundgleichung ausgehen und die virtuellen Verschiebungen mit Hülfe der Bedingungsgleichungen näher bestimmen. Dies geschieht dadurch, dass man die möglichen Variationen nach Maassgabe der Bedingungsgleichungen durch Elimination auf eine geringste Anzahl zurückführt. Dieses Eliminationsverfahren kann aber nach rein algebraischen Grundsätzen auch durch die Methode der unbestimmten Coefficienten ersetzt werden. Man hat also nur die Bedingungsgleichungen, soweit dieselben zwischen den Differentialen gelten, also die differenzirten Bedingungsgleichungen mit einem unbestimmten Coefficienten zu versehen und zu der Hauptgleichung als Glieder derselben zu addiren. Die so entstehende Gleichung ist dem anticipirten Eliminationsverfahren äquivalent. Sie enthält in einem einzigen Ausdruck alle Bedingungen, die sonst nur in der Gleichungsgruppe gegeben waren.

Der Geist dieser neuen Methode, die Fundamentalgleichung aufzustellen, besteht, wie von Lagrange auch ausdrücklich[1]) hervorgehoben wird, besonders darin, die Anordnung des gegebenen mechanischen Systems auf den Fall eines freien Systems zurück-

---

[1]) Méc. anal. Bd. I (1811) Statik Sect. IV, Art. 7. Die Grundgleichung selbst in Art. 3.

zuführen. In der That sind die Verbindungen durch Verbindungskräfte ersetzt, und die Zusammensetzung dieser Verbindungskräfte mit den gegebenen Kräften in der Gestalt einer Summe, in welcher beide Arten von Summanden selbständig hervortreten, ist das Wesen der neuen Grundformel. In dieser universellen Grundgleichung sind weder die freien Kräfte auf die Verbindungen, noch die Verbindungen auf die freien Kräfte reducirt, sondern beide Gattungen von Elementen nebeneinandergestellt, um erst im Verlauf der weitern Operationen ein Aequivalent der Reduction zu ergeben.

145. Wir redeten bisher bei der Erörterung des Verfahrens von Lagrange nur von einer Grundgleichung der Statik, während wir oben in Bezug auf die Entwicklungen der Functionentheorie (Nr. 142) schon die Leichtigkeit kennen gelernt haben, mit welcher die Summe der virtuellen Kraftmomente nicht minder als Ausdruck für jede beliebige Bewegungsresultante, als wie für die besondere Resultante Null verstanden werden kann. Wir dachten uns dort, wo wir nur eine Axe vor Augen hatten, die Massenbeschleunigung auf dieser Axe, d. h. das Product aus der Masse und der zweiten abgeleiteten Function, als besondern Ausdruck für die Bewegungsresultante auf der einen Seite der Gleichung und so der Summe der gegebenen Kräfte und der Ausdrücke für die Wirkungen der unbestimmten Kräfte gleich gesetzt. An Stelle einer einzigen Massenbeschleunigung muss natürlich eine Reihe und Summe solcher Ausdrücke gedacht werden, wenn mehrere Körper als ein bewegtes Ganze gedacht werden sollen. Da aber abgesehen hievon jeder Körper eine verschiedene, ihm eigenthümliche Bewegung haben kann, so bleiben wir bei der Vorstellung, welche die Bewegung jedes Körpers durch ein Product aus Masse und Beschleunigung ausdrückt.

Dies vorausgesetzt, begreift sich das Verfahren Lagranges in seiner Analytischen Mechanik[1]), durch welches er die Grundgleichung der Dynamik gewinnt, fast ohne Weiteres. An die Stelle der auf der einen Seite der statischen Grundgleichung befindlichen Null treten die Glieder, welche die resultirenden Bewegungen ausdrücken. Bringt man dieselben auf die andere Seite der Gleichung, um die allgemeine Form der Setzung gleich Null wiederzuerhalten, so muss man die Vorzeichen derselben wechseln,

[1]) Ibid. Dynamik Sect. II.

und bezieht man diesen Wechsel unmittelbar auf den Sinn der Kräfte oder virtuellen Momente, so zeigt sich schon analytisch, dass die den Bewegungsresultanten entsprechenden Kräfte im entgegengesetzten Sinne genommen werden müssen, um gegen die übrigen Kräfte Gleichgewicht zu formiren. Das d'Alembertsche Princip, auf welches sich auch noch Lagrange bei dieser Gelegenheit beruft, und dem man die Zurückführung der Dynamik auf die Statik zuzuschreiben pflegt, ergiebt sich streng genommen als eine blosse Folge des Calcüls. Hiebei ist natürlich vorausgesetzt, dass man die Beziehungen der virtuellen Momente schon für den Fall der Bewegung gelten lässt. Dies ist aber auch die natürliche Vorstellungsart, und das Verfahren Lagranges in der Functionentheorie, welches ein Jahrzehnt jünger ist, als der erste Entwurf der Analytischen Mechanik, hat hiefür Zeugniss abgelegt. Die Bewegung ist die allgemeinere Voraussetzung und das Gleichgewicht nur ein specieller Fall der Kräftecombinationen. Da man nun jede Bewegungsgleichung nach rein algebraischen Grundsätzen auf Null bringen kann, indem man die Vorzeichen der auf der einen Seite befindlichen Glieder wechselt, so bedarf es eben nur einer Auslegung dieses Wechsels, um denjenigen Satz zu erhalten, den man, obwohl historisch nicht ganz exact, das d'Alembertsche Princip zu nennen pflegt. D'Alembert führte nämlich, wie wir früher (Nr. 126) bemerkt haben, nicht unmittelbar, wie Lagrange und vor ihm in einzelnen Fällen auch Euler, die entgegengesetzten Bewegungen ein, sondern hielt sich eng an das Gleichgewicht der verlornen Kräfte. Diese letztere Wendung ist aber bei der Aufstellung der dynamischen Grundgleichung Lagranges nicht zu brauchen.

Wenn jede Gleichung durch Reducirung auf Null die Form einer statischen Beziehung erhält, so könnte man umgekehrt meinen, dass jede statische Grundgleichung in eine dynamische Beziehung verwandelt werde, wenn man einen Theil der virtuellen Momente mit gewechselten Vorzeichen auf die andere Seite bringt, und es könnte scheinen, als wenn einunddieselbe Gleichung ebensogut der Ausdruck für das Gleichgewicht wie für die Bewegung sein könnte. Hieraus folgt aber nicht, dass dieselben Kräfte in derselben algebraischen Combination gegen den Unterschied von Gleichgewicht und Bewegung gleichgültig blieben. Dieser analytisch wichtige und interessante Fall erläutert sich an dem einfachen Beispiel des Parallelogramms der Kräfte. Nimmt man die

Bewegungsresultante in entgegengesetzter Richtung, so hat man das Gleichgewicht zwischen drei Kräften. Ist aber dieses Gleichgewicht gegeben, so kann man irgend eine der drei Kräfte zur Bewegungsresultante machen, wenn man sie in entgegengesetzter Richtung nimmt, d. h. wenn man ihr Vorzeichen wechselt. Die Gleichung wird aber, rein analytisch betrachtet, für beide Fälle dieselbe bleiben, und der ganze Unterschied wird darin bestehen, dass man die Glieder auf beiden Seiten verschiedentlich vertheilt und demgemäss die Vorzeichen nach algebraischen Grundsätzen verändert denkt. Man könnte aber auch von dieser Vertheilung Abstand nehmen und dieselbe Modification der Vorstellung erreichen, wenn man gehörigen Orts die Vorzeichen durch gleichwerthige Combinationen, also z. B. Plus durch ein doppeltes Minus ersetzt, oder die Operationszeichen unmittelbar zu den Kräften zieht, oder endlich die Kräftevorzeichen in Operationszeichen verwandelt und die Kräfte dann absolut nimmt. Unter allen Umständen können aber dieselben, ihrem Sinne nach genau bestimmten Kräfte in ihrer Gesammtcombination nur einerlei Resultat geben. Aendert man die Vorzeichen, und bezieht man diese Aenderungen auf die Kräfte selbst, so führt man eigentlich ganz andere, nämlich die entgegengesetzten Kräfte ein. Man kann also nicht sagen, dass dieselben identischen Kräfte noch das Material der Relation bilden. Aendert man z. B. alle Vorzeichen, was algebraisch erlaubt ist, so hat man ein äquivalentes Kräftesystem, für welches ebenfalls Gleichgewicht besteht, wenn es vorher bestand. Die algebraisch möglichen Relationen, die bei übrigens gleichen absoluten Grössen der Kräfte aus einer und derselben Gleichung durch Aenderung der Vorzeichen und durch Trennung der Glieder auf zwei Gleichungsseiten formirt werden können, werden daher die verschiedensten Auslegungen gestatten. Man wird allerdings die Gleichung des Gleichgewichts durch Abtheilung der Glieder in eine Gleichung der Bewegung verwandeln können, wenn nicht etwa zufällig die abgetheilten Gliedergruppen auch für sich allein gleich Null und im Gleichgewicht sind. Diese Verwandlung jeder rein statischen in eine dynamische Gleichung geht aber nur vor, indem eine Anzahl Kräfte in entgegengesetzter Richtung genommen wird, so dass also die Kräfte nicht dieselben bleiben. Da sich nun der Sachverhalt analog stellt, wenn man eine dynamische Gleichung auf Null bringt, so ist klar, dass zwar kein Grund vorhanden ist, analytisch zwischen den Bewegungs-

gleichungen und den Gleichungen des Gleichgewichts einen Unterschied zu machen; dass aber, sobald man nicht blos auf die absoluten Grössen der Kräfte, sondern auch auf deren gegebene Richtungen und mithin auf die ihnen anhaftenden Vorzeichen Acht hat, die Bewegung oder das Gleichgewicht an den Operationszeichen erkennbar werden müssen. Wir lassen uns jedoch auf diese Untersuchung hier nicht ein, da es uns an dieser Stelle auf das analytisch Gemeinsame der statischen und dynamischen Gleichungen weit mehr ankommt, als auf das Unterscheidende.

Die neue Gattung von Gliedern, durch deren Sichtbarmachung die dynamische Grundgleichung von der statischen unterschieden ist, wird von Lagrange sofort in Beziehung auf Axen ausgedrückt. Die Beschleunigungen nach diesen Axen multiplicirt mit der Masse stellen die Kraft vor, welche der Bewegung auf der Axe entspricht. Setzt man die Verschiebung nach Richtung der Axe noch als Factor hinzu, so hat man das virtuelle Moment derjenigen Kraft, welche der wirklichen Bewegung entspricht. Eine Summe solcher Ausdrücke vermehrt nun die Glieder der statischen Grundgleichung und zeichnet sich zugleich durch den Wegfall der Symmetrie aus, indem die gegebenen Kräfte auf ihre eignen Richtungen, die den Bewegungen entsprechenden Kräfte aber auf Axen bezogen sind. Reducirt man die Gleichung auf Null, so kann dies in zweierlei Art geschehen, indem man entweder den statischen Bestandtheil mit Umkehrung aller seiner Vorzeichen auf die Seite des dynamischen, oder den letzteren auf die des ersteren bringt. Genauer ausgedrückt, könnte man nur von einem statisch aussehenden Bestandtheil, d. h. derjenigen Gliedergruppe reden, welche, wenn der dynamische Theil gleich Null wäre, Gleichgewicht bedeuten würde und übrigens in der Form der statischen Grundgleichung bezeichnet ist.

Je nachdem man eine dieser Verfahrungsarten wählt, entspricht auch die Vorstellungsart der gewöhnlichen, oder einer andern ebenfalls möglichen Auffassung. Anstatt nämlich die resultirende Bewegung in entgegengesetzter Richtung zu nehmen und so eine Gleichgewichtsvorstellung zu erzeugen, kann man auch sämmtliche Bewegungscomponenten, d. h. die gegebenen Kräfte in entgegengesetzter Richtung nehmen, wie schon der einfache Fall des Parallelogramms der Kräfte veranschaulicht. Im Wesentlichen entspricht zwar auch diese zweite Anschauungsweise der ersten; aber man lernt aus ihr noch besonders den Geist der

Beziehungen kennen, vermöge deren jede Gleichung zwischen Kräften ohne Weiteres als eine Aequivalenz von zwei Gruppen von Bewegungssummen angesehen werden kann, die, sobald sie gegen einander wirkend gedacht und daher von einander subtrahirt werden, ein Gleichgewichtssystem ausmachen.

146. Nach dem Vorangehenden würde der Streit, ob eine statische Grundgleichung in der dynamischen Fassung oder aber eine dynamische Grundgleichung in der statischen Reduction der zutreffendste Gesichtspunkt für die Auffassung der mechanischen Fundamentalbeziehung werden müsse, ganz müssig sein. In Wahrheit giebt es weder eine ausschliesslich statische noch specifisch dynamische Grundbeziehung, sondern kurzweg eine allgemeine Kräftegleichung, die mit ihrer Allgemeinheit über den zufälligen Gegensatz des Statischen und des Dynamischen hinausreicht. Sind die Kräfte oder, was wesentlich dasselbe ist, deren virtuelle Momente gegeben und zwar auch dem Vorzeichen nach genau bestimmt, so wird die Zusammenfassung dieser Kräfte durch die Operationszeichen geregelt. Das Resultat dieser Zusammenfassung ist wiederum eine Kraft oder deren Moment, und wenn dieses Resultat seiner unentwickelten Form, d. h. den zusammenzufassenden Kräften gleichgesetzt wird, so ist dies die fundamentale Kräftegleichung, die man übrigens noch auf Null bringen kann. Gleichgültig aber bleibt es, mit welcher realen Vorstellung man diese Reduction begleite. Zieht man das gewechselte Vorzeichen nicht als Zubehör zum Resultat, also nicht zur Kraft oder zur Bewegung, sondern nimmt man es als abgelöstes Operationszeichen, so bedeutet auch die reducirte Form nicht nothwendig ein Gleichgewicht, sondern stellt nur die Thatsache dar, dass zwei absolut vorgestellte Bewegungen einander gleich sind und mithin zur Differenz Null haben. Analytisch ist also die Hineinlegung einer Gleichgewichtsvorstellung nicht nothwendig, sondern nur möglich und hängt davon ab, dass man die Vorzeichen unmittelbar zu den Kräften ziehe, um sie so im Sinne einer entgegengesetzten Wirkung interpretiren zu können.

Nach Lagranges Anschauungsweise ist die allgemeinste Formel die dynamische und zwar unter der Voraussetzung, dass sie einen statischen Sinn erhalte. Die Verallgemeinerungsproceduren, welche durch unmittelbare Berücksichtigung der Bedingungsgleichungen vermittelst der unbestimmten Kräftecoefficienten für die statische Grundgleichung statthatten und deren Gliederzahl vermehrten,

werden auch auf die dynamische Grundgleichung übertragen[1]). Eine besondere Nachweisung wäre hiefür nicht einmal nöthig gewesen, da ja die dynamische Grundgleichung direct als statisch und nur indirect als Bewegungsgleichung angesehen wird.

Obwohl Lagrange erst die Statik und dann die Dynamik darstellt und obwohl er die dynamische von der statischen Grundgleichung unterscheidet, so behandelt er, wenn auch nicht ausdrücklich, so doch thatsächlich eigentlich nur eine einzige, für die gesammte Mechanik gültige, universelle Kräftegleichung. Auch haben wir gesehen, dass er in der Functionentheorie in der fraglichen Beziehung von vornherein keinen Unterschied zwischen Statik und Dynamik macht. In der Analytischen Mechanik zeigt der äusserliche Parallelismus der Abschnitte und Gegenstände, die in der Statik und in der Dynamik mit der vollkommensten Analogie und unter Wiederholung derselben Gesichtspunkte einander entsprechen, dass die Strenge der Systematik viel gewonnen haben würde, wenn die allgemeinen Eigenschaften des Gleichgewichts als besondere Folgerung aus der allgemeinen Kräftegleichung und mithin in der engsten Beziehung zu den allgemeinen Eigenschaften der Bewegung entwickelt worden wären. Der rein analytische Gesichtspunkt wies hierauf hin. Namentlich würde die Darlegung der Methoden, nach denen die beiden Grundgleichungen zu bearbeiten sind, sich auf diese Weise nur auf eine einzige Kräftegleichung zu beziehen gehabt haben. Die Verdoppelungen dieser methodischen Angaben wären vermieden worden, und das Allbeherrschende der einfachen Verfahrungsgrundsätze wäre noch entschiedener sichtbar geworden.

Wir geben die Hauptregel an, nach welcher Lagrange aus der Grundgleichung (in beiden Formen oder in beiderlei Sinn) die allgemeinsten Wahrheiten der Mechanik entwickelt und alle besondern Probleme wenigstens in die Gestalt einer zur Lösung genügenden Gleichungsgruppe gebracht wissen will. In der universellsten Ausdrucksart der Fundamentalgleichung, nämlich in derjenigen mit den Coefficienten, sind die Verschiebungsvariationen überall an sich selbst als frei, d. h. als unbestimmt zu betrachten, und ihre nähere Bestimmung liegt erst in dem Gedanken der Verbindung der verschiedenen Glieder dieser universellen, bereits Alles enthaltenden Gleichung. Indem man diese Gleichung

[1]) Méc. anal. Bd. I (1811) Dynamik Sect. IV, Art. 11.

bearbeitet und nach den verschiedenen Verschiebungsvariationen ordnet, wird man zugleich erkennen, welche virtuellen Verschiebungen unabhängig und willkürlich bleiben. Indem man dann nach rein algebraischen Grundsätzen die Factoren jener arbiträren Elemente gleich Null setzt, erhält man die Particulargleichungen, aus denen man dann noch die unbestimmten Kräfte zu eliminiren hat.

Leichter übersehbar, wenn auch meist nicht bequemer, ist der Grundsatz, nach welchem mit der Grundgleichung verfahren wird, wenn dieselbe nicht die universelle Form der Ausstattung mit den unbestimmten Coefficienten hat. Alsdann sind die virtuellen Verschiebungen nicht als die willkürlichen, wie sie für freiwirkende Kräfte statthaben, sondern als bedingt vorzustellen, und diese Bedingtheit ist in den Bedingungsgleichungen zu suchen, welche die Systemverfassung vorstellen und als Data des Problems noch neben die allgemeine Grundgleichung zu setzen sind, um derselben überhaupt erst einen bestimmten Sinn zu ertheilen. Die Bedingungsgleichungen werden nun Relationen zwischen den virtuellen Verschiebungen liefern. Indem man diese Relationen benutzt, um durch Substitution und Elimination die virtuellen Variationen der Grundgleichung auf eine geringste Zahl unabhängiger und willkürlicher Verschiebungselemente zu reduciren, erhält man wiederum, wie im ersten Fall, die Particulargleichungen der besondern Aufgabe. In jedem Fall theilt sich also die Ausgangsgleichung nach Maassgabe der Bedingungsgleichungen in eine Anzahl particulärer Kräftegleichungen, deren jede dadurch entsteht, dass der Coefficient eines willkürlichen Variationselements gleich Null gesetzt werden muss, um der Gesammtgleichung zu genügen.

147. Um einen Begriff von der Systematik zu geben, die der Analytischen Mechanik von Lagrange zu Grunde liegt, mögen einige äusserliche Angaben vorangehen. Jede der beiden Abtheilungen, durch welche die Mechanik in die Statik und Dynamik gesondert wird, ist in den vier ersten Abschnitten vollkommen analog ausgeführt. Sowohl der Statik als auch der Dynamik geht eine historische Skizze über die Principien voran, die sich analytischer Ausführungen, ja überhaupt des Gebrauchs von Formeln mit einer einzigen, in der zweiten Ausgabe hinzugekommenen Ausnahme enthält. Diese Ausnahme betrifft höchst bezeichnenderweise den Flaschenzugbeweis des Princips der virtuellen Geschwin-

digkeiten. Uebrigens drückt Lagrange in diesen beiden historisch principiellen Einleitungen auch die specifisch analytischen Begriffe fast ausnahmslos in blossen Worten aus. Aehnliche Skizzen sind dann noch für Hydrostatik und Hydrodynamik bei dem Uebergang zu diesen beiden Verzweigungen der Mechanik eingeschaltet.

Die eigentliche Systementwicklung beginnt sowohl in der Statik als in der Dynamik erst mit dem zweiten Abschnitt. Die zweiten Sectionen enthalten nämlich die Aufstellung der Fundamentalgleichung und einige Hülfsoperationen zur Erläuterung der Bestandtheile derselben in ihrer statischen und in ihrer dynamischen Gestalt. Die dritten Sectionen enthalten die allgemeinen Eigenschaften des Gleichgewichts und diejenigen der Bewegung, wie sich dieselben aus den Grundgleichungen herleiten lassen. In der Statik sind es also die drei Gleichungen, welche die Möglichkeit einer translatorischen Verschiebung des Systems ausschliessen, die zuerst nach der allgemeinen Regel entwickelt werden. Dann folgen die drei Gleichungen, welche die rotatorische Verschiebung unmöglich machen. Mit diesen bekannten sechs Gleichungen sind die ganz allgemeinen Bedingungen des Gleichgewichts verzeichnet. Der Mangel einer Bewegung der Fortschiebung nach den drei Dimensionen des Raumes ergiebt eine Art von Gleichgewicht, neben welchem eine Rotation bestehen könnte. Um auch die letztere auszuschliessen und so das Gleichgewicht vollständig zu machen, muss der Mangel der Bewegung in Rücksicht auf die ebenfalls nach den drei Dimensionen denkbare Rotation festgestellt sein, und dies geschieht in Beziehung auf drei Axen wiederum durch drei Gleichungen. Da die Dreizahl von den drei Dimensionen des Raumes herrührt, so ist eigentlich nur eine fundamentale Doppelheit von Bedingungen vorhanden. Auf diesen Dualismus der Translation und der Rotation muss man von vornherein achten, um die Ebenmässigkeit in der Gliederung und Ableitung des mechanischen Wissens zu beurtheilen.

Wesentlich ist in dem fraglichen dritten Abschnitt ausser der Herleitung der sechs Gleichungen des Gleichgewichts noch die Erörterung der Beziehungen zum Schwerpunkt, ganz besonders aber die Darlegung der Maxima oder Minima, welche im Fall des Gleichgewichts statthaben, und von denen wir bei der Erörterung des Princips der geringsten Wirkung (Nr. 124) gesprochen haben. Der unumgängliche Inhalt des den allgemeinen Eigenschaften des Gleichgewichts gewidmeten Abschnitts beschränkt sich jedoch auf

das, was den sechs Gleichungen entspricht. Weiss man dies, so wird man den Parallelabschnitt in der Dynamik und dessen Analogien besser verstehen.

Der eben erwähnte Parallelabschnitt, d. h. die dritte Section der Dynamik, behandelt an erster Stelle die Bewegung des Schwerpunkts eines beliebigen Systems und das Princip der Flächen. Diese beiden Gegenstände begreifen für ein bewegtes System die genaue Analogie dessen, was für ein Gleichgewichtssystem jene sechs Gleichungen oder, mit andern Worten, die Bedingungen der Nichttranslation und der Nichtrotation bedeuteten. Lässt man also den Schwerpunkt als blossen Hülfsbegriff und die engere Fassung des Flächenprincips zur Seite, so wird man eben nur die allgemeinsten positiven Eigenschaften der vorhandenen Bewegung eines beliebigen Systems gekennzeichnet erhalten, und diese positiven Charaktere der Bewegung eines beliebigen Systems, die sich ebenfalls in sechs Gleichungen ausdrücken, werden sich in ihrer unmittelbaren differentiellen Form von den Normirungen des Gleichgewichts nur durch die Interpretation der Vorzeichen unterscheiden. Das specifisch Dynamische, was im Princip der Bewegung des Schwerpunkts und im Princip der Flächen ausgesagt wird, ergiebt sich erst mit den Integrationen. Abgesehen von diesen Integrationen fallen die Normirungen für Statik und Dynamik in den sechs charakteristischen Gleichungen analytisch zusammen und drücken eine gemeinsame Beziehung aus, die jedem mechanischen System für einen Zeitpunkt eigen sein muss. Die Hinweisung auf den besondern Fall des Gleichgewichts beruht, wie gesagt, auf nichts weiter als auf der Auslegung gewisser Vorzeichen, die man, anstatt sie zu dem Ausdruck der Kräfte oder Beschleunigungen zu ziehen, als blosse Operationszeichen isolirt, so dass gewisse Kräfte die wirklichen, d. h. die resultirenden Bewegungen vertreten.

Bei der Bewegung eines Systems im Allgemeinen wird von den besondern, innern und gegenseitigen Veränderungen abstrahirt. Aus diesem Grunde kann die allgemeine Eigenschaft der Bewegung eines Systems eben nur eine Eigenschaft der Bewegung des Schwerpunkts sein, welcher das System als Ganzes repräsentirt. Analog tritt nun das Flächenprincip oder, mit andern Worten, der Satz von den Rotationsmomenten hinzu. Es ist also derselbe Dualismus der Translation und Rotation, der in der Dynamik mit der vollkommensten Analogie wiedererscheint und die ersten allgemeinen Eigenschaften der Bewegung ergiebt. Ausserdem erinnere

man sich noch des Satzes von der Constanz der auf eine beliebige Axe reducirten und so summirten Bewegungsgrössen. Man wird alsdann einsehen, dass es zwei Grundeigenschaften der Bewegung eines beliebigen Systems giebt, die, als punktuell aufgefasst, offenbar mit den Grundformen der Kräfteverhältnisse im Gleichgewicht zusammenfallen. Ein weiteres Eingehen auf diese wichtigen Uebereinstimmungen ist hier überflüssig, da wir auf die fraglichen Analogien schon bei der Besprechung der verschiedenen Principien (Nr. 119) hingewiesen haben.

Ausser den Differentialgleichungen, durch welche sich die allgemeinen Eigenschaften der Bewegung eines beliebigen Systems kennzeichnen, werden in der dritten Section der Dynamik noch diejenigen Eigenschaften entwickelt, welche das Princip der lebendigen Kräfte und dasjenige der geringsten Wirkung vorstellen. Die Ausführung der Eigenschaften der Bewegung in Beziehung auf die Hauptaxen[1]) ist eigentlich nicht als die Herleitung einer neuen fundamentalen Eigenschaft, sondern nur als eine Ergänzung der Grundvorstellungen über die Rotation zu betrachten. Die Hauptaxen bilden einen Begriff, den man als Correlat desjenigen vom Schwerpunkt ansehen kann. Aus diesem Grunde haben wir uns nach den Fundamentalgleichungen nur noch um die Gleichung der lebendigen Kräfte und um die Eigenschaften in Beziehung auf Maxima und Minima zu bekümmern. In diesen beiden neuen Fällen sind es Integrationen der allgemeinen Kräftegleichung der Mechanik, welche die neue Form der Beziehungen ergeben. Indem man von den virtuellen Geschwindigkeiten oder vielmehr von den entsprechenden Verschiebungen derartig ausgeht, dass man diese Geschwindigkeiten oder Verschiebungen als die Bethätigungen der Kräfte selbst betrachtet, gewinnt man, wie wir früher gezeigt haben, nach der Integration die halben Quadrate der Geschwindigkeiten. Ueber die besondere Voraussetzung, die hier von Lagrange gemacht wird, ist ebenfalls schon (Nr. 107) gehandelt. Hier interessirt uns auch nur der Umstand, dass eine Integration der allgemeinen Kräftegleichung das Erhaltungsprincip ergeben kann. Die Verfahrungsart zur Ableitung eines Princips der geringsten Wirkung beruht dann wiederum nur auf einer Bearbeitung der

[1]) Zuerst in Eulers Theoria motus corporum solidorum, 1765, neue Aufl. 1790 (vgl. dort besonders Art. 446—447), während die erste Vorstellung von der Existenz der drei freien Axen auf Segner, Specimen theoriae turbinum, Halle 1755, zurückgeführt wird.



Gleichung der lebendigen Kräfte. Jedoch ist das Princip der geringsten Wirkung trotz der besondern Fassung, die ihm Lagrange (vgl. unsere Nr. 124) gegeben hat, noch immer eines derjenigen, dessen Ableitungsart am wenigsten auf die Systematik von Einfluss werden darf. Es eignet sich also auch nicht, in positiver Weise über die Güte einer Systemanordnung zu entscheiden. In negativer Hinsicht muss es aber einem Lagrange als Vorzug ausgelegt werden, dass er dasselbe unter den allgemeinen Eigenschaften der Bewegung an letzter Stelle aufgeführt hat.

Da Integrationen, welche die Beziehungen zwischen endlichen Bewegungsgrössen oder zwischen lebendigen Kräften aufstellen, in der Statik nur indirect oder als ausschliesslich infinitesimale Grössen betreffend vorkommen, so ist der Parallelismus zwischen Dynamik und Statik insoweit vorhanden, als es sich in beiden Gebieten nur um die dem Augenblick entsprechenden Eigenschaften eines Kräftesystems, also in Beziehung auf das Verhältniss von Bewegungsraum und Zeit um Differentialgleichungen zweiter Ordnung handelt. Das, was die Dynamik specifisch zu enthalten hat, betrifft die Bestimmung der Geschwindigkeiten und der Räume, also im Allgemeinen erste und zweite Integrationen der Ausgangsgleichungen, die man sehr charakteristisch Momentangleichungen nennen könnte.

Die beiden vierten Sectionen entwickeln jene universelle Form der allgemeinen Kräftegleichung, die sich durch die Einverleibung der Bedingungsgleichungen mit den unbestimmten Coefficienten ergiebt und mithin die Systemverbindungen in ein Kräftesystem auflöst. Hiedurch erhält die ganze Combination den Charakter einer Gruppe von Kräften, die an sich frei sind und sich nur gegenseitig beschränken.

Mit den erwähnten vier Abschnitten sind für die Statik wie für die Dynamik die allgemeinen und principiellen Lehren abgeschlossen, und es beginnt mit den folgenden Sectionen das Gebiet der besondern Aufgaben, die mit der speciellen Beschaffenheit einer gegebenen mechanischen Combination von Kräften und Verbindungsarten zusammenhängen. Die Auflösungsmethode beruht auch hier auf der allgemeinen Regel, die unabhängigen und willkürlichen Verschiebungsvariationen zu ermitteln, indem man nach Maassgabe der Bedingungsgleichungen in der einen oder andern Art die erforderlichen Eliminationen durchführt.

148. In der Statik beginnt Lagrange die besondern Auf-

gaben mit dem Fall, in welchem sich das mechanische System auf einen einzigen Punkt reducirt. Die Regel der Zusammensetzung der auf einen Punkt wirkenden Kräfte erscheint hier als eine Specialisirung[1]) der allgemeinen, für jedes beliebige System entwickelten Gleichgewichtsbedingungen.

In der Dynamik treten an die Stelle der besondern Aufgaben zunächst noch Specialfälle von allgemeinerem Charakter. Die analytisch so wichtigen Approximationen und der Typus derjenigen Bewegung, bei der nur kleine Schwingungen eines Systems in Frage kommen, bilden den Uebergang. Alsdann folgt der für die kosmische Mechanik normgebende Fall eines freien Systems von Körpern, die als Punkte betrachtet werden können und von Attractionskräften afficirt sind. Hierauf gelangen dann die unfreien Bewegungen und endlich noch die schwierige Theorie der Rotation zur Behandlung.

In der Statik, wo der Punkt den Anfang der besondern Aufgaben machte, bildet natürlich der Körper von beliebiger Gestalt den Schluss. Dazwischen liegen die verschiedenen Verbindungsarten durch biegsame Fäden und starre Linien, sowie die hieher gehörigen unter diese Schemata fallenden Einzelprobleme, wie das des Gleichgewichts am Seilpolygon und in der Kettenlinie. Für unsern Zweck ist jedoch die genauere Erwähnung der besondern Anwendungen überflüssig. Von Interesse sind in Rücksicht auf die Principien und das System nur die allgemeinen Methoden selbst, vermöge deren, abgesehen von den neuen Specialaufschlüssen, die alten Lösungen der besondern Aufgaben mindestens eine neue Form erhalten und, was das Wichtigste ist, in einen systematischen Zusammenhang treten, wie er früher noch nie in gleicher Vollkommenheit sichtbar geworden war. Im Hinblick auf Lagranges Analytische Mechanik kann man behaupten, dass die besten Bestandtheile der Darstellungsform, die sich bis heute in den Lehrbüchern und Cursen dieser Wissenschaft antreffen lassen oder in einzelnen Abhandlungen bekundet haben, die Grundgestalt der Auffassungsart indirect oder direct jenem Fundamentalwerk verdanken. Hiemit soll jedoch nicht gesagt sein, dass die systematisirenden, die Methode und den innern Zusammenhang aufklärenden Wirkungen der Leistung Lagranges abgeschlossen und erschöpft seien. Ganz abgesehen von der grundsätzlich zur Hauptsache

---

[1]) Méc. anal. Bd. I (1811) Statik Sect. V, Art. 7 fg.

gemachten analytischen Formgebung, werden die materiell sachlichen Gesichtspunkte, in denen Lagrange, nicht weil, sondern trotzdem er Analytiker war, in einer so ausserordentlichen Weise sich auszeichnete, noch weiterhin entschieden mehr, als bisher geschehen ist, maassgebend werden müssen.

Am wenigsten hat sich die innige Verbindungsart Bahn gebrochen, vermöge deren Lagrange die Hydrostatik und die Hydrodynamik am Schluss der Statik und Dynamik nur als besondere Anwendungsfälle der allgemeinen Mechanik behandelt und bei diesen Zweigwissenschaften die zwar historische, aber rationell unhaltbare Aufstellung specifischer Principien ausgeschlossen hat. Die besondern Eigenschaften, welche bei den Flüssigkeiten oder bei den Gasen gewisse sehr allgemeine Verhältnisse ihres Gleichgewichts und ihrer Bewegung ausdrücken, sollen aus den allgemeinen Principien der Mechanik abgeleitet, aber nicht postulirt werden. Das Einzige, was nach Lagrange als gegeben vorausgesetzt werden muss, ist die besondere Gestaltung der Aggregation und der Verbindungsart zwischen den Theilen des Systems. Die Flüssigkeiten werden daher von vornherein als Häufungen von Molekülen betrachtet, und man hat sich vorzustellen, dass die angreifenden Kräfte jedes der Theilchen erstens direct und zweitens noch indirect vermöge der gegenseitigen Beziehungen der Moleküle afficiren.

Offenbar ist es eine unumgängliche Forderung der wissenschaftlichen Technik, die Mechanik der Flüssigkeiten soweit als möglich zu einer blossen Consequenz der allgemeinen mechanischen Principien zu machen. Schon lange vor Lagrange, ja schon bei der Grundlegung der modernen Wissenschaft hatte man angefangen, einzelne der allgemeinen mechanischen Gesichtspunkte unmittelbar auf das Verhalten der Flüssigkeiten zu übertragen. So hatte namentlich Galilei das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten in dieser Richtung zur Anwendung gebracht. Indessen trotz aller Anläufe, die zur Generalisirung hätten führen können, hatte sich vorherrschend die alte, in der Verfahrungsart von Archimedes wurzelnde Ueberlieferung behauptet, derzufolge gewisse specifische Axiome den Eingang zur Mechanik der Flüssigkeiten eröffnen und so zugleich die Kluft offenhalten mussten, durch welche bis auf und nach Lagrange die Statik und Dynamik der Flüssigkeiten eine verhältnissmässig isolirte Wissensabtheilung bildete. Es ist nun das grosse Verdienst des Verfassers der Analytischen Mechanik, die Tragweite seiner allgemeinen Kräftegleichung über das Bereich

der Flüssigkeiten erstreckt und so erst das Reich der Mechanik oder vielmehr ihrer allbeherrschenden Grundgesetze vervollständigt zu haben.

149. Solange die Statik der tropfbaren und der gasförmigen Flüssigkeiten noch besondere specifische Principien zur Lösung ihrer Aufgaben voraussetzt, muss dies auch die Dynamik dieses Gebiets in demselben Maasse thun. Denkt man sich nämlich auch immerhin die Hydrodynamik vermöge des d'Alembertschen Princips auf die Hydrostatik, d. h. die Bewegungsgesetze der Flüssigkeiten auf die Gleichgewichtsbedingungen derselben zurückgeführt, so müssen mindestens die specifisch statischen Axiome, die man für das Gleichgewicht der Flüssigkeiten zu Hülfe nimmt, auch in der Dynamik der Flüssigkeiten eine, wenn auch nur indirecte Grundlage abgeben. Hiezu kommen aber noch thatsächlich besondere Voraussetzungen der Hydrodynamik, welche dahin wirken, dass diese schwierige Wissenschaft als von der allgemeinen Mechanik ziemlich isolirt erscheint.

Ohne hier wieder auf die besondern hydrostatischen Axiome von Archimedes zurückzukommen, sei nur an den tastenden Zustand erinnert, in welchem sich die Hydrostatik in Rücksicht auf die Fassung ihrer Grundprincipien sogar noch in der Mitte des 18. Jahrhunderts und selbst unter den Händen desjenigen Schriftstellers befand, der zuerst zu den allgemeinen Gleichungen des Gleichgewichts der Flüssigkeiten gelangte. Untersucht man nämlich Clairauts [1]) berühmte Arbeit über die Erdgestalt auf die Fassung der darin gebrauchten oder kritisirten Principien der Hydrostatik, so findet man das Ringen nach einer einheitlichen Auffassung und namentlich nach einer Zurückführung der Gleichgewichtsverhältnisse auf die gewöhnlichen statischen Principien nur erst bei einem sehr mässigen Anfang. Zunächst handelt es sich nur um die Unterordnung der Huyghensschen Voraussetzung, dass zum Gleichgewicht der Oberfläche die Perpendicularität der centralen Kraftresultanten gegen diese Oberfläche gehöre, und der Newtonschen Forderung eines Gleichgewichts der centralen Flüssigkeitssäulen unter ein umfassenderes und vollständigeres Princip. Es ist dies bei Clairaut das gleich an die Spitze gestellte [2]), welches ausspricht, dass es

[1]) Théorie de la figure de la terre, tirée des principes de l'hydrostatique, Paris 1743, 2. Aufl. 1808.

[2]) Ibid. erste Abth. § 1.

zum Bestehen des Gleichgewichts nöthig sei, dass ein beliebiger canalförmiger Theil der Flüssigkeit, welcher dieselbe durchschneidet, für sich selbst im Gleichgewicht sei, so dass also in ihm alle Bestrebungen der Theilchen, sich vermöge der afficirenden Kräfte zu bewegen, einander aufheben. Dieser Canal kann mit seinen offenen Enden an der Oberfläche münden oder auch, wie Clairaut besonders deducirt, in sich selbst zurückkehren. Bouguer[1]) hatte es in unzureichender Weise mit einer blossen Combination der Huyghensschen Voraussetzung und des Newtonschen Kriteriums versucht. Maclaurin dehnte das Newtonsche Merkmal, welches im Gleichgewicht der centralen Flüssigkeitssäulen bestand, dahin aus, dass um jeden beliebigen Punkt d. h. um jedes Flüssigkeitstheilchen alle nach der Oberfläche hin führenden Flüssigkeitssäulen gegen dasselbe einen gleichen Druck ausüben müssten. Weit allgemeiner war der erwähnte Ausgangspunkt Clairauts, und nach seinem Princip des beliebigen Canals gelangte er zur Aufstellung der bekannten partiellen Differentialgleichungen, welche die Bedingungen des Gleichgewichts der Flüssigkeiten einschliessen. Das anregende Problem, in dessen Interesse man sich bis auf Clairauts in einem gewissen Sinn abschliessende Arbeit an der Bemeisterung der Gleichgewichtsbedingungen einer Flüssigkeitsmasse mit jenen unzureichenden Principien versucht hatte, war die Bestimmung der Erdgestalt, d. h. das Verständniss der allgemeinen Form ihrer Oberfläche gewesen. Diese Form musste sich aus rein hydrostatischen Principien begreifen lassen, sobald man im Allgemeinen die Aufgabe gelöst hatte, die Körperform anzugeben, in welcher eine Flüssigkeitsmasse dauernd im Gleichgewicht bleibt, wenn jedes ihrer Theilchen unter dem Einfluss der in diesem Fall fraglichen Kräfte der Schwere und der centrifugalen Rotationsantriebe steht.

An Stelle des Clairautschen Canalprincips kann man unmittelbar ein weit einfacheres setzen, welches an die erwähnte Maclaurinsche Idee erinnert. Man kann nämlich von dem Grundsatz der Gleichheit des Drucks in allen Richtungen ausgehen, sich die Flüssigkeit in differentielle rechtwinklige Parallelepipeden zerlegt denken und für jede zwei einander gegenüberstehende Seitenflächen Druck, Gegendruck und Kraft in Anschlag bringen.

[1]) Comparaison des deux lois etc. in den Mémoires de l'Académie des Sciences, 1734, S. 21.

Die Antriebe müssen nach beiden Richtungen gleich sein, und man erhält so für drei Coordinatenaxen die Gleichungen des Gleichgewichts. Dies ist die Art, auf welche zuerst Euler die seitdem üblich gewordene Ableitung der Gleichungen bewerkstelligte. Was Euler in dieser Weise in den Memoiren der Berliner Akademie (von 1755 Bd. XI) vorgezeichnet[1]) hatte, und wonach man sich noch heute häufig richtet, genügte jedoch dem rastlos nach Verallgemeinerung strebenden Lagrange keineswegs. Dieser sah vielmehr das Princip der Gleichheit des Drucks in jedem Sinne, welches die Eigenschaft der im Gleichgewicht befindlichen Flüssigkeit ausdrückt, als einen entbehrlichen Erfahrungssatz an[2]). Nachdem er der geschichtlichen Ueberlieferung zunächst dadurch ein gewisses Zugeständniss gemacht hatte, dass er in seiner an die Spitze gestellten analytischen Darlegung das Gleichgewicht eines beliebigen Canals im Sinne Clairauts zum Ausgangspunkt machte, liess er hierauf die völlig selbständige Ableitungsart der Gleichgewichtsgleichungen unmittelbar aus der universellsten Form der allgemeinen Kräftegleichung folgen. Diese Herleitung[3]) beruht einzig und allein auf einer geschickten Aufstellung der allgemeinen Form der Bedingungsgleichung, deren Variation, mit einem unbestimmten Coefficienten versehen, dasjenige virtuelle Gesammtmoment ergiebt, welches zur Herstellung der universellsten Form der fundamentalen Gleichgewichtsgleichung nach der von uns (Nr. 144) auseinandergesetzten Methode erforderlich ist. Lagrange unterscheidet hiebei zwischen den als unzusammendrückbar vorausgesetzten und den gasförmig elastischen Flüssigkeiten. Im Fall der ersteren besteht für die übrigens als unabhängig von einander und in jeder Richtung frei beweglich vorausgesetzten Moleküle die Nothwendigkeit, die Dichtigkeit ihrer gegenseitigen Lagerung beizubehalten. Das differentielle Körperelement wird also constant bleiben müssen, und hierin besteht die Bedingungsgleichung, welche die besondere Form des Systems betrifft. Die Unveränderlichkeit des Volumen trotz der Veränderung der Gestalt wird also[4]) dadurch ausgedrückt werden, dass man $dx\ dy\ dz$ — const. $= 0$ als Bedingungsgleichung für die besondere Form des Systems ansieht und mithin die Variation dieses Ausdrucks, d. h.

[1]) Principes généraux de l'état de l'équilibre des fluides.
[2]) Méc. anal. Bd. I (1811) Statik Sect. VI, Art. 6.
[3]) Ibid. Sect. VII, Art. 10 fg. [4]) Ibid. besonders Art. 11.

kurzweg die Variation des Volumenelements mit einem unbestimmten Multiplicator als Glied in die allgemeine Fundamentalgleichung einführt. Alsdann zeigt die blosse Gestalt dieser Gleichung unmittelbar das Verhältniss zwischen Statik und Hydrostatik an, indem sie bemerken lässt, dass die Beziehungen, welche für ein System freier und isolirter Punkte gelten, nur durch das der Volumenconstanz entsprechende Bedingungsglied der Gleichung bestimmter gestaltet werden. Ja man könnte behaupten, dass sich fast keine einfachere Anwendung der allgemeinen Fundamentalformel und des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten denken lasse, als diejenige auf flüssige Systeme.

150. Liegt dagegen der Fall eines elastischen Fluidum vor, so tritt an die Stelle der Volumenconstanz das Bestreben zur Ausdehnung des Volumens. Man kann nun diese Elasticität entweder als eine Kraft mit ihrem virtuellen Moment den sonst gegebenen Kräften hinzufügen, wie es Lagrange thut, oder man kann, um auch in der logischen Vorstellungsart die Ebenmässigkeit nicht zu verlassen, in der gegebenen Determination der Theilchen zur gegenseitigen Abstossung ebenso eine besondere Systembedingung sehen, wie es im Fall der unzusammendrückbaren Flüssigkeiten die Volumenconstanz war. Alsdann erhält das sich in jedem Fall ergebende Ergänzungsglied der allgemeinen Gleichung nicht blos eine analytisch für beide Flüssigkeitsarten übereinstimmende Form, sondern auch einen entsprechend übereinstimmenden Sinn. Es ist nämlich auch für den Fall der gasförmigen Flüssigkeiten die Variation des Volumenelements mit einem Coefficienten zu den übrigen virtuellen Momenten in die allgemeine Fundamentalgleichung einzuführen. Der sonst unbestimmte Coefficient ist aber in diesem Fall die mit dem System selbst gegebene Elasticität[1]). Auch Lagrange verfehlt nicht, diese Verwandtschaft der Form hervorzuheben; aber es scheint, dass er sich davor scheute, gegebene Kräfte, die nicht nach Art der Vorzeichnung fester Bahnen oder der Entgegensetzung fester Hindernisse wirken, sondern den äussern Kräften gleichartig sind, als eigentliche Systembedingungen gelten zu lassen. Indessen hat er selbst am meisten zur Ausgleichung dieses Unterschieds beigetragen, indem er durch die Einführung der die Systemverfassung ausdrückenden Glieder seiner universellen Kräftegleichung grade

---

[1]) Ibid. Sect. VIII, Art. 2.

die Systembedingungen in eine Combination unbestimmter Kräfte von bestimmten Verhältnissen auflöste. Wo nun einmal zufällig die Systemverfassung in Gestalt einer Kraft, welche das Verhältniss der Theile des Systems gegeneinander bestimmt, unmittelbar gegeben ist, darf dieser Umstand nicht hindern, die Vorstellungsart und Methode beizubehalten, vermöge deren in der allgemeinen Gleichung die Systemverfassung die ihr zugewiesene analytische Vertretung jederzeit in sichtbarer Weise haben muss. Ein System völlig freier Punkte, die überdies in gar keiner gegenseitigen Beziehung stehen, genügt niemals, um die gegebenen Kräfte, die auf das System wirken sollen, von einem Punkt zum andern in irgend welche Relation zu bringen. Es ist daher nothwendig, irgend eine innere Beziehung als Systemverfassung anzusehen. In der universellen Gleichung Lagranges sind die Variationen, welche die Factoren der gegebenen Kräfte bilden, zunächst absolut willkürlich gedacht, d. h. jeder Angriffspunkt kann nach allen Richtungen mit einer der angreifenden Kraft entsprechenden, also völlig freien Geschwindigkeit verschoben gedacht werden. In Rücksicht auf das Virtuelle und Verhältnissmässige dieser Geschwindigkeiten ist es sogar ganz unnöthig, noch besonders an diejenige Geschwindigkeit zu denken, welche einer freien Wirkung der gegebenen Kraft entsprechen würde. Man kann also sagen, dass die betreffenden Variationen, abstract betrachtet, zunächst völlig arbiträr sind, und dass erst die der Systemverfassung entsprechenden Bedingungsglieder der Gleichung die Einschränkungen ergeben.

Im Geiste dieser Auffassung muss nun aber jegliches Flüssigkeitssystem, mag es unzusammendrückbar oder elastisch sein, als eine Gruppe von materiellen Punkten angesehen werden, die in jedem Sinne beweglich sind und absolut frei sein würden, wenn nicht als besondere Systembeschaffenheit eine innere gegenseitige Beziehung hinzuträte, vermöge deren das Volumen, welches diese Punkte einnehmen, jederzeit bestimmt ist. Die Bestimmungsart des Volumens, d. h. der Entfernungen, in denen die Theilchen, wohin sie sich auch bewegen mögen, aufeinander wirken, und die an ihnen thätigen Kräfte aufeinander übertragen; — diese Bestimmungsart gestaltet sich nun verschieden, je nachdem die eine oder die andere Art der Fluida vorliegt. Die Bedingungsgleichung wird aber in jedem Fall das Gesetz der Constanz oder der Veränderung des Volumens betreffen, und denkt man sich im letzteren

Fall diese Veränderung durch eine Bewegungsgleichung ausgedrückt, so wird sich der unbestimmte Coefficient ihrer Variation schliesslich als Kraft der Elasticität näher bestimmen müssen. Im Gleichgewicht thut die Expansivkraft offenbar nichts weiter, als dass sie gewissen zusammendrückenden Gegenkräften die Waage hält. Eben dasselbe thut aber aus einem gewissen Gesichtspunkt auch die Unzusammendrückbarkeit. Der Unterschied ist nur der, dass im letzteren Falle die hervorgerufene statische Reaction, die dem unbestimmten Coefficienten entspricht, eben in einer blossen Rückwirkung gegen die angreifenden Kräfte besteht und daher einen blossen Widerstand nach Maassgabe dieser Kräfte entwickelt, während im Fall der Gase ausser irgend einem Maass des Widerstandes, der die Zusammendrückung irgendwo hemmt, zugleich auch das positive Bestreben zur Expansion vorhanden ist. Dieser Umstand betrifft aber nur die Vorzeichen des Coefficienten und deren Interpretation. Es begreift sich also auf eine sehr einfache Weise, wie das von der Bedingungsgleichung herrührende Glied der universellen Formel für das Gebiet der tropfbaren und der gasförmigen Fluida wesentlich einerlei Gestalt annehmen muss. Auch beruht hierauf allein der Triumph der höchsten Verallgemeinerung, indem ohne diesen Zusammenhang die gemeinsamen Bestandtheile fehlen würden, welche sowohl der Theorie der Gase als derjenigen der tropfbaren Flüssigkeiten angehören. Müsste man von der allgemeinen mechanischen Kräftegleichung ohne Einschaltung sofort zu einer von beiden Arten der Flüssigkeiten übergehen, so wäre dies ein Sprung, der die Existenz einer wirklich allgemeinen Theorie des Gleichgewichts der Fluida ausschlösse. So aber führt man die willkürliche Beweglichkeit aller Theilchen ein und denkt dieselbe nur durch eine Ursache bestimmt, welche das Volumen vorzeichnet. Diese Vorzeichnung des Volumens ist nun das eine Mal einem festen Hinderniss ähnlich und besteht das andere Mal in einer Kraft, die sich mit andern Kräften messen kann. Diese Verzweigung der Voraussetzungen beruht aber nur auf Quantität und Sinn der vorausgesetzten innern Beziehungskräfte. Ob man die zwischen den Theilen wirkende Kraft in dem einen Fall als positives Bestreben zur Expansion denkt, in dem andern Fall aber dieses Bestreben gleich Null setzt, dafür aber den ideell als unüberwindlich vorgestellten Widerstand gegen die Zusammendrückung einführt; — diese Verschiedenheit der Gestaltungen ändert nicht die allgemeinste Form eines flüssigen Systems.

Schliesslich sei noch bemerkt, dass die Vorstellung von der allseitigen Beweglichkeit der Theilchen die axiomatische Hypothese, dass für das Gleichgewicht der Druck um einen Punkt in allen Richtungen gleich sein müsse, überflüssig macht, sobald man mit Lagrange diese durchgängige Beweglichkeit und zugleich die innern Beziehungen der Volumenbestimmung nach den gewöhnlichen mechanischen Grundsätzen in die allgemeine Gleichung aufnimmt. Alsdann ist diese Gleichheit des Drucks nicht eine Voraussetzung, sondern ein Ergebniss, nicht ein Hülfsmittel zur Ableitung des Gleichgewichts, sondern ein aus den festgestellten Gleichgewichtsbedingungen herausgehobener Specialsatz. Der Begriff der völligen Beweglichkeit der Theilchen ist also hinreichend, und es bedarf nicht noch des Axioms von dem gleichen Druck, um die Grundlagen der Hydrostatik logisch streng zu ordnen.

151. Mit der Unterordnung der gesammten Hydrostatik unter die allgemein mechanische Grundgleichung ist auch die Stellung der Hydrodynamik entschieden; denn genau dieselbe Verfahrungsart, welche aus der statischen Fundamentalgleichung die hydrostatische hervorgehen lässt, macht es auch möglich, die allgemeine dynamische Gleichung in eine hydrodynamische zu verwandeln. In den letzten Sectionen der Analytischen Mechanik hat Lagrange auch diese Aufgabe ausgeführt. Er hat es sogar vorgezogen, das Hauptgewicht auf die unmittelbare Entwicklung der Bewegungsgleichung der Flüssigkeiten aus der allgemeinen mechanischen Bewegungsgleichung zu legen, anstatt sich mit der Wendung zu begnügen, im Sinne seiner eignen Fassung des d'Alembertschen Princips einfach in die fertige hydrostatische Grundgleichung die den wirklichen Bewegungen entgegengesetzten Kräfte einzuführen. Nach Alledem, was wir über die Einheit von Statik und Dynamik und über die allgemeine Kräftegleichung früher (Nr. 146) gesagt haben, wäre es überhaupt nicht nöthig gewesen, eine getrennte Behandlung eintreten zu lassen.

Um die Bedeutung der von Lagrange vollzogenen Einverleibung der Hydrodynamik in die allgemeine Grundgestalt der mechanischen Kräftebeziehungen zu ermessen, ist es erforderlich, auf die Entwicklung der hydrodynamischen Principien einen Blick zu werfen. Eigentlich wissenschaftliche Probleme hydrodynamischer Art finden sich natürlicherweise noch später ein, als diejenigen der allgemeinen Dynamik, deren Lösung von ihnen vorausgesetzt wird. Torricelli konnte bei dem Aufsteigen der Flüssigkeiten aus

kleinen Oeffnungen bis annähernd zur Niveauhöhe der Gefässe seine wissenschaftliche Anticipation über die Ausflussgeschwindigkeit offenbar nur machen, insofern ihm die allgemeine dynamische Beziehung zwischen ursprünglicher Aufsteigungsgeschwindigkeit und zugehöriger Aufsteigungshöhe geläufig war. Da er, nach den Thatsachen der Erfahrung, voraussetzen musste, dass, abgesehen von secundären Hemmungen und Einschränkungen, das verticale Aufsteigen aus sehr kleinen Oeffnungen bis zur Niveauhöhe reiche, so war der Schluss, dass die an der Ausströmungsstelle wirksame Geschwindigkeit der Quadratwurzel der Niveauhöhe proportional sei, nur ein allgemein dynamisches Zubehör des Erfahrungssatzes von dem Aufsteigen. In der That vermochte er auch nicht, seinen nach Anleitung der Erfahrung anticipirten Satz aus mechanischen Principien zu beweisen[1]). Auch Newton brachte keine exacte Deduction zu Stande[2]), indem er die unzutreffende Voraussetzung machte, dass bei der Bewegung nach der Oeffnung hin ein Theil der Flüssigkeit gänzlich ruhe. Es war also nicht die bekannte Contraction des Strahls, durch deren Berücksichtigung der Fehler der Vorstellungsart gehoben werden konnte. Was diese Vorstellungsart anbetrifft, so hatte zwar vor Newton schon Varignon eine befriedigendere Erklärung aufgestellt, welche darauf beruhte, dass der Druck der Flüssigkeitssäule, die der Oeffnung entspricht und bis zum Niveau reicht, der in der Oeffnung befindlichen Flüssigkeitsmasse die fragliche Geschwindigkeit ertheile. Indessen war diese Idee noch nicht dynamisch genug gehalten gewesen, indem sie annahm, dass die Geschwindigkeit unmittelbar entstehe, und über die Zeit keine Rechenschaft gab. Die erforderliche Verbesserung liess sich leicht dadurch vornehmen, dass man sich vorstellte, der Druck der Flüssigkeitssäule wirke während des Durchgangs durch die Oeffnung auf die betreffenden Massentheile als beschleunigende Kraft.

Mit einer Erläuterung jenes Torricellischen Satzes war nun aber nur der besondere Fall verhältnissmässig sehr kleiner Oeffnungen behandelt, da ja zur annähernden Erhaltung eines gleichen Drucks auch eine annähernde Constanz des Niveaus im Gefäss vorausgesetzt werden musste. Stellte man sich dagegen die Aufgabe, die Bewegungen der Flüssigkeiten in Röhren zu bestimmen,

---

[1]) Torricelli, De motu gravium etc. 1644.
[2]) Phil. nat. princ. math. lib. II, prop. 36.

so war diese von ganz anderer Natur. Daniel Bernoulli gab die Lösung derartiger Aufgaben in seiner von uns schon Nr. 96 besprochenen Hydrodynamik unter Benutzung des Princips der Erhaltung der lebendigen Kräfte. Setzt man bei der verticalen Bewegung in der Röhre voraus, dass eine horizontale Schicht der Flüssigkeit an die Stelle der andern tritt und sich in allen Punkten mit übereinstimmender Geschwindigkeit wie ein Ganzes bewegt, so werden an den verschiedenen Stellen der Röhre in Rücksicht auf deren verschiedene Weite die Geschwindigkeiten im umgekehrten Verhältniss der jedesmaligen Querschnitte stehen müssen. Man hätte daher auch unmittelbar diese von der Systemverfassung herrührende Nothwendigkeit sammt der zugehörigen Ausgleichung der an den verschiedenen Theilen der Flüssigkeit wirkenden Kräfte ebenso behandeln können, wie es schliesslich bei dem Problem des zusammengesetzten Pendels geschehen war. Man hätte die verlornen und gewonnenen Kräfte bestimmen und so unmittelbar die Fundamentalbeziehung normiren können. Indessen wurde, wie gesagt, thatsächlich das Princip der lebendigen Kräfte zum Ausgangspunkt der Lösung derartiger Aufgaben gemacht. Erst d'Alembert ersetzte in dieser Art von Aufgaben das Princip der Erhaltung der lebendigen Kräfte durch die seiner bekannten allgemein dynamischen Wendung entsprechende Rücksicht auf die verlornen Kräfte. Er legte aber hiebei zunächst, d. h. noch in seinem Traité des fluides (1744) die vorher erwähnte Voraussetzung des Parallelismus der Schichten zu Grunde, welche nur für verhältnissmässig enge Röhren zulässig ist. Zu einer ganz allgemeinen Auflösungsnorm der hydrodynamischen Probleme gelangte d'Alembert erst ein halbes Dutzend Jahre später, indem er die hydrostatischen Gleichungen Clairauts durch allgemeine hydrodynamische Gleichungen ergänzte und sein eignes Princip der Zurückführung der Dynamik auf die Statik auch für die Bewegung der Flüssigkeiten geltend machte. So gelangte er in seinem Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides (1752) zur Aufstellung der partiellen Differentialgleichungen für die Bewegung von tropfbaren und von expansiven Flüssigkeiten[1]). Die vollkommenste Form dieser Gleichungen wurde jedoch erst von Euler 1755 in den Memoiren der Berliner Akademie[2]) gegeben,

[1]) Namentlich Cap. 8 dieser Schrift enthält eine Skizze zur Hydrodynamik.

[2]) Principes généraux du mouvement des fluides.

so dass also diesem deutschen Mathematiker, wie wir (Nr. 149) gesehen haben, zugleich die abschliessende Deduction und Aufstellung der hydrostatischen und der hydrodynamischen Grundgleichungen zuzuschreiben ist.

Von nun an war Alles insoweit befriedigend gestaltet, als man nicht etwa daran Anstoss nahm, dass noch immer die Gleichheit des Drucks in allen Richtungen um einen Punkt als specifisches Axiom für die Hydrostatik und mithin mittelbar auch für die Hydrodynamik zu Grunde lag. Lagrange lehrte, wie man dieses Axiom ausmerzen könne, und hiemit wurde auch seine Theorie der Bewegung der Flüssigkeiten zu einer blossen Consequenz der allgemeinen Kräftegleichung. Es braucht also wohl kaum noch ausdrücklich wieder hervorgehoben zu werden, dass die allgemeine hydrodynamische Gleichung genau dasselbe Bedingungsglied wie die hydrostatische enthalten muss, und dass der einzige Unterschied die Einführung der den wirklichen Bewegungen entgegengesetzten Kräfte betrifft. Die Classe von Gliedern, durch welche diese Kräfte bezeichnet und ausgezeichnet werden, hat aber hier nicht im Mindesten einen andern Sinn, als in der allgemeinen dynamischen Gleichung, und wir brauchen daher von denselben nicht besonders zu reden.

Im Allgemeinen sieht man, dass der geschichtliche Entwicklungsgang, durch welchen man zu den allgemeinsten Principien der Hydrodynamik gelangt ist, sich in wesentlicher Uebereinstimmung mit den Fortschritten in der Vertiefung der allgemeinen dynamischen Principien befunden hat. Ehe man zu den abstracten Auffassungen gelangte, hatte man sich mit dem Princip der Erhaltung der lebendigen Kräfte beholfen. Erst mit der d'Alembertschen Wendung, deren allgemeiner dynamischer Sinn nur eine Verallgemeinerung der Gesichtspunkte war, die Jacob Bernoulli für das zusammengesetzte Pendel geltend gemacht hatte, — erst mit dieser Wendung war der Weg eröffnet, dieselbe Verfahrungsart, vermöge deren man in der allgemeinen Mechanik auf die letzten Principien zurückgeht, auch in der Hydrodynamik zur Anwendung zu bringen. Lagrange hat in dieser Richtung den formellen Abschluss vollzogen, indem er die Consequenzen seiner allgemeinen Anschauungsweise der mechanischen Beziehungen auch für die Mechanik der Flüssigkeiten geltend machte. Nach diesem Abschluss kann man aus einem gewissen Gesichtspunkt sogar behaupten, dass die Mechanik der gasförmigen Systeme

einen einfacheren Fall repräsentire, als etwa die Mechanik fester Körper und besonderer maschinenartiger Systemverfassungen. Je freier nämlich die einzelnen Theile oder Punkte des Systems gedacht werden, um so einfacher ist es. Nun besteht das ideelle Schema eines gasförmigen Systems in lauter frei beweglichen Theilchen oder Punkten, deren einzige Systemverbindung in einer Repulsivkraft besteht, welche sich bestrebt, das Volumen zu vergrössern. Ein solches Systemschema ist nun aber das einfachste, welches sich nur erdenken lässt; denn eine Gruppe völlig freier Punkte ist an sich noch kein verbundenes System, und das Mindeste, was man noch ausserdem fordern muss, ist irgend eine Kraft, durch welche die Theilchen in Beziehung treten. Nur vermöge einer solchen innern Kraft fällt die absolute Isolirung fort, die sonst zwischen den getrennten Theilchen statthaben würde. Eine Gruppe mechanisch isolirter Punkte kann nur in dem Sinne ein System heissen, in welchem man etwa auch Null eine Grösse nennt. In Wahrheit zerfällt eine solche Gruppe in so viele Systeme, als sie Punkte hat; denn jeder Punkt ist, insofern auf ihn mehrere Kräfte wirken und dadurch genöthigt werden, einander zu beschränken, allerdings in einem gewissen Sinne ein System. Der Punkt repräsentirt an sich eine als untheilbar vorgestellte Verbindung, und in der That unterliegen die an sich freien virtuellen Verschiebungen um den Punkt einer Einschränkung, sobald man auch nur eine von etwa zwei Kräften als Repräsentanten der Systemform betrachtet. Der Umstand, dass sich der Punkt nicht theilen kann, und dass daher nicht jede von beiden Kräften ihren eignen, mechanisch isolirten, wenn auch örtlich mit demjenigen der andern Kraft zusammenfallenden Angriffspunkt hat, macht den mechanisch einheitlichen Punkt selbst zu dem einfachsten mechanischen System. Wenn man nun in diesem Sinne zugestehen muss, dass eine Gruppe völlig freier und isolirter Punkte, wenn man von aller mechanischen Verbindung absieht, selbst kein System ist, sondern in so viele Systeme als Punkte zerfällt, so ist auch klar, dass der erste rationelle Schritt in der Mechanik darin bestehen muss, den einfachsten Begriff eines aus mehreren Theilen bestehenden Systems darzulegen, welches den Angriffsgegenstand beliebiger Kräfte bilden soll.

152. Der eben erörterte Gedanke führt uns von dem Ende der Mechanik Lagranges auf deren Anfang zurück. Der Ausgangspunkt war die Vorstellung einer Anzahl von Angriffsörtern

für beliebige Kräfte, und der Inbegriff dieser Angriffsörter vertrat die noch ganz unbestimmte Idee eines mechanischen Systems oder, wie man auch sagen könnte, einer mechanischen Anordnung. Jede besondere Anordnung beruht auf dem Vorhandensein irgend einer Art von Verbindung zwischen den Theilen, und das Vorhandensein irgend welcher Beziehungen, die einen Zusammenhang und eine Abhängigkeit der Theile voneinander ergeben, wird auch überall stillschweigend vorausgesetzt. Andernfalls hätte es z. B. gar keinen Sinn, die virtuellen Momente für verschiedene Punkte zu addiren; es müsste vielmehr das Gleichgewicht für jeden einzelnen Punkt ermittelt werden, und von einem Gesammtsystem wäre aus Mangel an mechanischem Zusammenhang gar nicht die Rede. Höchstens könnte man phänomenal und rein geometrisch danach fragen, welches Gesammtbild der Lage, Bewegung und Gruppirung aus der Vereinigung des Verhaltens der einzelnen Punkte in einer Gesammtanschauung entstände.

Was ist nun aber die logisch genauste Art und Weise, den Zusammenhang zwischen den Angriffsörtern der Kräfte ganz im Allgemeinen vorzustellen, ohne dabei an eine specielle Verbindungsart denken zu müssen? Der abstracte Gedanke der Abhängigkeit der Bewegung eines Angriffspunktes von derjenigen eines andern Angriffspunktes scheint eine genügende Vorstellung zu sein; aber exacter ist es, anstatt der Bewegung die Lage zu setzen; denn diese Vorstellungsart gilt auch für die Ruhe und das Gleichgewicht. Die Lage eines Angriffspunkts ist also ihrer Möglichkeit nach und zwar in Rücksicht auf Dauer oder Veränderung durch diejenige eines andern Angriffspunkts bestimmt, so dass sowohl das statische als das dynamische Verhalten der verschiedenen Punkte sich gegenseitig beschränkt. Auf diesen Beschränkungen beruht die Gestalt, welche die Wirkung der gegebenen, äussern, unmittelbar auf jeden einzelnen Angriffsort als wirksam gedachten Kräfte annehmen kann. Auf diesen Beschränkungen beruht also, um das eben Gesagte nur noch in andere Worte zu fassen, die mögliche d. h. virtuelle Kräftewirkung. Zugleich sieht man aus dieser rein rationellen Ableitung, wie ein Princip der virtuellen Kräftewirkung das unmittelbare Zubehör des Gedankens von der Einwirkung des Systemzusammenhangs sein müsse. Man kann den einen Begriff nicht vollständig denken, ohne zugleich die andere Vorstellung fassen zu müssen. Auf diese Weise erscheint ein Princip der virtuellen Veränderung als eine

innere, rein rationelle Nothwendigkeit; denn die mögliche Wirkung im Spielraum eines gegebenen Zusammenhangs muss doch offenbar in den Schranken dieses Zusammenhangs ihr Maass finden. Nun ist aber ein Princip der virtuellen Veränderung an sich selbst noch nicht das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten. Um den Satz, dass die virtuellen Veränderungen die Kräftewirkung repräsentiren, in den Satz zu verwandeln, dass die virtuellen Geschwindigkeiten oder Verschiebungsvariationen zusammen den Effect differentiell vorstellen, muss gezeigt werden, dass diese virtuellen Geschwindigkeiten oder Verschiebungsvariationen auch wirklich die Beschränkungen mechanisch messen, die sich der verändernden Wirkung der gegebenen äussern Kräfte entgegenstellen. Diese Nachweisung ist aber sehr leicht, sobald man die Systemverbindungen, d. h. die mechanischen Abhängigkeiten der gegenseitigen Lagen der Angriffsörter durch Gleichungen ausgedrückt denkt. Die betreffenden Functionen werden sich alsdann auf die Oerter oder vielmehr deren Coordinaten beziehen, und die Veränderungsmöglichkeiten der in diesen Functionen enthaltenen variablen Quantitäten werden für einen einzelnen punktuellen Zustand des Functionensystems offenbar nach rein analytischen Grundsätzen durch die ersten Differentialcoefficienten oder vielmehr überhaupt durch die ersten Differentialgleichungen normirt werden. Bezieht man die Lage jedes Punktes auf die Zeit, was man formal auch für den Fall des Gleichgewichts kann, da hier die Einerleiheit der Lage während des Zeitverlaufs wesentlich ist, so kann man sagen, dass die möglichen Veränderungen und die zugehörigen nothwendigen Beziehungen für den nächsten Lauf der Function durch die Relationen der ersten Differentialcoefficienten bestimmt werden. Diese rein analytischen Relationen bedürfen aber nur einer mechanischen Interpretation, um als Verhältnisse der möglichen Geschwindigkeiten und als Maasse der virtuellen Geschwindigkeiten erkannt zu werden. Wenn Newton den Begriff der Geschwindigkeit brauchte, um die Veränderung einer Function zu kennzeichnen, so ist es um so mehr erlaubt, das, wodurch die Veränderungsmöglichkeit einer Function charakterisirt wird, in dem speciellen Fall, dass diese Function einen mechanischen Zusammenhang bedeutet, als die Veränderungsmöglichkeit dieses mechanischen Zusammenhangs aufzufassen und als virtuelle Geschwindigkeit zu bezeichnen. Ein Begriff, den man schon für abstracte Functionensysteme, in denen man nur allgemeine Quan-

titäten denkt, geltend machen kann, ist in einem gewissen abstracten Sinn schon gerechtfertigt, ehe er auf mechanische Verhältnisse angewendet wird. Jede Gleichung zwischen Veränderlichen kann als eine Bedingungsgleichung angesehen werden, vermöge deren die durch eine gegebene Gleichung ganz allgemein und unbestimmt normirten Beziehungen eine Einschränkung erfahren. Es wäre daher möglich, sich sogar rein analytisch ein Princip der virtuellen Geschwindigkeiten für die Combination der Gleichungen zu construiren, indem man an den Newtonschen Begriff der Geschwindigkeit des Wachsens oder Abnehmens einer Variablen anknüpfte. Doch diese Andeutungen sollen nur zeigen, von welchem richtigen Tact Lagrange geleitet wurde, als er das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten als dasjenige hinstellte, mit welchem die analytische Verfahrungsart am bequemsten und natürlichsten zu vereinbaren sei.

153. Das virtuelle Princip folgt einerseits aus dem Kraftbegriff und andererseits aus dem Begriff der Systemverbindung. Die letztere fasst sich analytisch in das Gewand von Bedingungsgleichungen. Um daher die analytische Grundlage von vornherein in einem einzigen Ausdruck sichtbar zu machen, ist jene universelle Kräftegleichung nöthig, die Lagrange erst in den beiden vierten Sectionen seiner Analytischen Mechanik aufgestellt hat, und welche das Bedingungsglied oder überhaupt die Classe der Bedingungsglieder mit den unbestimmten Coefficienten enthält. Auch hätte er sofort diese Gleichung construiren und von ihr schon an der Spitze des Werks ausgehen können, wenn er den Begriff eines mechanischen Zusammenhangs zwischen den übrigens frei gedachten Punkten untersucht und ohne Weiteres durch einen allgemeinen analytischen Ausdruck repräsentirt hätte. Die Allgemeinheit der leitenden Vorstellungsart würde hiedurch erheblich gewonnen haben. Unter einer solchen Voraussetzung wäre übrigens das Beispiel der gasförmigen Systeme, wie schon erörtert, eines der einfachsten geworden. Der schöne Zusammenhang, der die Mechanik in alle ihre Anwendungen auf besondere Anordnungen begleitet, muss am deutlichsten hervortreten, wo sofort an erster Stelle die allgemeine Idee der von der Verbindungsart herrührenden Beziehungen in sichtbarer Abstraction an die Spitze tritt und als Fundamentalschema für die Behandlung aller besondern Gestaltungen gleichsam vorbildlich stehen bleibt.

Hiemit ist gezeigt, wie die Gesichtspunkte Lagranges, die

ausdrücklich oder stillschweigend von dem allgemeinen Charakter einer mechanischen Anordnung ausgehen, und dieselbe schrittweise in ihre Mannichfaltigkeiten verfolgen, auch der natürlichsten theoretischen Systematik entsprechen. Das System der Mechanik muss sich demnach analog gliedern, wie diejenigen Anordnungen oder Veranstaltungen, welche man, mit einem im Lauf unserer gegenwärtigen Erörterung zweideutigen Ausdruck, mechanische Systeme nennt. Die Systemverfassung der mechanischen Theorie und die Systemverfassung im Sinne eines mechanischen Arrangements von Massen und Verbindungskräften sind mithin zwei Begriffe, die zwar nur zufällig im Namen, aber aus innern Gründen in der Sache wesentlich zusammengehören. Lagrange hat dieser Zusammengehörigkeit dadurch entsprochen, dass er nicht nur von dem virtuellen Princip ausging, sondern auch die allgemeinen Eigenschaften des Gleichgewichts und der Bewegung als Typen von Beziehungen auffasste, die von der besondern Systembeschaffenheit unabhängig sind. Ausserdem sind auch die Specialentwicklungen, die den besondern Systemcombinationen angehören, meist im Sinne einer natürlichen Stufenfolge von der einfachen zur verwickelten Anordnung ausgefallen.

Um die ganze Tragweite der Allgemeinheit in den Auffassungsarten zu erkennen, erwäge man unter Anderm, wie die beiden Haupteigenschaften der Bewegung, die sich um das Princip von der Bewegung des Schwerpunkts und um dasjenige der Flächen gruppiren, auf blosse Veränderungen der Coordinatenaxen bezogen werden und mit Recht so erscheinen, als wenn man mit ihnen nichts als die Gleichgültigkeit einer Translation des Systems der Coordinatenaxen und der Rotation der Coordinatenebenen um die jedesmal zugehörigen Axen ausgedrückt hätte. Diese Betrachtungsart, die den Geist Lagranges ganz besonders kennzeichnet, ist in der That dasjenige Mittel, durch welches die Abstraction von der besondern Beschaffenheit einer mechanischen Anordnung so sichtbar als nur irgend möglich vor Augen gestellt wird. Die innern Beziehungen mögen nämlich beschaffen sein wie sie wollen, so wird in ihnen niemals etwas ausgedrückt sein, was auf absoluten Abständen oder absoluten Drehungslagen gegen die Coordinatenaxen beruhte. Nur die gegenseitigen Abstände und Lagen kommen in Frage, und es bleibt in allen Veränderungen des Systems mithin etwas Gemeinsames bestehen, was sich bei der Variation der Coordinatenaxen herausstellen muss. Der Grad von

Abstraction, welcher in einer solchen Art von Raisonnement liegt, ist nun ganz besonders Lagrange und seiner durchgängig analytischen Verfahrungsart eigen gewesen.

Auch darf nicht vergessen werden, dass die durchgreifend analytische Methode in den Händen Lagranges auf einem Hülfsmittel beruht hat, ohne welches alle sonstigen Veranstaltungen wenig gefruchtet haben würden. Es ist dies nicht etwa der specielle Variationscalcül, der von Euler eingeleitet, erst recht eigentlich von Lagrange begründet und ausgeführt worden ist[1]; — nicht die Variationsrechnung in ihrer Unentbehrlichkeit für besondere mechanische Probleme, sondern mindestens ebensosehr die allgemeine Gewandtheit in dem Gebrauch verschiedener Differenzirungs- und Variationsgesichtspunkte und der entsprechenden charakteristischen Zeichen ist es, wodurch die mechanischen Entwicklungen des grossen Analytikers möglich und mit soviel Abstraction, Zusammenhang und Geschmeidigkeit ausführbar geworden sind. Ohne dies wäre es nicht einmal möglich gewesen, in Bewegungssystemen die virtuellen Momente auch nur gehörig auszudrücken und die abstracteren Variationen von den gewöhnlichen Differentialen zu unterscheiden.

Auch hat die weitere Entwicklung der Methoden und Vorstellungsarten der analytischen Mechanik schon einigermaassen gezeigt, welche Kraft in der freieren Handhabung der Variationsgesichtspunkte liege. Der irische Mathematiker W. R. Hamilton, der Lagranges Universalformel mit grosser Achtung betrachtete und die daraus hervorgehende Gestaltung der Analytischen Mechanik als „eine Art von wissenschaftlichem Gedicht“ (a kind of scientific poem) bezeichnete[2], hat selbst, wie sich später zeigen wird, vermittelst der freien Art und Weise, in welcher er die Variationsgesichtspunkte handhabte, formal nicht gleichgültige Aufstellungen versucht, die auch zum Theil Fragen des

---

[1]) In seinem Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies, Miscellanea Taurinensia vol. II (1760—1761) nebst der darauf folgenden umfassenden Abhandlung über die dynamischen Anwendungen; beide auch in Oeuvres de Lagrange vol. I (Paris 1867) S. 335—468; übrigens vgl. auch Lagrange, Leçons sur le calcul des fonctions, 2. Ausg. 1806, 21. Lection, wo auch gegen Ende (S. 437) eine ganz kurze Kennzeichnung des Grundschemas der Variationsmethode in der gewöhnlichen Bezeichnungsart gegeben wird.

[2]) Philosophical Transactions, London 1834, S. 247.

allgemein Principiellen berühren. Das Gesammturtheil Hamiltons über Lagrange ging dahin, dass derselbe unter den seit der Newtonschen Zeit hervorragenden Analytikern wohl am meisten gethan habe, die deductiven Untersuchungen auszudehnen und in Harmonie zu bringen, und wir können hinzusetzen, dass die Meisterschaft in der Behandlung der Analysis dazu nicht ausgereicht haben würde, wenn sie sich nicht mit einem hohen Grade von Fähigkeit zur unmittelbaren und sachlichen Auffassung der wirklichen Verhältnisse der Natur vereinigt gefunden hätte. Der irische Astronom war freilich zur Würdigung der höheren und abstracten Seiten der Lagrangeschen Leistung bei Weitem keine zureichende Capacität; im Gegentheil compromittirte er sogar durch seine schiefen und zweideutigen Ausdrücke das Werk der Analytischen Mechanik. Poesie im Wissenschaftlichen ist ein bedenkliches Ding, und diesen Namen verdienen nicht solche Entwürfe, die im Bereich einer hohen Abstraction die verstandesgemässen, ja nüchternen Möglichkeiten dieses Bereichs zu erschöpfen unternehmen. Der volle Werth des von Lagrange gethanenen Schrittes wird erst allerseits geschätzt werden, wenn man sich an die von uns vertretene, noch höhere Stufe der Abstraction im Laufe der Generationen gewöhnt haben wird.

Fünftes Capitel.

Philosophische Einwirkungen.

154. Seit dem 17. Jahrhundert bis in das 19. hinein ist die Philosophie entweder unmittelbar Metaphysik gewesen oder aber darauf ausgegangen, sich von der Metaphysik zu befreien. Alle Folgen der metaphysischen Denkungsart sind für das Gebiet der Mechanik nur störend gewesen, wie wir in einem ersten typischen Beispiel schon an Descartes erfahren haben. Hobbes und Locke berührten ebenso wie Spinoza die mechanischen Fragen nicht im Mindesten. Locke zeichnete sich sogar entschieden durch die Unfähigkeit aus, auch nur den eigens für ihn von Newton populär dargestellten[1]) Kern des planetarischen Gravitationssystems mathe-

[1]) Vgl. D. Brewster, Memoirs of the life of Newton, 2 Bände, London 1855, Bd. I, Cap. 12, S. 339—340.

matisch aufzufassen, und beruhigte sich mit der blos autoritären Versicherung von Huyghens, dass die mathematischen Deductionen an sich selbst darin in Ordnung wären. Wie Leibniz allerlei Schein durch metaphysische Einkleidungen producirte, ohne hiedurch etwas Anderes als Nebel zu verbreiten und die klarsten Dinge für eine unfruchtbare scholastische Controverse grade hinreichend zu verdunkeln, haben wir bereits, wie später bei Maupertuis etwas Aehnliches, genugsam festgestellt. Newton machte derartige metaphysische Ansprüche im Allgemeinen nicht, verrieth aber da, wo er ausnahmsweise so zu sagen ein wenig philosophirte, durchaus keine Eigenschaften logischer Art. Im Schlussscholium der 2. Ausgabe seines Hauptwerks (am Ende des 3. Buchs) sowie am Schluss der „Optik“ (Quästion 23) erklärte er, die Anordnung des Planetensystems könne nicht auf mechanische, sondern müsse auf Zweckursachen zurückgeführt werden, indem er zugleich für den Fall künftiger Unordnung auf das Eingreifen der „bessernden Hand“ seines Herrgotts verwies. So hatte ein Galilei doch wahrlich nicht von der Naturgesetzmässigkeit gedacht! Er war aber auch kein Engländer gewesen und hatte demgemäss nicht das Bedürfniss gehabt, sich die Welt als eine Maschine zu denken, um die sich ein ursprünglicher Maschinenbauer jedesmal dann zu kümmern hat, wenn sich in Folge der Bauart das Räderwerk verschiebt oder irgend etwas zerbricht.

In der weiteren Abfolge der philosophischen Berührungen mit mechanischen Ideen ragt im 18. Jahrhundert Hume wenigstens negativ hervor, dessen Streben aber auch wesentlich auf Befreiung von der Metaphysik gerichtet war. Zur Erläuterung seiner Causalitätstheorie in seiner „Untersuchung über den menschlichen Verstand“ entfernt er[1]) aus dem Begriff der Kraft jede Vorstellung, welche nicht durch die thatsächliche Wirkung und die Beziehung eines Ereignisses auf eine Thatsache oder einen Umstand, dem es regelmässig und empirisch unabtrennbar folgt, exact erläutert werden kann. Der Schluss auf eine Wirkung ist für Hume stets erfahrungsmässig begründet, und seine Hinweisung auf die Mechanik ist sogar seine entscheidende Instanz. Sein mehrfach gebrauchtes Beispiel von den Billardkugeln[2]) soll erläutern, dass aus blossen Ideen oder rein ideellem Raisonnement die

[1]) David Hume, Essays, Bd. II, Ausg. 1753 (concerning human understanding) Nr. VII. [2]) Ibid. besonders im 2. Theil des 7. Essay, S. 122.

Wirkung nicht erkannt werde, welche der Stoss ausübt. In der That wird Niemand mit der Hülfe blos logischer und mathematischer Begriffe ohne die Anknüpfung an irgend ein Erfahrungselement, d. h. an einen specifisch mechanischen Begriff, herausbringen, dass bei centralem Stoss und bei gleicher Masse, Gestalt und Elasticität die bewegte Kugel der ruhenden ihre Bewegung mittheilt und selbst stehen bleibt. Ein Mittheilungsprincip der Bewegung oder Kraft muss aus der Erfahrung entnommen werden, und wenn es auch durch Zergliederung verwickelter Erfahrungsthatsachen, also vermöge eines analysirenden Raisonnements gewonnen wird, so bleibt es aus diesem Grunde nicht weniger ein Erfahrungselement. Der Verstand hat alsdann das Princip nicht aus sich selbst, etwa wie ein mathematisches Axiom, hergegeben, sondern er hat es sich nur aus dem Reiche der Erfahrung als einfaches Grundphänomen ausgeschieden und sichtbar gemacht. Ganz folgerecht behauptet denn auch Hume[1]), dass wir von dem innern Wesen der Mittheilung der Bewegung keinen Begriff haben könnten. An eben derselben Stelle, wo er das Mittheilungsgesetz, dass der eine Körper soviel an Bewegung erhalte als der andere abgebe, für wesentlich empirisch erklärt, bekundet er eine gleiche Ansicht auch über das Trägheitsgesetz. Man verhalte sich in Beziehung auf diese und ähnliche Begriffe zutreffend, wenn man in solchen Ausdrücken nichts als eine Bezeichnung der Erscheinungen erblicke. In einer derartigen Weise empfange auch die Newtonsche Gravitation ihren genauen Sinn, indem sie nicht das Wesen einer Kraft, sondern die Erscheinungen und nichts weiter repräsentiren solle. In einer Schlussanmerkung zum siebenten Essay bemerkt Hume, dass die Frage nach der Kraftmessung so gestellt sei, dass ihre Beantwortung voraussetze, man vermöge die Kraft an sich selbst unmittelbar zum Gegenstand der Erkenntniss und Messung zu machen. Alle Denker wären aber einig, dass man die Kräfte durch die Wirkungen derselben zu erkennen und zu messen habe. Es beziehe sich also der Unterschied einer Messung durch das Quadrat der Geschwindigkeit oder durch die einfache Geschwindigkeit auf die Menge der verschiedenartigen wahrnehmbaren Wirksamkeit. Eine Kraft sei immer, wie überhaupt jede Ursache, etwas Relatives und ein Begriff, der nur durch das Correlat der Wirkung seinen Sinn

[1]) Ibid. Anmerkung am Ende des 1. Theils des 7. Essay.

erhalte. Wie aber zwei Wirkungen miteinander nothwendig verknüpft seien, davon hätten wir keinen unmittelbaren Begriff, sondern bildeten uns nur aus der Beobachtung der Beschaffenheit der Natur eine Regel des Zusammenhangs.

Vom Standpunkt der Humeschen Anschauungsweise wäre ein erheblicher und dauernder Streit über die Kräftemessung gar nicht möglich gewesen; denn über die unmittelbaren Wirkungsgrössen, d. h. über die Grössen der Phänomene lässt sich nicht lange ohne Entscheidung streiten, weil hier Mathematik und Erfahrung den offen vorliegenden Gegenstand bald unzweideutig kennzeichnen und bemeistern müssen. Die statische Wirkung ist in ihrer besondern Artung nicht mit der dynamischen einerlei, und es ist etwas Anderes, eine Reihe aufgehäufter Wirkungen, oder aber das Element dieser Reihe messen. Der Maassstab ist überall einheitlich; aber die zu messenden Thatsachen sind verschieden. Hume ist in seinen Erläuterungen der mechanischen Begriffe nicht weit genug in die besondern Vorstellungen eingegangen, und nur aus diesem Grunde mussten wir uns auf das Gesagte beschränken. Man wird aber leicht einsehen, dass die Humeschen Principien, wenn sie nicht nach ihrer mechanisch unzureichenden Ausführung, sondern als leitende Gesichtspunkte für mögliche weitere Consequenzen betrachtet werden, einer strengen Vorstellungsart von den Grundbegriffen der Mechanik mindestens dadurch förderlich werden können, dass sie eine falsche Metaphysik nach Möglichkeit fernhalten und den Verstand in dieser Beziehung in Freiheit setzen.

Letztinstanzlich kann freilich Hume nicht sein. Er ermangelte nicht nur des positiven Interesse an der exacten Specialwissenschaft, sondern liess sich auch durch die Verlegenheiten der Mathematiker bezüglich des Unendlichkleinen bis zu dem Punkte imponiren, daraus einen Grund für einen gewissen Skepticismus zu entnehmen. Er selbst war nicht aufgelegt und auch bei seiner Art Studien nicht vorbereitet, ja allem Anschein nach vermöge seiner Geistesverfassung auch nicht darauf angelegt, also kurz gesagt nicht im Stande, mathematische Schwierigkeiten und insbesondere den fraglichen mathematischen Unendlichkeitsaberglauben zu durchschauen oder gar analytisch zu entwirren. Das Gefühl der persönlichen Unzulänglichkeit hätte ihn aber nicht verleiten sollen, diese Unzulänglichkeit dem Verstande überhaupt aufzubürden und so auch jene wissensschädigende Skepsis zu streifen, die sich, anstatt gegen

den Aberglauben und den Cultus falscher Dogmen, unwillkürlich gegen den Verstand kehrt oder wenigstens kehren lässt. Ein solches bedenkliches Element fand sich nun in der bei Hume entstandenen Geisteshaltung, wenn es auch verkehrt sein würde, ihn, wie gemeinhin geschehen, durch Einreihung unter die Skeptiker kennzeichnen zu wollen. Hiegegen habe ich in meiner Kritischen Geschichte der Philosophie begründeten Einspruch erhoben; für die einfache Rubrik haltungsloser Skepsis war denn doch der feinsinnigste und aufgeklärteste Denker des 18. Jahrhunderts viel zu charaktervoll und gediegen. Ohne letztere Eigenschaft wären auch seine angeführten gelegentlichen Bemerkungen bezüglich des Mechanischen nicht verhältnissmässig so zutreffend ausgefallen. Sie waren nützlich und dem echt wissenschaftlichen Geiste günstig, indem sie einen antimetaphysischen Sinn hatten.

155. Der eben bei Hume bezeichnete Vortheil ist bei Kant, der sonst von dem grossen Schotten Einiges gelernt hat und auch in der mechanischen Begriffsfassung hätte lernen können, nicht vorhanden, wohl aber das grade Gegentheil, nämlich eine metaphysische Verzerrung positiv feststehender Vorstellungen. In Kants weitschweifiger Erstlingsschrift[1]) sind die metaphysischen Ungeheuerlichkeiten, die sich später etwas verhüllen, am handgreiflichsten. Ein Beispiel hievon ist die Annahme eines Mitteldinges zwischen der todten und der lebendigen Kraft[2]), d. h. eines Zwischenzustandes, in welchem sie noch nicht ganz lebendig ist. Der grosse Denker verleugnet auch hier den grossen Experimentator nicht; denn er hat durch eignen Versuch herausgebracht, dass eine Flintenkugel tiefer eindringt, wenn sie einige Schritte vom Ziel, als wenn sie nur einige Zolle davon abgefeuert wird[3]). Sie braucht nämlich diesen Raum, um in einem höheren Grade lebendig zu werden und die neue Kantische Theorie von der Lebendigmachung („Vivification") der Kraft zu bestätigen. Einige Zoll durchlaufenen Raumes genügen zu diesem Kantischen Lebendigwerden metaphysischer Art nicht. Natürlich hat das Lebendigwerden auch seine Grenzen, bei denen es vollendet ist. Indessen können wir auf diese weitern Belehrungen darüber, wie wenig Kant von den Principien der Mechanik begriffen hatte und wie er sich in seiner Welt metaphysischer Ideologie zuerst tummelte, füglich verzichten.

---

[1]) Gedanken von der wahren Schätzung der lebendigen Kräfte etc. 1747.
[2]) Ibid. § 122. [3]) Ibid. § 130; vgl. auch noch § 134.



Die Verbreitung des Newtonschen Systems regte Kant zu einer populären Schrift „Allgemeine Naturgeschichte und Theorie des Himmels“ (1755) an, in welcher die in die Anfänge der griechischen Philosophie zurückreichende Annahme eines ursprünglich luftförmigen Zustandes der Welt in Verbindung mit unbestimmten Anziehungs- und Ballungsvorstellungen nach modernen Mustern einen im Ganzen erträglichen, im Einzelnen aber mit lauter Willkürlichkeiten und Phantastereien versetzten Ausdruck erhielt. Zunächst fehlt es an jeder Vorstellung, wie man sich die mechanische Verfassung des kosmischen Urnebelsystems zu denken habe, welchen Raum also beispielsweise die zerstreute Materie eingenommen habe und wie der Bewegungszustand derselben in einem gegebenen Augenblick beschaffen gewesen sein konnte. Hätte zwischen den Theilen jemals vollständiges Gleichgewicht bestanden, so würde es dem Trägheitsgesetz zufolge auch heute noch bestehen. Doch eine solche streng mechanische Ueberlegung ist von Kant nicht angestellt und daher auch von ihm keine Rechenschaft von dem Nebelsystem als einer bestimmt zu kennzeichnenden mechanischen Anordnung materieller Theilchen und dazwischen wirkender Kräfte gegeben worden. Die bei ihm selbst in unbestimmter Allgemeinheit verbliebene Vorstellung von der Anziehung, zu der sich ganz im antiken Sinne eine völlig willkürliche, also nicht etwa auf Thatsachen gegründete gegenseitige Hinderung und demgemäss seitliche Abweichung der Theilchen (2. Theil, 1. Hauptstück Mitte) hinzugesellt, ist Alles, woraus die Gruppirung, Ballung und Bewegung der Weltkörper zureichend begreiflich werden soll. Wie ursprünglich Mittelpunkte der Anziehung entstanden sein möchten und warum grade bestimmte Oerter in dem Weltnebel die Rolle der Kernbildung hätten spielen können, das bleibt selbst völlig unberührt, und da derartige Lücken nicht einmal bemerkbar gemacht werden, so ist die Gestaltung der an Erdichtungen reichen Theorie selbst nur ein Inbegriff nebelhaft verschwommener Umrisse geworden. Von dem Mangel quantitativer Vermittlungen gar nicht zu reden, ist auch die blos begriffliche Verkettung ungenau und zeugt nicht einmal von einem gehörigen Verständniss des Gravitationssystems, in welchem es keine seitliche Hinderung der Theilchen, sondern nur eine mehr oder minder transversale Beharrungsbewegung mit der Anziehung zu combiniren giebt. Auch bestätigt sich dieses unstät Schweifende der durchaus nicht ernsthaft mechanischen Denkweise sogar

in solchen Beispielen, in denen Kant auf falschem Wege durch blossen Zufall auf die Spur einer richtigen Thatsache kam. So lässt er sich (Theil I gegen Ende) auf die thatsächlich ungenaue Idee ein, dass die planetarischen Excentricitäten mit der Entfernung von der Sonne mehr und mehr zunehmen müssten, damit man schliesslich durch eine Stufenfolge zu den grossen Excentricitäten der Kometen gelange, und folgert hieraus, dass jenseit des Saturn noch Planeten einzuschalten sein müssten. Der falsche Grund führte hier zufällig, wenn auch nur im Groben, zu einer nachher mit der Herschelschen Entdeckung des Uranus bestätigten Voraussetzung. Ein wirklich mechanischer Schluss hätte sich aber, wie in unserm Jahrhundert bezüglich des Neptun geschehen ist, nur auf wahrgenommene störende Gravitationswirkungen unbekannter Massen gründen können. Im Gegensatz hiezu macht jene Kantische Schlussart sogar einen komischen Eindruck, wenn man nicht im Groben bleibt, vielmehr die Vorausannahme mit dem Eingetroffenen näher vergleicht. Der im Hinblick auf eine zu erwartende grössere Excentricität prophezeite transsaturnische Planet Uranus hat eine ungefähr zehn Procent kleinere Excentricität als Saturn, und der Neptun ist gegen Kants Hypothese noch ungefälliger gerathen, indem seine Excentricität sich gestattet, noch circa fünfmal kleiner als die des Uranus zu sein. Unter den Kometen ist aber gegen die Königsberger Weisheit völlige Rebellion in Gang gekommen; denn seit einem Jahrhundert hat sich etwa ein Dutzend finden lassen, die selbst in der Sonnenferne diesseit des Saturn verbleiben und dabei eine unvergleichlich grössere Excentricität haben als irgend einer der bekannten Planeten.

156. Vollends abschweifend von dem positiv wissenschaftlichen Charakter der bereits vorhandenen Mechanik und Naturanschauung fielen diejenigen Versuche Kants aus, die den Anspruch erhoben, sich näher mit einzelnen mechanischen Grundvorstellungen zu befassen. In einem Aufsatz von 1758, der den anspruchsvollen Titel „Neuer Lehrbegriff der Bewegung und Ruhe u. s. w.“ trägt und dessen Gedanken auch in der naturphilosophischen Hauptschrift von 1786 „Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft“ (3. Hauptstück im Beweis von Lehrsatz 4 betreffend Action und Reaction) eine Stelle gefunden haben, wird im Allgemeinen und speciell im Hinblick auf den unelastischen Stoss die Mittheilung der Bewegung geleugnet.

Keiner der Körper gebe dem andern Bewegung ab, sondern sie ruhten aufeinander vermöge der Gleichheit der Action auf beiden Seiten. Noch unklarer als dieses vermeintliche Surrogat einer wirklichen und allmäligen Mittheilung der Bewegung ist die Verzerrung der schon von Huyghens bei dem Beweis der Gesetze des elastischen Stosses gebrauchten und in der Mechanik eingebürgerten Methode der blos phänomenalen Scheinbewegungen ausgefallen. Ob die Kugel gegen die Mauer oder die Mauer gegen die Kugel anlaufe, soll für den absoluten Raum gleichgültig sein. Indessen ist der absolute Raum bei Kant ein völlig unklarer Begriff, der auch später durch die unhaltbare Annahme der Subjectivität des Raumes nicht ernstlich aufgeklärt wurde. In Rücksicht auf dritte, als fest betrachtete Gegenstände zeigt sich aber deutlich, dass die Annahme jener Gleichgültigkeit falsch und der Versuch, Ruhe und Bewegung in metaphysischer Umnebelung als einerlei zu setzen, nicht einmal einen verführerischen Schein producirt hat. Der ganze Grund für die sonderbar verkünstelte Ersetzung der sonst angenommenen Mittheilung der Bewegung war, wie besonders die Anmerkung des erwähnten Aufsatzes verräth, die vorausgesetzte Undenkbarkeit der Stetigkeit in der Bewegungsmittheilung gewesen. In diesem Sinne waren die Eleaten doch weit gründlicher verfahren, indem sie gleich die ganze Bewegung leugneten, und Kant erhob sich auch später in seiner Vernunftkritik beinahe zu dieser Höhe, ohne jedoch die richtigen Consequenzen dieses luftigen Standpunkts zu ziehen.

Seit der Herausgabe der „Kritik der reinen Vernunft“ (1781) musste sich auch das Mechanische, welches Kant in der vorher erwähnten naturphilosophischen Hauptschrift behandelte, in die viertheilige und zwölfgliedrige, nach den logischen Urtheilsformen zurechtgekünstelte Tabelle der metaphysischen Kategorien fügen und demgemäss viermal drei oberste Naturgesetze liefern, die von der Erfahrung unabhängig und aus den blossen Möglichkeiten des Denkens gefolgert sein sollten. Von der seltsamen Geistesmischung, die sich in dieser willkürlichen Kategorienspielerei verräth, wird man nur einen annähernden Begriff bekommen, wenn man grade das verhältnissmässig Verständlichste und Scheinbarste, was doch allein ein wenig interessiren kann, beispielsweise heraushebt. So wird dem hypothetischen Urtheil das Gesetz der Causalität und diesem wieder in der Mechanik

das Trägheitsprincip zugeordnet. Die negative Einsicht, dass zu jeder Veränderung eine abändernde Ursache gehöre, und dass mithin der Mangel einer Abänderung das Fehlen einer verändernden Kraft und demgemäss die Beharrung des Bewegungs- oder Ruhezustandes bedeute, würde allerdings dem logischen Rahmen nach hier untergebracht werden können, wenn man überhaupt derartige selbstverständliche und unfruchtbare Charakteristik treiben wollte. Dagegen ist positiv die Trägheit nur unter der logischen Rubrik der Einerleiheit des Zustandes zu denken, aber sie ist von Kant hier nicht gesucht worden. Statt dessen liefert ihm die Form des kategorischen Urtheils angeblich die Substanz und mechanisch die sich in gleicher Menge erhaltende Materie, aber wohlgemerkt, trotz aller über der Natur thronenden Eigenschaften der Kategorien, nirgend ein allgemeines Gesetz der Unentstandenheit und Unzerstörlichkeit des mechanischen Kraftvorraths, von dessen vollständigem Sinn, wie wir ihn heut verstehen, ein Kant noch keine Ahnung hatte. Die nothwendigen Erfahrungselemente, von denen die Thatsächlichkeit des mechanischen Beharrungsgesetzes eben auch eines ist, werden überall verkannt und der Geschraubtheit einer unwahren Denknothwendigkeit geopfert. Nicht einmal der Begriff der Phoronomie ist bei Kant rein und ohne Schiefe dargestellt; denn in Wahrheit ist er streng mathematisch und setzt die Materie gar nicht voraus. Schliesslich werden wir aber gar noch belehrt, dass die mögliche Bewegung die gradlinige, die wirkliche die kreisförmige, die nothwendige aber die elliptische sei, und finden uns hiemit in der That über den Charakter der Möglichkeit, Wirklichkeit und Nothwendigkeit des metaphysischen Denkens der Kantischen Philosophie wohl hinreichend aufgeklärt. Trotzdem dürfen wir aber eine Wendung nicht unbeachtet lassen, deren Auffassung gewöhnlich rationeller ausfällt, als sie bei Kant selbst anzutreffen ist. An die bejahende und verneinende Form des logischen Urtheils knüpft unser Metaphysiker die Kategorien der Realität und Negation, und diesem Spielwerk entsprechend eine sogenannte Construction der Materie. Die blosse Anziehung würde nach Kant zur Zusammenziehung der Materie in einen ausdehnungslosen Punkt führen, die blosse Abstossung aber eine Zerstreuung ins Unendliche bewirken; es sei demgemäss das Wesen der Materie als die Vereinigung einer anziehenden und einer abstossenden Kraft vorzustellen. Nun kennen wir aber leider zwischen den

Weltkörpern keine abstossende Kraft; denn die Bewahrung der Distanzen, d. h. die Aufhebung der ausschliesslichen Gravitationswirkungen wird durch keine abstossende Kraft, sondern durch Trägheit bewerkstelligt. Der Ideologe will freilich die Materie nach dem Muster des Bischofs Berkeley beseitigen und setzt sie daher einfach einer Kräftecombination gleich. Bei dieser träumerischen Wendung ist aber die Wirklichkeit der Materie vergessen, die sich nicht durch gegenstandlose Kräfte ersetzen lässt. Ausserdem ist der Antagonismus gänzlich unmathematisch gedacht und stammt wohl von jener gegenseitigen Hinderung der Theilchen, auf die wir bei Gelegenheit der nebelhaften Ursprungskennzeichnung des Weltanfangs trafen. Zwischen zwei materiellen Theilchen werden entgegengesetzte Kräfte entweder im Gleichgewicht sein oder ein Uebergewicht nach der einen Seite erzeugen. Im Falle des Gleichgewichts fehlt es an der Bewegungsursache, und im Falle des Uebergewichts ergiebt sich unbeschränkte Annäherung oder unbeschränkte Entfernung grade so, wie wenn es sich nur um eine einzige Kraft handelte. Die Kantische Täuschung ist hiemit vollends offenbar. Liesse sich der Metaphysiker auch im nebelreicheren Gebiet luftiger Formalconceptionen ebenso kurz wie im Reich der Naturphilosophie überführen, so hätten Mathematik und Mechanik auch von seiner mystischen Raumlehre nichts zu besorgen. So richtig es an sich war, das Unding eines unendlichen Raumes nicht zuzulassen, so war es doch eine starke Selbsttäuschung, die Subjectivität zum Träger des wirklichen Raumes zu machen, anstatt sie blos für das Phantasma der Unendlichkeit und für den Schluss aus dem beliebigen Vorstellen auf eine entsprechende Wirklichkeit verantwortlich sein zu lassen. Uebrigens hat sich aus der berühmten Raumlehre für die Kantische Naturphilosophie auch nicht ein einziges fruchtbares Körnchen angefunden, und die Behandlung der Natur durch den Metaphysiker ist so ausgefallen, als wenn seine Idealitätslehre von Raum und Zeit gar nicht existirte. Wir sehen hierin einen äusserlichen Beweis, nämlich einen Beweis durch das eigne Beispiel Kants, dass jene Raum- und Zeitlehre von vornherein hohl und windig gewesen.

Das Einzige, was sich zu Gunsten Kants thun lässt, ist die Hinweisung auf den Umstand, dass Mathematiker und Physiker, die zu seiner Zeit oder unter den Einflüssen seiner Philosophie ihre Bildung erhielten, sich als verhältnissmässig solider bewährten,

als Alles, was in die Sphäre der nachkantischen metaphysischen Ungeheuerlichkeiten der Schelling, Hegel und Herbart gerieth. Sehr viel von dieser relativ bessern Haltung ist aber nicht auf das Verdienst Kants und seiner jenseitlerisch moralischen Tendenzen, sondern auf den klareren und mehr verstandesmässigen Geist des 18. Jahrhunderts zurückzuführen, unter dessen Einfluss eben auch Kant mit und trotz seinen persönlich dagegen reagirenden Neigungen gestanden hat. Angesichts des bald letzten Jahrzehnts des 19. Jahrhunderts kann man resümirend sagen, dass die auf Kant zurückverfallenden, schon ein paar Jahrzehnte immer stärker Mode gewordenen Rückläufigkeiten, mit denen sich in der Literatur der Universitäten eine wahre Kantreiterei und in der Professorenphilosophie der jüngeren Generation so zu sagen eine Kantbeterei erzeugt hat, den streng wissenschaftlichen Geist da gefährden, wo er überhaupt vorhanden sein kann, nämlich in der indirecten Berührung mit der Mathematik und den Naturwissenschaften. Man bedenke nur, was daraus werden soll, wenn sich die eignen Ungereimtheiten der mathematischen Metaphysik, also die Gaussischen Räume mit mehr als drei Dimensionen, die zugehörige nichteuklidische Hypergeometrie mit ihren sich schneidenden Parallelen und ihren Dreiecken, deren Winkel nicht die Summe von zwei Rechten ergeben, sowie endlich die ebenfalls Gaussischen sogenannten Constructionen des Imaginären mit der Kantischen Raummetaphysik gatten!

Das Zurückgehen auf Kants sogenannte Kritik der reinen Vernunft hat seine Ursache in dem Einfluss Schopenhauers auf die jüngere Generation der Philosophiegelehrten deutscher Universitäten gehabt, obwohl man nachträglich bisweilen versucht hat, diesen wahren Grund zu verhehlen und irgend welche untergeordnete Menschen dafür unterzuschieben. Schopenhauer mit seinen überwiegenden Schwächen ist inzwischen schon einigermaassen universitätsgemäss geworden, wenn auch seine bessern und stärkern Seiten dabei zurückstehen müssen. Sein Hauptverdienst ist eine Art orientirender Führerschaft im Narrenhause deutscher Metaphysik vom 19. Jahrhundert. Selber heimisch in dieser Behausung und mit den sittlichen wie intellectuellen Monstrositäten und Grimassen seiner Nachbarn, der Fichte, Schelling, Hegel, Herbart u. dgl. ziemlich vertraut, dabei ihnen an natürlichen Fähigkeiten überlegen, konnte er einen leidlichen Cicerone machen. Ehrlich und geistreich zugleich, konnte er sich über die

Schlechtigkeit entrüsten und über die Thorheit lustig machen, aber Letzteres nur insoweit, als er in dem Bauer nicht selber einen eignen Kauz oder, besser gesagt, einen Vogel eigner Art repräsentirte. Dieser metaphysische Vogel war er durch das Studium von Kants sogenannter Vernunftkritik geworden, welche richtiger als Abschaffung der Vernunft in ihrem Gebrauch gegen Glaubenssachen bezeichnet sein würde. In der Jugend der Studienjahre wurde Schopenhauer hievon düpirt, indem er dem Rath seines Professors folgte und überdies seine überweltlich metaphysischen Neigungen in der Raum- und Zeitverneinung assimilirbare Nahrung fanden. So entstand, zumal er wenig Sinn für logisch abstracte Schlussweisen hatte und das neue skeptische Doppelspiel der Kantischen Manier nicht durchschaute, seine autoritäre Verehrung für das Buch des Königsberger Professors, und sein Urtheil ist, nachdem die nachkantischen Metaphysiker abgewirthschaftet, in aller Stille zu einem neuen Stück Geschichte, freilich nur scholastischer Universitätsgeschichte, geworden. Seine ehrliche Vernarrtheit in Kant hat ihn sich dazu versteigen lassen, den Naturforschern zu empfehlen, in ihrem Kopfe dadurch aufzuräumen, dass sie Kants „Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft" studirten. Leider kann ich von meinem zugleich sachlogischen und naturforschenden Standpunkt aus den Rath nicht zurückgeben; denn wer Metaphysiker, d. h. Alchymist des Geistes bleiben will, wird auch hiemit unfähig bleiben, exacte Begriffe unverzerrt aus dem Bereiche freien Denkens und echter Naturforschung aufzufassen.

157. Wir treten wieder in das Bereich einer gesunderen Luft ein, indem wir uns im 18. Jahrhundert bei den Specialisten der Mechanik nach Spuren philosophischer und logischer Grundanschauungen umthun. D'Alembert (1717—1783) und Lagrange (1736—1813) sind in dieser Hinsicht die Hauptvertreter, da Euler der Schwäche seiner rein logischen Gesichtspunkte wegen nach dieser Seite nicht in Frage kommt. Wie die Einleitung und die erste Abtheilung der d'Alembertschen Dynamik[1]) zeigen, will dieser rationell strebende und die Zweckursachen verwerfende Mathematiker die gesammte Mechanik auf drei Principien gründen.

---

[1]) Traité de dynamique (zuerst 1743), spätere Ausg. 1796, Discours préliminaire und die drei nächsten Capitel, welche den drei Hauptprincipien entsprechen.



Es sind dies das Trägheitsgesetz, das Parallelogramm der Kräfte und als dritte Voraussetzung der Satz, dass zwei Kräfte im Gleichgewicht seien, wenn sie gleich und entgegengesetzt sind, d. h. wenn sich die eventuellen Geschwindigkeiten, in denen sich ihre Bewegungstendenzen ausdrücken, umgekehrt wie die Massen verhalten. Diese Ausgangspunkte sollen aber nicht als unmittelbare Axiome gelten, sondern rationell abgeleitet werden. Bezüglich der Aufgabe, welche die Berliner Akademie in die Frage gekleidet hatte, ob die Principien der Mechanik nothwendige oder zufällige Wahrheiten wären, rückt sich d'Alembert[1]) die ungeschickte Fragestellung erst dahin zurecht, dass sie für die philosophische Betrachtung einen Sinn erhält. Es frage sich nämlich nur, ob die aus der Voraussetzung von Materie und Bewegung nothwendig folgenden mechanischen Principien mit den Erfahrungsthatsachen übereinstimmten, und da dies der Fall sei, so müssten die thatsächlichen Grundsätze als nothwendige angesehen werden. Indem nun d'Alembert bei der Materie beispielsweise deren Undurchdringlichkeit in Anschlag bringt, lässt er mit derselben die Vorstellung von der Bewegung der Körper gegeneinander gleichsam in Conflict gerathen. Indessen kann man schon im Voraus wissen, dass derartige Deductionen aus Begriffen von der Materie, die selbst erfahrungsmässig gewonnen sein müssen, nicht viel zu bedeuten haben. Die Trägheit der Bewegung leitet er nicht anders ab, als auf die Voraussetzung hin, dass sie für eine Strecke bereits gedacht sei und es nun an dem Grunde fehle, warum eine Abweichung in Bahn und Geschwindigkeit eher in dem einen als in dem andern Sinne erfolgen solle. Ein ähnlicher fehlender Grund wird auch dagegen in Anspruch genommen, dass in der Zusammensetzung zweier Kräfte die Mittelkraft eher nach der einen als nach der andern Seite der Ebene der Kraftrichtungen abweichen könnte. Abgesehen von der Unzulänglichkeit solcher Ableitungsgründe ist es auch an sich selbst schon ein Uebelstand, dass kein directer positiver Weg eingeschlagen wird. Wundern können wir uns aber über das Misslingen der d'Alembertschen Ableitungsversuche nicht; denn es sind für die letzten einfachen Principien der Mechanik nur zergliedernde Nachweisungen aus der Erfahrung, aber nicht Ableitungen aus Verstandes- oder Erfahrungsbegriffen möglich. Blosse Verstandesbegriffe, die räumlich

---

[1]) Ibid. Discours prél. in der Ausg. von 1796, S. XXII fg.

und zeitlich bestimmt werden, reichen zu reiner Mathematik einschliesslich der Phoronomie, aber nicht zu materieller Naturmechanik aus. Erfahrungsbegriffe aber, welche wirklich einfach sind, können um dieser absoluten Einfachheit willen eben nicht aus noch einfacheren Erfahrungsvoraussetzungen abgeleitet werden. Das Einzige, was sich durch blosses Denken thun liesse, wäre die Nachweisung, dass ungeachtet aller Erdichtungen und Willkürlichkeiten, deren der Verstand unabhängig von der Erfahrung fähig ist, dennoch in seinen consequenten Entwürfen etwas angetroffen wird, wodurch in den ursprünglichen Ausgangspunkten die Grundgesetze des Denkens den Grundgesetzen der Natur nicht widersprechen.

D'Alembert hat aber trotz seiner grundsätzlichen Gegnerschaft gegen die Metaphysik doch noch zuviel von deren logischen Täuschungen im Kopfe gehabt. Wenn er das später nach ihm benannte Princip als eine Frucht seines philosophischen Nachdenkens betrachtete, so konnte dies nicht viel besagen: denn Jacob Bernoulli hatte die unphilosophische Hauptarbeit bereits gethan. Die philosophische Nebenarbeit d'Alemberts bestand aber in nichts weiter, als in einer abstracten Formulirung und grundsätzlichen Hervorhebung des nicht blos vorhandenen, sondern auch schon praktisch bewährten Gedankens, wozu sich dann die mechanische Nebenarbeit der Anwendung auf weitere Beispiele gesellte. In der That verglich der philosophische Mechaniker[1]) nur die freie Wirkung einer dynamischen Kraft mit deren Reduction durch statische Hemmungen dergestalt, dass er den Abzug, d. h. die verlorne Kraft als etwas Eigenartiges absonderte und demgemäss das Princip Jacob Bernoullis dahin ausdrückte, dass an einem System die verlornen Kräfte für sich allein im Gleichgewicht sein müssten. Aus diesem Grunde hat er auch wohl sein oben erwähntes drittes Axiom besonders formulirt und als das des Gleichgewichts bezeichnet. Eine mehr einheitliche Auffassung würde aber dazu geführt haben, das Entstehen eines partiellen Gleichgewichts auch bei jeder Combination freier Kräfte, also schon im Kräfteparallelogramm, zu bemerken; denn unserer mehrfach erwähnten Auffassung gemäss sind die zur Mittelkraft senkrechten Kräftetheile als statisch aufgehoben anzusehen.

158. Am reinsten nimmt sich in philosophischer Beziehung

---

[1]) Traité de dynamique, Ausg. von 1796, erste Abth. Cap. 3, Art. 35.

die Haltung von Lagrange aus und zwar nicht nur deshalb, weil sie am positivsten gestaltet ist, sondern auch in Folge des Tactes, mit welchem der grosse Mathematiker die natürlichsten Vorstellungsarten auswählt. Allerdings bleibt für ihn die erste principielle logische Verknüpfung ein Gebiet, welches er nur streift; aber diese Enthaltsamkeit in einer Richtung, in welcher seine Stärke nicht lag, beschützt seine Darstellung vor markirteren Fehlgriffen. Auch war sein reiner und ehrlicher Charakter in Verbindung mit seiner genialen Unmittelbarkeit der tiefere Grund dafür, das Falsche und Zweideutige der Metaphysik fernzuhalten.

Ein äusseres Zeichen der erwähnten Umsicht ist die Thatsache, dass Lagrange die historischen vier Principien der Statik, nämlich die Sätze vom Hebel, von der schiefen Ebene, vom Parallelogramm der Kräfte und von den virtuellen Geschwindigkeiten als wesentlich empirische Ausgangspunkte ansieht, von denen ein jeder unter Ausschluss der übrigen die Grundlage der weitern statischen Entwicklungen bilden könne. Hiedurch hält er sich von dem d'Alembertschen Dualismus frei. Im eignen System wählt er das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten als das zugleich einfachste, umfassendste und dem Calcül bequemste. In der Functionentheorie geht er, wie wir (Nr. 134) gesehen haben, einen andern Weg, indem er dort Dynamik und Statik sich von vornherein verschmelzen lässt. Erwähnenswerth dürfte es sein, dass er hiebei ausdrücklich die Vorstellung hervorhebt, dass die hinzutretende Einwirkung einer zweiten Kraft dasselbe Ergebniss liefert, als wenn die erste Bewegung für sich allein eine Zeit hindurch ausgeführt worden und dann erst die zweite Bewegung zur Bethätigung gelangt wäre. Diese Auffassungsart findet man so deutlich ausgesprochen[1]), dass die philosophische Bedeutung derselben nicht zweifelhaft sein kann. Ein vertical aufsteigender Körper soll also demnach so angesehen werden können, als wenn er zuerst vermöge seiner Anfangsgeschwindigkeit gleichförmig bis zum Doppelten der wirklichen Erhebung gestiegen und ausserdem noch während einer gleichen Zeit d. h. um die einfache Höhe gefallen wäre. Es ist diese Wendung vielleicht das einzige Beispiel, in welchem Lagrange direct eine philosophisch nicht gleichgültige Vorstellungsart als eigne Anschauungsweise von der innern Synthesis der Kräfte blicken lässt, während er sonst Alles ausschliesst, was

[1]) Théorie des fonctions (1813), 3. Abth., Endworte des Art. 3.

metaphysisch als zweifelhaft erscheinen könnte. Im Allgemeinen ist ihm die rein causale Entwicklung das Grundgesetz, und nach diesem leitenden Gesichtspunkt, den er mit d'Alembert gemein hat, verwarf er ja auch, wie wir (Nr. 124) gesehen haben, die finale Fassung des Princips der geringsten Wirkung.

Die nur kurze Berührung, die ein Lagrange, dem wir übrigens in speciell sachlicher Beziehung soviel Raum zu widmen hatten, unter der Rubrik der philosophischen Einwirkungen erforderte, kann schliesslich ein Fingerzeig dafür sein, dass die Menge der metaphysischen Einwirkungen im umgekehrten Verhältniss zum Gediegenheitsgrad der wissenschaftlichen Gestaltungen steht. Die beste philosophische Einwirkung hat überall, wie namentlich auch das Verhalten Humes lehrte, in der Fernhaltung der Metaphysik bestanden. Der philosophische Geist des Wissenschaftsbetriebs hat sich im echten Sinne bei den Pflegern der Mechanik durch eine universelle Weite und harmonische Einheit der Anschauungen, aber niemals durch das Eingehen auf die sich von Erdichtungen nährende Metaphysik bekundet. Auch die fernere Geschichte lehrt, dass es eine Thorheit ist, von den Metaphysikern in positiven Wissenschaften irgend etwas Anderes als Verzerrungen und Umnebelungen zu erwarten. Die echten Philosophen aber können nur dann für eine positive Specialwissenschaft etwas leisten, wenn sie selbst positive und specialistische Pfleger derselben werden und auf die metaphysische Anmaassung verzichten, bei dieser Theilnahme noch etwas Besonderes vorstellen zu wollen, was nicht in der fachmässigen Darstellung selbst sich hinreichend bethätigen könnte.

Vierter Abschnitt.

Das neunzehnte Jahrhundert.

Erstes Capitel.

Erweiterung der mechanischen Grundbegriffe durch Poinsot.

159. In den für die Principienfassung erheblichen Leistungen des 19. Jahrhunderts ragen besonders zwei Thatsachen hervor. Die eine ist die Einführung des neuen Begriffs der Kräftepaare durch Poinsot[1]) mit der sich daran knüpfenden neuen Fassung und Bereicherung der Rotationstheorie. Die andere Thatsache bezieht sich auf die Ausgangspunkte, Folgen und Vorstellungsweisen, welche bezüglich der Entdeckung eines mechanischen Aequivalents der Wärme in Frage kommen. Die zeitlichen Ausgangspunkte dieser beiden Erweiterungen des mechanischen Denkens liegen um ungefähr 40 Jahre von einander entfernt. An der Schwelle des Jahrhunderts wurde die bessere Grundlegung der Statik durch Poinsot vollzogen, und Anfangs der vierziger Jahre wurde die Entdeckung des mechanischen Aequivalents der Wärme zum ersten Mal veröffentlicht. Vornehmlich ist es die Zeit seit 1850 gewesen, in der sich die an J. R. Mayers Entdeckung angeschlossenen Modificationen der mechanischen Anschauungsweise und namentlich des Begriffs der Kraft und deren Erhaltung verbreitet haben. Bezüglich der Poinsotschen Leistungen ist es weit schwieriger, den Zeitraum anzugeben, seit welchem sie von der allgemeinen Mechanik angeeignet und von den Schriftstellern als unumgänglich zu Grunde gelegt wurden[2]). In voll-

---

[1]) Geb. 1777, gest. 1859.

[2]) August Comte würdigte in seinem Cours de philosophie positive (6 Bände, Paris 1830—42) bereits 1830 die Poinsotschen Verbesserungen vollständig und

ständiger Ausdehnung und erheblicher Consequenz konnten sie erst mit der Aufstellung von Poinsots neuer Rotationstheorie, also nach 1834 zur Geltung gelangen. Die ausführlichste unter den nach Lagrange erschienenen Gesammtdarstellungen der Mechanik, nämlich die 2. Auflage von Poissons Traité de mécanique (1833) ist aber noch ein Jahr älter als die Poinsotsche Rotationstheorie, und obwohl das Werk von Poisson in statischer Beziehung den Begriff des Kräftepaars nicht übergeht, so ist es doch weit davon entfernt, der durchgreifend veränderten Anschauungsweise der Principien Rechnung zu tragen. Auch konnte es nicht die Sache der einseitig analytischen Behandlungsart sein, die eigenthümlich synthetische Anschauungs- und Entwicklungsmethode, welche Poinsot in die Mechanik eingeführt hatte, zur Grundlage der Darstellung zu machen. Poinsot hatte nicht etwa das, was man moderne synthetische Geometrie nennt, zu Hülfe genommen, sondern sich eine eigne einfache Verknüpfungsart der Ideen gebildet, welche ganz specifisch nur der Mechanik und deren Principien angehörte und als die erste Einleitung einer künftigen synthetischen Mechanik gelten kann. Vielleicht hat dieser Gegensatz der Methode dazu beigetragen, die Ziehung der vollen Consequenzen der Poinsotschen Ideen zu verzögern. Erst in den spätern Jahrzehnten, etwa seit 1840 hat sich, soweit eine solche Thatsache überhaupt zu umgrenzen ist, die vollständigere Reception der Poinsotschen Grundlagen und Denkformen durchgesetzt[1]). Uebrigens ist es bezeichnend, dass noch 1851 eine erweiterte, in dem ursprünglichen Bestand aber wörtliche Reproduction der Poinsotschen Rotationstheorie in dem französischen Hauptjournal der Mathematik erscheinen konnte[2]).

160. Erinnern wir uns zunächst einiger Grundzüge des Zustandes, welcher den neuen Bestrebungen voranging und nicht

---

sagte wichtige Folgen für die Dynamik und speciell für die Rotationstheorie voraus (Bd. I, 16. Vorlesung, S. 612 und 615). Zugleich setzte er aber auch hinzu, dass die meisten Mathematiker noch nicht gebührend auf den Gegenstand eingegangen wären.

[1]) Die Aufnahme der Resultate findet sich bereits in einem Lehrbuch wie Navier, Résumé des leçons de mécanique etc. Paris 1841, während die Methode weit langsamer einwirkte. — Für das Verhalten von Möbius zu den Poinsotschen Anschauungen vgl. des ersteren Lehrbuch der Statik, 1837, und Crelles Journal, Bd. 18 (1838), S. 189.

[2]) Liouville, Journal des Mathématiques, Bd. XVI, S. 9—129 und S. 289—336.

aufgehört hat, noch immer den Rahmen zu bilden, innerhalb dessen sich die wissenschaftlichen Erwerbungen des 19. Jahrhunderts bewegen. Dieser Rahmen ist, abgesehen von der sachlichen Erweiterung durch die Wärmemechanik, also in Rücksicht auf das Mechanische, wenn es an sich selbst und nicht in neuen Anwendungen betrachtet wird, noch immer durch Lagranges systematische Zusammenfassung und Constituirung der Analytischen Mechanik vertreten. Keine nachfolgende Gesammtdarstellung ist diesem fundamentalen Werk auch nur vergleichbar gewesen. Weder der Abriss der Mechanik, den Laplace an die Spitze seiner Mécanique céleste [1]) stellte und an den er die Specialausführungen und Rechenschaften über das in der planetarischen Mechanik von seinen Vorgängern Geleistete in einer Gruppe von Bänden [2]) anschloss, noch die allenfalls ihrer klaren Ausdrucksweise wegen auszuzeichnende Mechanik Poissons können als Darstellungen gelten, welche dem grossartig entworfenen Musterwerk in irgend einer wesentlichen Beziehung auch nur nahekämen. Aber auch aus einem andern Gesichtspunkt ist Lagranges Analytische Mechanik das Fundamentalwerk geblieben, auf dessen Grunde die wesentlichen rein analytischen Bereicherungen des späteren mechanischen Wissens zu Stande gebracht wurden. Es ist nicht die Aufgabe unserer Schrift, die blossen Integrationsermöglichungen oder die Formveränderungen der dynamischen Gleichungen zu berücksichtigen, welche in unserm Jahrhundert den Mathematikern, also z. B. einem Hamilton und in Nachahmung desselben auch einem Jacobi gelungen sind, insoweit solche Formveränderungen nicht etwa neue Fundamentalsätze oder charakteristische Beziehungen von allgemein principieller Bedeutung ergeben haben. Doch müssen wir schon an dieser Stelle bemerken, dass der strenge Begriff einer ausschliesslich analytischen Mechanik von Lagrange geschaffen worden ist und daher als der leitende Gesichtspunkt derjenigen historischen Entwicklung betrachtet werden muss, die unter Festhaltung dieses reinen und abstracten Begriffs nur die Bearbeitung der verschiedenen mechanischen Gleichungsformen im

---

[1]) Bd. I (zuerst 1799), in der neusten Ausg. der Werke ebenfalls Bd. I (1843).

[2]) Der 3. und 4. Band der Mécanique céleste erschienen 1804—5; der 5. erst 1825. In den Werken von 1843 fg. sind Band 1 bis 5 die Méc. céleste. Das Système du monde, zuerst 1796, letzte Ausg. 1824, in den Werken Bd. VI, ist eine Darstellung ohne Calcül und enthält ebenfalls die Principien der Mechanik.

Auge hat. Diese besondere Methode hat im 19. Jahrhundert einige Variationen erfahren; aber diese geringen Fortschritte sind als Zweige an einem Baume zu betrachten, dessen Stamm und Hauptgestalt ihren Repräsentanten in Lagrange haben.

Im Gegensatz zur ausschliesslich analytischen Methode blickte nun Poinsot mit einer gewissen, freilich auch auf Beschränktheit beruhenden Genugthuung von seinen anschaulichen und auf anschaulichem Wege gewonnenen Resultaten auf das, was er die „langen Umschweife“ [1]) des Calcüls nannte. Auch galten ihm die vier geschichtlichen Skizzen in Lagranges Analytischer Mechanik als das Vorzüglichste [2]), während er übrigens nicht umhin konnte, die analytische Ableitungsart bei jenem grossen Systematiker für etwas zu halten, was nicht auf sich selbst beruhe und was ohne das besondere Genie des Bearbeiters, der von einer richtigen Intuition geleitet worden sei, gar nicht in dem ebenmässigen Zusammenhang zu Stande gekommen wäre. Jedoch benutzte er selbst den Calcül in sparsamer Weise zur Darstellung und weiteren Vermittlung, sobald er seine Hauptgesichtspunkte festgestellt hatte. In der That darf man die analytische und die rationelle Mechanik nicht miteinander verwechseln; die erstere ist nämlich nur eine Methode, die letztere aber eine selbstgenugsame Wissenschaft. Das Rationelle besteht in nichts weiter als in einem auf die letzten Principien zurückführenden Raisonnement, also wesentlich in der deductiven Verbindung einfacher Wahrheiten. Die analytische Methode kann aber stets nur ein Stadium jenes Raisonnements bilden; denn sie setzt da ein, wo die Gleichung nach rein algebraischen Grundsätzen bearbeitet wird und gelangt da an ihre Grenze, wo der ausschliessliche Leitfaden der rein algebraischen Consequenzen abreisst. Sie ist daher von secundärer Natur, indem sie sich schliesslich immer nur durch Betrachtungen weiterhelfen kann, die unmittelbar aus der Sache und nicht blos aus dem Algorithmus der Operationen entnommen sein wollen. Poinsot hatte daher Recht, wenn er den Calcül zur blossen Dienstbarkeit und mithin in die zweite Linie verwies. Er hatte aber Unrecht, indem er die Autonomie der einmal angelegten Rechnung nicht

[1]) Mém. sur la composition des moments et des aires (gelesen 1804), unter II am Anfang. (Das Memoire auch als Anhang zu vielen Ausgaben von Poinsots Eléments de statique abgedruckt.)

[2]) Théorie nouvelle de la rotation des corps, Paris 1834, S. 33. In der Ausgabe von 1851 zweite Abth., Art. 23.

zu würdigen vermochte, und noch mehr Unrecht als er sogar geometrische Anordnungen in Lagranges Analytischer Mechanik nicht verstand, worauf wir Nr. 210 näher hinweisen werden. Trotzdem kann der Fehler der Person das wirklich Berechtigte an der allgemeinen Sache, ja auch das sonstige persönliche Verdienst nicht hinfällig machen. Die geometrische und unmittelbar mechanische Behandlung der Aufgaben unserer Wissenschaft kann zwar als eine Art Reaction gegen die analytische Abstraction und mithin gegen eine höhere Stufe des Denkens betrachtet werden, wird aber dennoch, sobald sie nur die gehörige Einschränkung erfährt, gegenüber allem einseitigen Schein blossen Rechnungsgebahrens ein wohlthätiges Correctiv bleiben.

161. Der principiell neue und für die Ordnung der Elemente der Mechanik hochwichtige, ja zur Vollständigkeit der fundamentalen Nachweisungen unentbehrliche Begriff, den Poinsot auffand, ist der des Kräftepaars. Diese für das Verständniss aller Rotationseffecte oder Rotationsbestrebungen soviel Licht und Klarheit bringende Idee wurde von Poinsot zunächst in seinen Eléments de statique[1]) auseinandergesetzt; aber man ersieht ihre nächste Tragweite am leichtesten aus der schon angeführten Abhandlung über die Theorie der Momente. Die Fruchtbarkeit des Begriffs zeigte sich aber in besonders glänzender Weise erst mit der neuen, in einem Memoire von 1834 niedergelegten Rotationstheorie[2]).

Zwei gleiche, parallele, aber entgegengesetzte Kräfte, deren Angriffspunkte man sich beliebig an einer graden Linie denken mag, lassen sich durch keine dritte Kraft aufheben. Während im Allgemeinen drei Kräfte, die an einer graden Linie in derselben Ebene wirken, nach dem Gesetz des Hebels immer so genommen werden können, dass zu zwei gegebenen die dritte ein Gleichgewichtssystem formirt, also der Resultante der beiden andern entgegengesetzt ist, — fällt diese Möglichkeit in einem besondern Fall fort. In diesem Fall haben die zwei gegebenen Kräfte gar keine Resultante, und man kann sie daher auch nicht durch eine einzelne Kraft aufgehoben denken, welche dieser Resultante gleich und entgegengesetzt wäre. Der Einfachheit wegen wollen wir

[1]) Zuerst 1804; eine 9. Ausgabe von 1848, die als Anhang die wichtigsten Memoire abgedruckt enthält; eine 11. Paris 1872.

[2]) Auch besonders als Théorie nouvelle de la rotation des corps, Paris 1834.

uns denken, dass die Kräfte unter einem rechten Winkel angreifen, zumal da es sich niemals um diejenigen Bestandtheile der Kräfte handeln kann, welche auf die Angriffslinie projicirt längs der letzteren wirken und sich daher gegenseitig aufheben.

Nennt man nun mit Poinsot zwei gleiche, parallele, aber entgegengesetzte Kräfte, die an einem gemeinschaftlichen System wirken, also durch irgend eine Verbindung in Beziehung gedacht werden, ein Kräftepaar, so entsteht das anschaulichste Bild von dessen Wirksamkeit dadurch, dass man sich die beiden Kräfte an irgend einer der vielen gleichen, sie rechtwinklig schneidenden Abstandslinien angreifend denkt. Geht man von dem ideellen Hebel oder der starren Linie aus, so hat man sich dasselbe Bild zu machen, indem man die an zwei Punkten derselben nach entgegengesetzten Richtungen in derselben Ebene angreifenden Kräfte sofort rechtwinklig denkt. Poinsot fixirt die Vorstellung nicht in dieser Weise, sondern lässt die Mannichfaltigkeit der Neigungen der parallelen Kräfte offen, was jedoch der Sichtbarkeit des entscheidenden Umstandes nur hinderlich ist; denn der Drehungseffect in Beziehung auf die Linie oder überhaupt auf die Ebene der Kräfte ist immer in Frage.

Poinsot will bei seinem Begriff vom Kräftepaar nichts weiter als das Zusammen (ensemble) der beiden Kräfte gedacht wissen und bestimmt im Allgemeinen und principiell gar nichts über die Art, wie man sich dieses Zusammen etwa als eine mechanische Beziehung in Form einer die gegenseitige Einwirkung vermittelnden Verbindung zu denken habe. Thatsächlich führt er allerdings die Distanz der beiden Kraftrichtungen als mechanisch erheblich ein; es geschieht dies aber auch in keiner andern Weise, als in welcher die frühere Mechanik die Momente als die analog wie an einem Hebelarm wirksamen Kräfte auffasste und ausdrückte. Das Product aus der Kraft, die auf eine Ebene reducirt ist, in den Abstand von irgend einer gegen diese Ebene verticalen Axe, bildet in Beziehung auf diese Axe das Moment der Kraft. Dieser Begriff ist derjenige der älteren Mechanik, und Poinsot selbst geht auch von der wesentlichen Identität der Kräftepaare und der Momentgebilde aus. Sein Kräftepaar hat das Product aus einer der beiden gleichen Kräfte in ihren gegenseitigen Abstand zum Maass, und wie die Analysis mit den Momenten rechnete, so operirte Poinsot mit den Kräftepaaren und der zugehörigen Grössenvorstellung ihres Effects.

Bei einem Kräftepaar ist die Sinnesverschiedenheit anders zu fassen als bei einer einzelnen Kraft, obwohl die Analogie nicht verkannt werden darf. Kehrt man den Sinn beider Kräfte um, so ändert sich der Sinn des Kräftepaars, d. h. die Drehungsbestrebung, die seinen Effect repräsentirt, wird die entgegengesetzte. Was bei einer einzelnen Kraft die Richtung, d. h. die grade Linie ist, in welcher oder nach welcher sie wirkt, das wird bei dem Kräftepaar durch die Ebene, in welcher oder nach deren Richtungslage es wirkt, völlig analog vorgestellt. Wie man den Angriffspunkt einer einzelnen Kraft in ihrer Richtungslinie nach einem andern mit dem ersteren unveränderlich verbundenen Punkt verlegen kann, ohne die Wirkung zu verändern, ebenso kann man die binäre Kraft, welche bei Poinsot Kräftepaar heisst, in ihrer Ebene in eine ganz beliebige andere Lage bringen. Man kann also das Kräftepaar, sobald man zwei bestimmte Angriffspunkte voraussetzt, nicht nur um die Mitte des Abstandes derselben in alle Lagen drehen, sondern darf es auch translatorisch in der Ebene und nach allen parallelen Ebenen verschieben. Die Richtungslage seiner Ebene im Raume, nicht aber etwa der besondere Ort dieser Ebene, bildet das, was als Richtung des Kräftepaars das Analogon der Richtung einer Einzelkraft vorstellen soll.

162. Nach Poinsot ergiebt der gewöhnliche Calcül, durch den man zu zwei parallelen Kräften die Resultante findet, in dem besondern Fall, dass zwei gleiche Kräfte von entgegengesetztem Sinn in die Formel kommen, ein Resultat ohne allen Sinn, nämlich die Anbringung einer Kraft gleich Null in einer unendlichen Entfernung. Bei einer unendlichkleinen Differenz der beiden Kräfte liefert er jedoch, wenn man den exacten Begriff des Unendlichkleinen, d. h. des Unbeschränktkleinen zu Grunde legt, je nachdem der unbegrenzt kleine Ueberschuss der einen oder der andern Kraft angehört, in unbeschränkt grosser Entfernung auf der einen oder auf der andern Seite die Anbringung einer unbegrenzt kleinen Kraft. Dagegen zeigt der Calcül in beiden Hinsichten, dass, wenn die Differenz nicht unendlichklein, sondern Null ist, weder auf der einen noch auf der andern Seite eine translatorische Resultante und mithin auch keine Herstellung des Gleichgewichts durch Anbringung einer einzelnen Kraft möglich ist; denn das sogenannte Unendlichgrosse, welches der Null gegenüberstehen soll, ist wie die Null selbst eine Verneinung der Realität und Grösse überhaupt und darf nicht

mit dem exacten Begriff des unbeschränkt Grossen verwechselt werden.

Die Zusammensetzung paralleler Kräfte beruht entweder auf einer Ableitung aus dem Parallelogramm der Kräfte, oder sie muss unmittelbar an das Hebelprincip angeknüpft werden. Im ersteren Fall muss man den Sprung von einem unendlichkleinen Winkel zum strengen Parallelismus und von der Existenz eines Durchschnittspunkts der Kräfterichtungen zu der Nichtexistenz eines solchen machen. Im andern Fall ist man an diese indirecte Ermittlungsart und an die logischen Umwege derselben zwar nicht gebunden; aber es bleibt doch eine andere Unzulänglichkeit bestehen, indem man zunächst einen festen Punkt voraussetzen muss, um dann den Uebergang zu der freien unveränderlichen Linie und den drei an derselben wirksamen Kräften zu machen. Unmittelbar hat man für die drei Kräfte nur das Gesetz des Gleichgewichts; aber man kann die einer jeden gleiche aber entgegengesetzte Kraft als die Resultante der beiden andern ansehen. Dieser durch das Hebelprincip gewonnene Begriff der Resultante ist aber ein indirecter, weil er von dem statischen Verhalten hergeleitet wird. Die Kraft, die man sich am Unterstützungspunkt im gewöhnlichen Hebelschema angebracht denken kann, ersetzt zwar die Wirkung des festen Unterstützungspunkts und hebt die Bewegungstendenz auf, welche an diesem Punkte durch die an den Endpunkten wirkenden Kräfte verursacht wird. Diese Bewegungstendenz kann daher als die translatorische Resultante angesehen werden, welche die beiden andern Kräfte durch ihre Wirkung an der starren Linie ergeben. Ausserdem ist aber auch gegenseitig die Drehungstendenz der beiden Kräfte aufgehoben, wenn der Hebel im Gleichgewicht ist. Bei dem Arrangement ist mithin Zweierlei ins Auge zu fassen, nämlich erstens die translatorische Resultante der beiden Kräfte, und dann der Umstand, dass eine blosse Fortschiebung der starren Linie in der Resultante, d. h. rechtwinklig gegen dieselbe angezeigt ist, während eine Drehung um den Durchschnittspunkt mit der Resultante nicht stattfindet. Die beiden Drehungsbestrebungen heben sich gegenseitig auf; aber dieser Umstand wird auf Grund des blossen Hebelprincips nicht in seiner Selbständigkeit sichtbar. Man denkt nur an die translatorische Resultante der beiden Kräfte, aber nicht daran, dass diese beiden Kräfte, abgesehen davon, dass sie eine Bewegungsresultante ergeben, auch noch ausserdem in einer

gewissen Hinsicht in einem Gleichgewichtsverhältniss, d. h. in einer rein statischen Beziehung stehen müssen. Ist ein fester Unterstützungspunkt vorausgesetzt, so sieht man deutlich, dass ausser dem Druck, den er erfährt und der die Summe der beiden Kräfte vorstellt, auch noch die gegenseitige Aufhebung der beiden Drehungsbestrebungen eine unterscheidbare, neben der andern vorhandene Wirkung bildet. Macht man nun das System frei, indem man den Unterstützungspunkt durch eine dem Druck entgegengesetzte Kraft ersetzt, so kann dies an jener Drehungsbeziehung nichts ändern. Thut man noch einen weiteren Schritt und nimmt die substituirte Kraft fort, so entsteht die ihr gleiche und entgegengesetzte Bewegungsresultante, und obwohl es nun an dem ersten Grunde der mechanischen Drehungstendenz fehlt, so ist doch die blosse Abwesenheit der Drehung als ein Gleichgewicht in Beziehung auf ideelle Drehungstendenzen aufzufassen. Unter allen Umständen wird man aber den Fall, in welchem die Kräfte nicht, wie wir eben voraussetzten, gleichstimmig, sondern ungleichstimmig parallel und gleich sind, in Rücksicht auf das Hebelschema so zu denken haben, dass die Druck- oder Bewegungsresultante an der Stelle des Unterstützungspunkts Null wird, indem die beiden Kräfte, dorthin verlegt, für den Fall ihrer Gleichheit die algebraische Summe Null geben oder für sich allein im Gleichgewicht sind. Da ein Druck oder Zug selbständig am festen Punkt nicht vorhanden ist, so kann man die Kräfte dort fortnehmen und das System nicht blos freimachen, sondern auch von den am festen Punkt denkbaren Substitutionen ganz unabhängig gestalten. Es entsteht alsdann keine translatorische Resultante, und das Einzige, was noch in Betracht kommt, ist die Drehungswirkung.

Es scheint das Schicksal des allgemeinen Problems der Zusammensetzung paralleler Kräfte zu sein, in Rücksicht auf die Strenge der Beweise ähnliche Schwierigkeiten darzubieten, wie in der reinen Geometrie die Parallelentheorie. Durch Poinsots Fortschritte ist der Punkt, auf den es ankommt, nur erst recht sichtbar geworden. Die Unzulänglichkeit des Parallelogramms der Kräfte macht sich grade dadurch am bemerklichsten, dass man vermöge desselben und mittelst des Durchgangs durch das Unendliche wohl eine Bewegungsresultante für beliebige Kräfte allgemein erweisen, aber nicht die Drehungsresultanten finden kann. Dies rührt daher, dass es wesentlich auf der Voraussetzung beruht,

dass ein einzelner Punkt den Angriffsgegenstand der zusammenwirkenden Kräfte bilde. Bei einem Punkt als solchen hat die Drehung weder Grund noch Sinn. Sobald man aber zur Linie oder überhaupt zu zwei miteinander mechanisch verbundenen Punkten übergeht, ist dasjenige System vorhanden, für welches das Zusammenwirken der Kräfte ausser der fortschreitenden auch eine drehende Bewegung ergiebt, die nur in besondern Fällen Null, d. h. als aufgehoben zu betrachten ist. Es ist also nicht wesentlich der Parallelismus und die Gleichheit der Kräfte, sondern die Linie als Angriffsobject, was die eigenthümliche Drehungswirkung verursacht. Nicht weil zwei Kräfte ungleichstimmig parallel und gleich sind, sondern weil sie nicht an einem sondern an zwei Punkten vermittelst einer Linie wirken und in Beziehung stehen, führen sie zu Drehungswirkungen. Ist also eine Linie gegeben, die an zwei Punkten von beliebigen Kräften von beliebiger Richtung und Grösse afficirt wird, so kann man fragen, was die auf die Linie projicirten Bestandtheile und was die senkrecht zu derselben stehenden Kraftelemente für Wirkungen hervorbringen. Liegen diese senkrechten Kraftelemente unmittelbar in einer Ebene, so kann man sie, wenn sie ungleich sind, in ein gleiches Paar und in einen Ueberschuss verwandeln. Jedenfalls wird man auf irgend einem Wege zu den Drehungseffecten gelangen müssen, wenn man nur das Problem der Kräftezusammensetzung an einer graden Linie, ebenso wie dasjenige der Zusammensetzung an einem Punkt, in seiner ganzen Allgemeinheit behandelt und in allen Beziehungen auflöst. Hiemit ist auch zugleich ersichtlich, dass der Anspruch Poinsots, eine wesentliche Ergänzung des Parallelogramms der Kräfte durch den Begriff des Kräftepaars und durch das Parallelogramm der Kräftepaare geliefert zu haben, ein völlig gerechter ist. Nur bleibt natürlich noch in der Ableitungsart und in der Einheit der Auffassung sowie in der Beziehung des neuen Begriffs zur Analysis Einiges zu wünschen übrig.

163. Während Poinsot in seinem Memoire von 1804 eine anschauliche Uebersicht der Grundvorstellungen und Hauptanwendungen der Theorie der Kräftepaare giebt, sind die Beweise für die Verlegbarkeit des Angriffsortes, sowie für das Maass und die Zusammensetzungsregel der Kräftepaare hauptsächlich im zweiten Abschnitt des ersten Capitels seiner Elemente der Statik nieder-

gelegt, aus denen für unsern Zweck nur wenige Nummern[1]) ausgezeichnet werden können. Der synthetische, fortwährend auf Kräftesubstitutionen und geometrischen Arrangements fussende, daneben in der Form etwas starre Gang jener Poinsotschen Elementarstatik gestattet kaum eine Heraushebung aus dem Zusammenhang. Die entscheidenden Umstände müssen jedoch wenigstens im Allgemeinen markirt werden. Abgesehen von der Auffindung des Begriffs des Kräftepaars ist in der Erläuterung der ersten principiellen Elemente, namentlich der Zusammensetzung der Kräfte im Allgemeinen, keine neue Nachweisung gegeben, die stichhaltig wäre. Trotz alles äussern Anscheins und ungeachtet des Umstandes, dass die Zusammensetzung gleichstimmig paralleler Kräfte dem Parallelogrammgesetz, wie dasselbe in seinem vollständigen Umfang erscheint, vorangeschickt wird, haben alle diese Theilungsversuche doch kein System ermöglicht, welches an die Euklidische Strenge heranreichte. Eine specielle logische Kritik würde hier viel zu weit führen; aber in Rücksicht auf den Hauptzweck unseres Berichts, nämlich die Vorstellung von der Wirkung eines Kräftepaars, darf nicht übersehen werden, dass keine entscheidende Idee hierüber gegeben wird, etwa wie diejenige, welche dem Parallelogramm der Bewegungen entspricht und bekanntlich zeigt, in welcher Weise ein Punkt zwei Bewegungen zugleich zu haben vermöge. Poinsot weist ausdrücklich die Idee der Rotation als etwas „rein Accessorisches“ zurück und will sie nur als Bild gelten lassen[2]). Auch ist sie in der That von ihm selbst nur accessorisch benutzt, indem er zur Erläuterung die besondere Voraussetzung macht, dass der Mittelpunkt des Hebelarms fest sei. Diese Voraussetzung alterirt aber den reinen Effect wesentlich, und es fehlt mithin in Poinsots System eine unmittelbar anschauliche, ja überhaupt eine von vornherein völlig klare Vorstellung von der Bewegungswirkung eines Kräftepaars auf sein Angriffsobject. Die Bewegung des Punktepaars, die aus der Anbringung der beiden Kräfte resultirt, ist nicht als solche ins Auge gefasst. Aus diesem Grunde ist auch der Effect auf die Ebene oder den starren Körper nicht principiell in solcher Weise evident gemacht, wie man es bei elementaren Fundamentalvorstellungen fordern muss. Dieser Mangel erklärt sich, sobald

---

[1]) Etwa Art. 25 fg., 50, 102 fg. der 3. Ausgabe der Eléments de statique, 1821.

[2]) Ibid. Ende von Art. 47.

man überlegt, wie schon der alte Begriff des statischen Moments von vornherein, und ehe es eine ausgebildete Analysis gab, in seiner Isolirung wesentlich ein Rechnungsbegriff gewesen, und wie Poinsot nur den Versuch gemacht hat, den analytischen Rechnungsbegriff der Drehungsmomente ins Anschauliche zu übersetzen.

Die allgemeine Methode Poinsots, die Verlegbarkeit des Kräftepaars sowie Maass und Zusammensetzung der Kräftepaare zu bestimmen, beruht einerseits auf Substitutionen von Paaren, deren obwohl unbekannte Wirkung unter übrigens gleichen Umständen doch immer sich selbst gleich bleiben und bei der Entgegensetzung Ihresgleichen aufheben muss, — und andererseits gründet sie sich auf den Kunstgriff, Paare von gleichen Hebelarmen und gleicher Richtung der Ebene mit den Angriffspunkten zu superponiren oder Paare von gleichen Kräften, gleicher Richtung der Ebene, aber ungleichen Hebelarmen so zu coordiniren, dass die Hebelarme einen einzigen bilden und immer ein Angriffspunkt jedem Paare gemeinschaftlich wird. Alsdann heben sich die Kräfte an den gemeinschaftlichen Angriffspunkten unter Voraussetzung gleicher Sinnesrichtung der Paare auf, und es bleibt nur ein Paar übrig, welches die Summe der Hebelarme zu seinem Hebelarm hat. Hieraus folgt, dass die Zusammenwirkung mehrerer Kräftepaare, wenn man diese Paare etwa ganz identisch nimmt, unter allen Umständen die Vervielfachung des Hebelarms ergiebt, was auch immer diese Wirkung sein möge. Man kann mithin ein zur Einheit genommenes Kräftepaar aus einem doppelten Gesichtspunkt in ein Vielfaches verwandeln, indem man nämlich die Kraft oder den Hebelarm oder beide Grössen vervielfacht. Das Maass ist hiemit gefunden und zwar, was bemerkenswerth ist, ohne die Vermittlung einer besondern und an sich zureichenden Totalvorstellung von der Wirkung eines Kräftepaars. Eine deutliche Idee lag nämlich nur in Beziehung auf die Einzelkräfte zu Grunde, die man sich gegenseitig aufheben oder addiren liess. Dennoch gewann Poinsot wesentlich nach dem von uns angegebenen, aber concentrirten Schema seine specielleren Beweisgesichtspunkte für die einfachste Art der Zusammensetzung und mithin die Messungsregel, derzufolge sich die Grösse eines Paars aus den beiden Factoren der perpendiculären Distanz und der Kraft zusammensetzt. Er nannte dieses Product das Moment des Kräftepaars, wodurch noch mehr an den im Grunde identischen

gewöhnlichen Begriff der Momente, d. h. an das Product einer Kraft in einen Abstand erinnert wird.

Die Zusammensetzung von Kräftepaaren, deren Ebenenrichtungen einen Winkel bilden, wird erwiesen, indem die Paare auf gleiche Hebelarme reducirt, mithin in ihrem Grössenverhältniss rein durch die Kräfte ausgedrückt und dann in die Durchschnittslinie der Ebenen derartig verlegt werden, dass die gleichen Hebelarme zusammenfallen. Dann entsteht durch Zusammensetzung der beiden Einzelkräfte, die jedesmal an dem gemeinschaftlichen Angriffspunkt liegen, bei jedem Punkt eine neue Einzelkraft und mithin zusammen ein neues, nämlich das resultirende Paar. Die Regel der gewöhnlichen Kräftezusammensetzung ergiebt sich auf diese Weise als diejenige der Kräftepaare, indem diese Paare ihrer Grösse nach durch Linien dargestellt werden, die den Producten aus Kraft und Hebelarm entsprechen. Der Winkel, in welchem diese Linien nach der Regel des Parallelogramms zusammenzusetzen sind, ist derjenige der Ebenen oder, was dasselbe ist, derjenige von Axen, welche auf den Ebenen der Kräftepaare senkrecht stehen und bei Poinsot auch gradezu Axen der Kräftepaare genannt werden. Je nach dem Sinn der Kräftepaare ist natürlich einer der vier möglichen Winkel zu nehmen, welche sich bei dem Durchschnitt der Ebenen oder der Axen darbieten. Doch dies befindet sich Alles in der strengsten Analogie mit dem Parallelogramm der Kräfte und braucht hier nicht weiter dargelegt zu werden.

164. Das bisher Angegebene enthält die Elemente der Theorie, und das Hauptfundament derselben besteht darin, dass zwei ungleichartige Ursachen oder zweierlei wesentlich verschiedene Einwirkungen von einander gesondert worden sind. Ein Kräftepaar kann nie durch eine Einzelkraft, sondern nur durch Seinesgleichen aufgehoben oder ersetzt werden. Die allgemeine Kräftezusammensetzung wird daher in Rücksicht auf das Gleichgewicht davon auszugehen haben, dass die gegenseitige Aufhebung der Bewegungsantriebe isolirt für jede der beiden Arten von Ursachen statthaben muss. Man verschafft sich nun einen recht anschaulichen Begriff von der Leichtigkeit, mit welcher Poinsot die allgemeinen Bedingungen des Gleichgewichts eines starren Systems, d. h. also überhaupt die sechs Gleichungen des Gleichgewichts für jegliches System ableitet, wenn man ihm in seinem Hauptverfahren folgt. Das letztere besteht darin, eine Kraft parallel

mit sich selbst an einen beliebigen andern Angriffspunkt des Systems zu verlegen und die Veränderung der Wirkung, die hiedurch entsteht, durch die Einführung eines Kräftepaars auszugleichen, welches in der Ebene der ursprünglichen und der neuen Lage der Kraft seine Position hat. Man kann nämlich die Kraft sich selbst parallel an einem beliebigen Punkt noch einmal anbringen, indem man sie dort sofort durch die gleiche und entgegengesetzte Kraft aufheben lässt. So ergiebt sich ein System von drei Kräften, das man in ein Paar und in die am neuen Angriffspunkt wirkende Kraft abtheilen kann. So erzeugt die Verlegung einer Kraft in paralleler Lage nur die Nothwendigkeit, das hiemit entstehende Paar zu berücksichtigen. Das Paar kann nun in derselben oder in einer parallelen Ebene einen beliebigen Ort erhalten, und man hat offenbar ganz anschaulich die ursprüngliche einfache Wirkung der Kraft an dem gegebenen Angriffspunkt durch eine Combination ersetzt, deren eines Glied dieselbe Kraft am neuen Angriffspunkt, und deren anderes Glied das Kräftepaar mit dem rechtwinkligen Verlegungsabstand als Hebelarm ist.

Nach diesem Verfahren kann man alle Kräfte an einen Punkt von beliebiger Position verlegen, wenn derselbe nur unveränderlich mit dem System verbunden ist; denn nur unter dieser Voraussetzung erzeugen sich bei der Verlegung eigentliche Paare und kann die Gruppe der drei Kräfte als auf das System bezüglich angesehen werden. Es ergiebt sich mithin für jeden beliebigen Punkt eine und dieselbe translatorische Resultante, während man durch Zusammensetzung aller Kräftepaare ebenfalls ein einziges resultirendes Paar erhalten muss. Das Problem der allgemeinen Kräftezusammensetzung ist hiemit in einer neuen Weise gelöst. Die Bedingungen des Gleichgewichts lassen sich ebenfalls sofort angeben; denn erstens muss die translatorische Resultante gleich Null sein, und dies ist nur möglich, wenn auch die nach drei rechtwinkligen Axen zerlegten Kräfte nach jeder der Axen eine Resultante oder Summe gleich Null ergeben. Diese letzteren drei Beziehungen sind aber nichts als die bekannten drei Gleichungen des translatorischen Gleichgewichts. Soll ferner in Beziehung auf die Kräftepaare Gleichgewicht stattfinden, so muss die Paarresultante ebenfalls gleich Null sein, und dies ist wiederum nur möglich, wenn die nach den drei Coordinatenebenen zerlegten Paare sich in jeder der drei Ebenen ebenfalls zu Null aufheben oder wenn, was dasselbe heisst, die zerlegten Paare um die jedesmal zugehörigen

Coordinatenaxen im Gleichgewicht sind, d. h. eine Summe gleich Null ergeben. Die Gleichsetzung dieser Paarsummen gleich Null repräsentirt aber die bekannten drei Momentgleichungen, in denen das rotatorische Gleichgewicht ausgedrückt wird. Auf diese Weise hat also die Vervollständigung der Elemente der Statik durch den Begriff des Kräftepaars dazu gedient, die sechs Grundgleichungen der Statik in der einfachsten Weise abzuleiten. Die zwei Hauptseiten des Gleichgewichts und der Bewegungsmöglichkeit, nämlich die Gesichtspunkte der Translation und der Rotation, sind in fundamentaler Art hervorgetreten und bis in das Gebiet der ersten Principien hinein verfolgt. Dies ist methodisch und systematisch ein nicht leicht zu überschätzender Fortschritt. Sonst gelangte man zur Rotation wie zu etwas Zufälligem, was sich willkürlich in die allgemeinen Consequenzen der zunächst blos translatorisch vorgestellten Kräftewirkungen und Kräftezusammensetzungen einführte. Jetzt, nach der Poinsotschen Theorie, ist es möglich, schon in den ersten Grundlagen die Veranstaltungen zu treffen, deren Consequenzen alsdann immer beide Seiten der Bewegung und des Gleichgewichts beherrschen.

Eine Einzelkraft lässt sich mit einem Paar nur dann zu einer Resultante zusammensetzen, wenn die Kraftrichtung der Ebenenrichtung des Paars parallel ist. Dies ist also die Bedingung, damit an einem System in der allgemeinen Zusammensetzung der Kräfte und der Paare eine einzige Resultante entstehe. In allen andern Fällen, wo die Kraftrichtung die Ebene des Paars schneidet, wird das Ergebniss die zweierlei Bewegungsarten umfassen, d. h. es wird in einem resultirenden Paar und in einer resultirenden Einzelkraft bestehen.

Unter den weiteren Anwendungen der Poinsotschen Methode ist die Auffindung des Begriffs derjenigen Ebene auszuzeichnen, nach welcher die an einem System wirkenden Paare bei der Projection ein Maximum ergeben. Es ist dies ganz einfach die Ebene des resultirenden Paars, und die fragliche Maximalsumme der auf diese Ebene reducirten Paare wird durch das resultirende Paar selbst vorgestellt. Wenn man sich daher anstatt unmittelbar an die Ebenen an beliebige senkrecht zu denselben stehende Axen, d. h. an die Axen der Paare hält und irgend einen Punkt ins Auge fasst, durch welchen man sich ausser einer Axe des resultirenden Paars noch eine Unendlichkeit von beliebig zu wählenden rechtwinkligen Coordinatenaxen denkt, so kann man

auch sagen, dass die Ebene, welche auf der resultirenden Axe senkrecht steht, im Vergleich mit allen andern Ebenen, die man sich als Coordinatenebenen denselben Ursprungspunkt durchschneidend vorstellen mag, das Maximum unter den Summen der auf die verschiedenen Ebenen reducirten Paare repräsentirt. Es ist dieser Satz die genaue Analogie einer für die Einzelkräfte geltenden Wahrheit, die jedoch weder von Poinsot noch sonst mit der ihr gebührenden principiellen Auszeichnung bedacht wird. Unter allen Richtungen ist nämlich die der Resultante diejenige, auf welche reducirt ein beliebiges System von Kräften ein Maximum ergiebt; oder in einer etwas andern Wendung ausgedrückt, die Resultante stellt selbst in Vergleich mit allen andern Richtungen, in denen die Kräfte wirkend gedacht werden können, dieses Maximum der Wirkung vor. Genau so verhielt es sich aber auch, wie Poinsot nachgewiesen hat, mit den Kräftepaaren. In der letzteren Beziehung ist es am natürlichsten, nicht die Axenrichtung, sondern die Ebenenrichtung oder auch unmittelbar die Ebene des resultirenden Paars zu Grunde zu legen und zu sagen, dass diese Ebene die des Maximums der Paare sei.

165. Ein interessanter und nothwendiger Grundbegriff, der zu dem Poinsotschen Hauptverfahren gehört, ist derjenige der Ebene des Minimums unter den Ebenen der Maximalpaare, die sich als resultirende Paare für die verschiedenen Angriffspunkte der translatorischen Resultante ergeben. Fasst man nämlich die schliessliche Gesammtresultante in irgend einer bestimmten Lage und das zu dieser Lage gehörige Paar ins Auge, so wird die Verlegung jener Resultante in eine beliebige andere ihr parallele Lage, dem Hauptverfahren gemäss, ein neues Paar erzeugen, welches mit dem für die alte Lage resultirenden Paar zusammenzusetzen ist und so das für die neue Lage resultirende Paar ergiebt. Da die neue Lage der Resultante beliebig wählbar ist, wenn sie nur mit sich selbst parallel an einem dem System unveränderlich zugehörigen Punkt angreift, so kann man die Grösse des der Verlegung Rechnung tragenden Paares vermöge der beliebig zu wählenden Länge seines Hebelarms so einrichten, dass es in der Zusammensetzung mit jenem zuerst resultirenden Paar ein neues, auf der Resultante mit seiner Ebene senkrecht stehendes resultirendes Paar liefert. Dies ist dann das minimale Paar; denn jede neue Verlegung der translatorischen Resultante würde ein Paar einführen, dessen Ebene auf derjenigen des Minimalpaares

senkrecht stände und in der Zusammensetzung mit dem Minimalpaare stets ein grösseres Paar liefern müsste. Poinsot bezeichnet das so gewonnene Minimalpaar als ein Minimum Maximorum[1]), da er die für alle Lagen der translatorischen Resultante resultirenden Paare und deren Ebenen, aus dem in unserer vorigen Nummer angeführten Grunde, als Maxima ansieht und benennt. Weniger unbequem gestalten sich die Ausdrücke und Vorstellungen, wenn man jene maximale Eigenschaft einfürallemal als charakteristisches Zubehör aller resultirenden Effecte, also auch der Paarresultanten erkennt, alsdann aber das Maximum nicht mehr als Benennungsmittel für eine weit erheblichere Eigenschaft gebraucht. Die Eigenschaft, Ebene des resultirenden Paars zu sein, ist ein natürlicheres und einfacheres Bestimmungsmittel, als die Eigenschaft, diejenige Ebene zu sein, auf welche reducirt die componirenden Paare in Vergleichung mit allen andern Ebenen ein Maximum ergeben. Das von Poinsot bezeichnete Minimum Maximorum ist also ganz einfach das kleinste unter allen resultirenden Paaren, und es giebt immer eine einzige Lage der translatorischen Resultante, welcher dieses geringste Paar zugehört. Die Ebene dieses Paars steht, wie schon gesagt, auf der Richtung der Resultante senkrecht. In dem Fall des translatorischen Gleichgewichts, in welchem gar keine Bewegungsresultante mit ihrer verschiedenen Anbringungsart zu berücksichtigen ist, findet offenbar der entsprechende Unterschied gar nicht statt. Es giebt alsdann kein Minimum, da die Ebene des resultirenden oder, mit andern Worten, des maximalen Paars keine Veränderung durch Einführung eines neuen Paars erfahren kann. Sie wird alsdann eine einzige ebenso unveränderlich bestimmte Richtung im Raume haben, wie es mit jeder gewöhnlichen Kraftresultante der Fall ist. Dem Fall des Gleichgewichts steht übrigens die Voraussetzung gleich, dass man von der translatorischen Bewegung eines Systems abstrahire, dasselbe mithin als ruhend betrachte und nur die so übrigbleibenden relativen Vorgänge und Beziehungen erwäge. Alsdann wird man auch nur eine einzige unveränderliche Ebene des resultirenden Paars oder, mit andern Worten, des Maximums der Paare ohne weitere Unterscheidbarkeit erhalten.

[1]) In dem schon angef. Mémoire sur la composition des moments et des aires, unter II (Anhang der Eléments de statique).

Erwägt man, dass Poinsot die wesentliche Einerleiheit der drei Begriffe des Paars, des Moments und derjenigen Grösse, welche im Princip der Flächen als Fläche oder Flächenraum bezeichnet wird, überall zu Grunde legt und in diesen drei Begriffen mit Recht nur verschiedene Vorstellungsarten einer und derselben Sache sieht, so ist klar, dass die Theorie der Paare zugleich die Theorie der Momente und der Flächenräume einschliesst. So wird denn auch von ihm im Hinblick auf die Dynamik eine Andeutung[1]) gegeben, dass die Erhaltungsvorstellungen in Beziehung auf translatorische Kräfte und auf rotatorische Momente oder Flächenräume sich ganz einfach aus seiner verallgemeinerten Zusammensetzung der Kräfte ergeben. Das Interessante an diesem einfachen Gesichtspunkt besteht aber darin, dass nicht blos die Erhaltung der Grösse der Summen, sondern auch die Unveränderlichkeit der Richtung der Ebene hervortritt, die man heut gewöhnlich als die Ebene des Maximums der Flächenräume kennzeichnet. Diese Ebene ist in der That nichts Anderes als die Ebene des resultirenden Paars oder, wenn man sich anders ausdrücken will, des resultirenden Moments oder Flächenraums. Sie hat keine wesentlich andere Bedeutung als diejenige, welche auch der Richtung jeder translatorischen Resultante zukommt; denn beide haben die Eigenschaften des Maximum, wenn man sie mit andern Richtungen oder Ebenen vergleicht, und sich auf die letzteren die componirenden Einzelkräfte oder die componirenden Paare (Momente, Flächen) des Systems projicirt und reducirt denkt. Hienach ist durch die Poinsotsche Theorie, wenigstens zu einem Theil, die Frage aufgeklärt, wie die maximalen Eigenschaften in der Wirkungsart der Kräfte principiell entstehen. Es sei daher hier daran erinnert, dass die tiefere Untersuchung aller auf Maxima oder Minima bezüglichen Eigenschaften der Kräftewirkungen mehr und mehr dahin führen muss, diese Eigenschaften schon in dem Fundamentalprincip der Zusammensetzung der Kräfte oder überhaupt in den ersten elementaren Ausgangspunkten der Mechanik anzuerkennen. Wie nebensächlich, ja man könnte sagen zufällig, die maximalen Eigenschaften in Vergleichung mit ihrer wahren Ursache sind, zeigt sich darin, dass jeder resultirende Effect schon als solcher ein Maximum repräsentirt, wenn man ihn mit der unendlichen Möglich-

---

[1]) Ibid. unter III. Application . . . à la dynamique.

keit aller derjenigen Effecte vergleicht, die sich für translatorische Kräfte nach einer beliebigen andern linearen Richtung, oder für Kräftepaare und die ihnen entsprechenden Begriffe nach einer beliebigen andern Ebenenrichtung ergeben müssten.

166. Ungeachtet der unmittelbaren Beleuchtung wichtiger Principien der Dynamik, wie namentlich desjenigen der Flächen, ist die Poinsotsche Theorie doch wesentlich nur als eine vollständigere Lehre von der Zusammensetzung der Kräfte anzusehen. Ohne die Zusammensetzung der Paare und ohne die Einführung dieser eigenartigen Bewegungsursachen kann man consequenterweise in völliger Strenge nicht über das Problem hinausgelangen, die Kräfte um einen Punkt zusammenzusetzen. Schon die materielle Linie oder das mechanisch verbundene Punktepaar lässt sich ohne den neuen Begriff oder einen Ersatz desselben nicht streng behandeln. Die Momente waren in ihrer gewöhnlichen Fassung ungenügende Ersatzmittel, weil man bei ihnen immer irgend welche Axen ideell fixiren musste. Besonders seltsam nahmen sich aber die Flächenräume aus, da sie an sich selbst gar nicht das Ansehen hatten, etwas Kraftartiges vorzustellen, und dennoch dazu dienen mussten, eine allgemeine Haupteigenschaft der aus dem Gesichtspunkt der Rotation aufgefassten Bewegung eines Systems auszudrücken. Fortan hat man es von vornherein mit nichts Anderem als der Zusammensetzung jener eigenartigen Bewegungsursachen zu thun, die man Kräftepaare nennt. Der Parallelismus der ersten Principien, der allgemeinen Eigenschaften und der weiteren Entwicklungen ist hiedurch in Beziehung auf Translation und Rotation vollständig geworden.

Poinsot hat seine eigenthümliche, auf das Anschauliche gerichtete Methode begreiflicherweise mit dem besten Erfolg in einer neuen Rotationstheorie geltend gemacht. Von der Theorie der Kräftepaare an sich selbst konnte man sagen, dass sie die Elemente und Principien bereichert, übrigens aber das mechanische Wissen nicht eigentlich im Stoff, sondern nur in den Vorstellungsformen und in den Ableitungsarten erweitert habe. Wie wir früher (Nr. 120) angeführt haben, war schon Euler dem Begriff des Kräftepaars sehr nahe gekommen, indem er bemerkte, dass ein Rotationsmoment, bei welchem die translatorische Wirkung einer Kraft verschwinde, nur gedacht werden könne, wenn man der Kraft eine gleiche parallele Kraft entgegengesetzt denke. Es war daher eine sehr natürliche Entwicklung, dass Poinsot den

Begriff des Moments in dieser Weise mit dem Gedanken einer doppelten Kraft verband und ihn ausserdem von dem Hinblick auf eine bestimmte Axe freimachte. Indem er nur die allgemeine Axenrichtung im Raume oder, was dasselbe ist, die allgemeine Richtung der Ebene als das überall Wesentliche erkannte, verwandelte er den Begriff des Moments in denjenigen des Kräftepaars. Trotz der logischen Erheblichkeit dieser Verwandlung könnte man jedoch meinen, sie sei nur formaler Natur und habe daher nur die Eleganz und Strenge der Elemente, Principien und Beweise gefördert. Indessen hat Poinsot durch seine Lösung des Problems, die Gesetze der Rotation eines Körpers darzustellen, die Fruchtbarkeit seiner Verfahrungsarten und Gesichtspunkte bewährt.

Die erste besondere und zugleich kurze Darstellung der neuen Rotationstheorie ist in dem schon angeführten Memoire von 1834 enthalten [1]). Eines der bekanntesten Hauptergebnisse ist die Vorstellung von dem Centralellipsoid oder, wie man es jetzt auch nennt, von dem centralen Trägheitsellipsoid, durch dessen rollende Bewegung auf der unveränderlichen Ebene eines den Impuls ertheilenden Paars die Umstände und Eigenschaften der Rotation eines Körpers um einen Punkt dargelegt und veranschaulicht werden. Doch geht uns hier nicht eigentlich das Rotationsproblem an, da seine Lösung an sich selbst nicht neue Principien, sondern nur Specialconsequenzen gewisser elementarer Grundlagen liefert.

Was diese Grundlagen betrifft, so setzt Poinsot die Rotationen ebenso zusammen, wie die translatorischen Kräfte, indem er jene nach Maassgabe der Winkelgeschwindigkeiten und Axenlagen combinirt. So ergeben die Axen, deren Längen man den Winkelgeschwindigkeiten proportional setzt, ein Parallelogramm der Rotationen, welches dem Parallelogramm der Kräfte entspricht. Die Diagonale stellt mit ihrer Richtung und Lage die Axe, und

---

[1]) Die bereits erwähnte ungleich umfassendere Reproduction im Journal des Mathématiques von 1851 ist unter derselben Jahreszahl in einer Quart- und in einer Octavausgabe erschienen. Für die historische Betrachtung muss die Ausgabe von 1834 ohnedies maassgebend sein; aber sie hat auch noch, abgesehen von ihrer wörtlichen Aufnahme in den Abdruck der erweiterten Exposition, den Vortheil, die wesentlichen Punkte unbelastet mit secundären Ausführungen zu geben und so für manche Leser die Uebersichtlichkeit und die Kraft des Eindrucks zu erhöhen. Auch war der Verzicht auf Figuren in der 1. Ausgabe ein methodischer Vorzug.

mit ihrer Grösse die Winkelgeschwindigkeit der resultirenden Rotation vor. Analoge Regeln ergeben sich für die Zusammensetzung der Rotationen um parallele Axen, indem hier Alles der Zusammensetzung paralleler Kräfte entspricht. Die resultirende Axe liegt in diesen Fällen wie die Resultante von parallelen Kräften und ihre Grösse stellt wiederum die Winkelgeschwindigkeit vor. Da sich bei Rotationen um gegebene Axen jedes Princip und jeder Satz, der von den translatorischen Kräften gilt, analog wiederfindet, so kann es auch nicht überraschen, dass zwei Rotationen von entgegengesetztem Sinn um parallele Axen, wenn sie von gleicher Grösse sind, ein Rotationspaar ergeben, welches keine Rotationsresultante haben und durch keine Rotation aufgewogen werden kann. Der Effect dieses Rotationenpaars ist translatorisch und wird, ganz analog wie der des Kräftepaars, durch das Product aus der Winkelgeschwindigkeit und dem Axenabstand gemessen. Ein solches Rotationenpaar hat die Tendenz, das System senkrecht zu der Ebene des Paars, d. h. zu der Ebene der Axen der gegebenen Rotationen translatorisch mit einer dem bezeichneten Product entsprechenden Geschwindigkeit zu bewegen.

Eine Rotation kann man verlegen, wie eine translatorische Einzelkraft, indem man die Axe parallel mit sich selbst um einen gewissen Abstand entfernt. Nur muss man dann auch zugleich, analog dem Hauptverfahren bei der Verlegung der Einzelkräfte, ein der Verlegung Rechnung tragendes Rotationenpaar einführen. Wie viele Rotationen daher auch gegeben sein mögen, man kann sie sämmtlich so verlegen, dass ihre Axen durch einen beliebig zu wählenden Punkt gehen und sich so zu einer einzigen resultirenden Rotation zusammensetzen. Was andererseits die erzeugten Rotationenpaare betrifft, so können sie wie die Kräftepaare verlegt und zusammengesetzt werden. Es giebt also auch ein Parallelogramm der Rotationenpaare, und es ist klar, dass man durch die Zusammensetzung schliesslich zu einem letzten resultirenden Rotationenpaar gelangen muss. Hiedurch sieht man, wie alle denkbaren Rotationen um beliebige Axen in der Zusammensetzung ein analoges Ergebniss liefern, wie die allgemeine von Poinsot geregelte Zusammensetzung der Kräfte. Erinnert man sich des Minimum Maximorum, so ist es offenbar, dass auch für die Zusammensetzung der Rotationen der beliebige Punkt, durch welchen die Axen der Rotationen und mithin die resultirende Axe geht, oder vielmehr diese letztere selbst so verlegt werden kann, dass

ein resultirendes Rotationenpaar erzeugt wird, dessen Ebene zu jener resultirenden Rotationsaxe senkrecht steht. Da nun dies Rotationenpaar eine Translation senkrecht zu seiner Ebene bedeutet, so fällt die Translation in die Axenrichtung der resultirenden Rotation, und es ist erwiesen, dass jede beliebige Mannichfaltigkeit gegebener Rotationen um beliebige Axen an einem System nichts Anderes hervorbringt, als eine einzige Drehung um eine Axe, verbunden mit der gleichzeitigen Fortschiebung nach Richtung dieser Axe. Die einzelnen Punkte werden daher in einer Schraubenlinie bewegt.

167. Kennzeichnend für Poinsots Methode ist seine Virtuosität in der klaren Veranschaulichung. Die Rotation um eine Axe bietet hier keine Schwierigkeit, und auch verbunden mit der Translation ergiebt sie die Bewegung jedes Punkts um einen Kreiscylinder in einer Schraubenlinie. Dagegen ist die Rotation um einen Punkt, bei welcher dauernd keine Axe besteht, sondern nur die sogenannte Momentanaxe in das Auge gefasst werden kann, weit schwieriger zu erläutern. Hier führte Poinsot bekanntlich seine zwei beliebigen Kegel ein, die den Drehungspunkt zur gemeinsamen Spitze haben. Indem die bewegliche Kegelfläche auf der festen rollt, ist ihnen jederzeit eine Kante gemeinsam, in welcher sie sich berühren, und welche für den strengen dauerlosen Zeitpunkt die Momentanaxe der Drehung vorstellt. So zeigt der bewegliche Kegel, was der Körper, dem er angehört, bei der Drehung um einen Punkt eigentlich thut, und wie die Momentanaxe, im Körper und nach Aussen betrachtet, ihren Ort stetig verändert.

Zu diesen phoronomischen Bildern, mit denen Poinsot seine eigentliche und mechanische Rotationstheorie eingeleitet hat, kommt als allgemeinste Vorstellung von der beliebigen Bewegung eines Körpers in Folge gegebener Rotationen noch die Erweiterung des schon angeführten Cylinderschema oder, mit andern Worten, der Translation längs der Rotationsaxe hinzu. Aendern sich nämlich die Data der Zusammensetzung jeden Augenblick, so ändert sich die Axe der Richtung nach, ebenso die Winkelgeschwindigkeit und endlich auch die Translationsgeschwindigkeit. Der einzelne Punkt bewegt sich daher noch immer schraubenförmig, aber gleichsam unter stetiger Variation dieser Bewegung nach ihren Elementen, so dass man ihn sich in einem Canal denken kann, der für jedes

kleinste Element seiner Ausdehnung einer bestimmten schraubenförmigen Bewegung entspricht, die sich jedoch von Element zu Element oder, genauer geredet, stetig von Punkt zu Punkt in ihren besondern Bedingungen ändert.

Die mechanische Rotationstheorie, welche die Kräfte als solche und in Beziehung zu den Massen und deren Trägheit zu behandeln hat, beginnt natürlich mit der allgemeinen Zusammensetzung der Kräfte und hat zum nächsten Gegenstand die Bestimmung der Wirkung des resultirenden Paars auf den Körper. Die translatorische Resultante im Schwerpunkt bezieht sich auf die ganze Masse des Körpers und ist mithin, wenn man die Geschwindigkeit erhalten will, durch jene Masse zu dividiren. Ein Kräftepaar, dessen Ebene stets durch den Schwerpunkt gelegt werden kann, wird von Poinsot zunächst nach den drei Hauptaxen in seinen Partialwirkungen betrachtet, und es ist eine Analogie dieser eigenthümlichen Axen mit der Eigenschaft des Schwerpunkts, dass die Wirkung um jede derselben sich auf das ihr zugehörige Trägheitsmoment so zu sagen als auf die Masse bezieht und daher durch dieses Trägheitsmoment zu dividiren ist. Jede der drei Componenten des Kräftepaars, welches an dem Körper wirken soll, wird durch das entsprechende Trägheitsmoment zu dividiren und alsdann die resultirende Wirkung nach der Diagonale des Parallelepipeds zu ermitteln sein.

In diesem Stadium der Frage führt nun Poinsot sein oben erwähntes, berühmtes Centralellipsoid oder centrales Trägheitsellipsoid ein, indem er auf den Hauptaxen des Körpers Längen abträgt, die den Quadratwurzeln der Trägheitsmomente umgekehrt proportional sind. Wird nun die Ebene des Paars mit sich selbst parallel so verlegt, dass sie das Ellipsoid tangirt, so kann die Wirkung des Paars durch eine Drehung um den Berührungspunkt als Momentanpol veranschaulicht werden, wobei der Mittelpunkt des Ellipsoids in seiner Lage bleibt. Alle weitere Bestimmung der Bewegung führt sich dann auf eine Bewegung des Ellipsoids zurück, welches auf der festen tangirenden Ebene des Paars bei fixirter Lage des eignen Mittelpunkts rollt und auf diese Weise alle Elemente und Modalitäten der Rotation sichtbar macht. Man kann den Körper daher ganz zur Seite lassen und das Ellipsoid als ihm äquivalent betrachten. Die Einzelheiten und besondern Nachweisungen des angeführten Poinsotschen Arrangements gehören

jedoch um so weniger in unsere geschichtliche Darstellung, als sie nicht mehr unmittelbar mit den Principienfragen verknüpft sind und als namentlich die Bestimmung des Orts, welchen der rotirende Körper nach einer bestimmten Zeit einnimmt, in der analytischen Form auf elliptische Transcendenten zurückführt[1]).

Das Einzige, wodurch auch diese Einzelheiten eine allgemeine Bedeutung erhalten, ist der Charakter der Methode, und in dieser Beziehung ist durch unsere Anführungen wohl hinreichend gezeigt, dass Poinsot in der That den Anfang gemacht hat, neben dem vorherrschend analytischen Verfahren eine unmittelbar auf die Begriffe und Anschauungen gerichtete Vorstellungs- und Ableitungsart mechanischer Verhältnisse zu vertreten. Sein Verdienst beschränkt sich also nicht blos auf eine gewisse Aufklärung der Elemente und auf eine zugleich einfachere und erfolgreichere Behandlung der schwierigsten Specialprobleme, sondern erstreckt sich auch auf die Schöpfung neuer methodischer Eigenthümlichkeiten. Dem sehr natürlichen Bedürfniss, ausser den blos durch den Calcül ausgedrückten Merkmalen der Begriffe auch diese Begriffe an sich selbst in ihrer mechanischen Bedeutung kennen zu lernen, hat Poinsot in einem erheblichen Maasse entsprochen, und die ersten Schritte, die von ihm in dieser Richtung gethan sind, werden die vollste Würdigung erst dann erfahren, wenn neue erhebliche Schritte in seinem oder in einem ähnlichen Sinne hinzugekommen sein werden. Darüber darf man sich freilich nicht täuschen, dass hiemit noch lange kein völlig consequenter Aufbau aller mechanischen Grundwahrheiten in vollendeter Systemform gewonnen ist. Hiezu würde es mehr der Zerlegung der Begriffe bedürfen und das offenbar noch zusammengesetzte Gebilde des Kräftepaars nicht das letzte Mittel sein können. Man würde auf die Angriffsgegenstände der Kräfte, zunächst also auf die mechanische Linie einzugehen haben, — eine Nothwendigkeit, die in der bisherigen Geschichte der Mechanik noch nie in das Bewusstsein getreten ist, und die, wie sie zum Theil bereits die Mängel im Archimedischen Beweise des Hebelsatzes erklären kann, auch überhaupt den Fingerzeig bildet, woher die sich überall fühlbar machenden Lücken heutiger mechanischer Deduction stammen. Eine weitere Ausführung hievon würde jedoch den Rahmen des

---

[1]) Vgl. hierüber die angef. erweiterte Ausg. der neuen Rotationstheorie von 1851, dritte Abth., besonders Art. 10.

vorliegenden Thema nicht mehr einhalten und am wenigsten dazu geeignet sein, einen Anschluss an Poinsotsche Wendungen vorzustellen.

Zweites Capitel.

Ueber problematische mechanische Principien bei Gauss, Hamilton, Jacobi, Dirichlet und Andern.

168. Hätten wir es, anstatt mit den allgemeinen Principien, mit den speciellen Problemen zu thun, so würden wir in diesem Abschnitt Einiges mehr als ohnedies in Frage zu bringen haben. Was zunächst K. F. Gauss[1]) betrifft; so sei nur an seine Behandlung der Aufgaben des Attractionscalcüls, insbesondere an seine Abhandlung über die Anziehung der Sphäroide[2]) und an diejenige über die im umgekehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte erinnert[3]). Die Einführung des Potentials[4]), d. h. jener für den Attractionscalcül charakteristischen Function, welche die Summe oder das Integral der durch die Entfernungen dividirten Massentheilchen ausdrückt, — die Einführung dieses Massenpotentials, deren Consequenzen in der zuletzt erwähnten Abhandlung gezogen werden, hat ihre Bedeutung zunächst für die zugehörige besondere Classe von Aufgaben. Ebenso ist die Anziehung der elliptischen Sphäroide ein Specialproblem, für welches eine ganze Vorgeschichte existirt, in

---

[1]) Geb. 1777, gest. 1855.

[2]) Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum homogeneorum; Comment. der Societät zu Göttingen, Bd. II (1813); Gauss Werke Bd. V (1867), S. 3—22.

[3]) „Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte"; in Gauss und Weber, Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1839, Leipzig 1840; Gauss Werke Bd. V, S. 197—242.

[4]) Die Benennung als Potential gehört der eben angeführten Abhandlung an, während die fragliche Function schon bei Laplace (Méc. céleste, Buch II, Art. 11) ausgezeichnet ist und in der 2. Aufl. von Lagranges Méc. anal. (1. Abth. Sect. V, Art. 9) als Specialfall der Zusammensetzung der Kräfte hervortritt. Der Name potential function jedoch schon 1828 bei Green; vgl. dessen Mathematical Papers, edited by N. M. Ferrers, London 1871, S. 9.

welcher auch Laplace[1]) eine Rolle gespielt hat; indessen haben diese für die Anwendungen erforderlichen Specialtheorien sich nur auf der Grundlage der vorhandenen und zugestandenen allgemeinen Principien der Mechanik erhoben und keine Veranlassung zu einer neuen Fassung der Principien gegeben. Ebenso ist die Theorie der auf Veranlassung der Capillarphänomene in einer eigenthümlichen Wendung zuerst durch Laplace[2]) untersuchten Gleichgewichtsverhältnisse der Flüssigkeiten mit Rücksicht auf eine besondere, von der Newtonschen Attraction unterschiedene, nur in den kleinsten Entfernungen als erheblich wirksam vorausgesetzte Molecularanziehung auch in ihrer neuen Bearbeitung durch Gauss[3]) zu nichts Erheblichem, geschweige zu etwas principiell Wesentlichem gelangt.

Mit der allgemeinen principiellen Grundlage der Mechanik hat sich Gauss ausdrücklich nur in einem einzigen, diesem Gegenstande speciell gewidmeten Aufsatz[4]) beschäftigt und in demselben, unter Hinblick auf das Princip der geringsten Wirkung und dessen Vorgeschichte, ein verwandtes Schema aufgestellt, vermöge dessen das Gesetz der statischen und der dynamischen Beziehungen eines Kräftesystems zu dem Arrangement, d. h. zu dem Inbegriff der Hindernisse, durch die es modificirt wird, in ein durch einen einfachen Begriff formulirbares Verhältniss tritt. Dieser Begriff ist derjenige der geringsten Ablenkungswirkung, indem als Ablenkung die Einnahme von Oertern angesehen wird, welche von denjenigen verschieden sind, in denen sich die Punkte des Systems befinden würden, wenn sie nur unter dem Einfluss der frei wirkenden Kräfte, aber nicht unter demjenigen der modificirenden Systembedingungen gestanden hätten. Die Ablenkungsaction wird durch die Quadrate der Ablenkungsdistanzen, d. h. der eventuellen oder hypothetischen und der wirklichen Oerter gemessen. Analytisch ist das fragliche Schema mithin ein Princip der kleinsten Quadratsummen, und Gauss selbst unterlässt auch keineswegs an die Analogie zu erinnern, nach welcher die Methode der Natur in der Ausgleichung der

---

[1]) Méc. céleste, Buch III, Cap. 1 und Buch II, Art. 11—12.

[2]) Ibid. Buch X, Supplement.

[3]) Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii; Comment. der Societät zu Göttingen, Bd. VII (1830); Gauss Werke Bd. V, S. 31—77.

[4]) „Ueber ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik"; Crelle, Journal für Mathematik, Bd. IV (1829); Gauss Werke Bd. V, S. 25—28.

Hindernisse mit jener berühmten Methode der kleinsten Quadratsummen übereinstimme, durch welche die Wahrscheinlichkeit der Beobachtungsfehler einem Gesetz unterworfen werde. In der That lag es für den Repräsentanten dieser letzteren Methode[1]) sehr nahe, seine Fassung des mechanischen Grundprincips in der Richtung dieser Analogie zu halten und das Verfahren der Natur in der Accommodation ihrer freien Kräfte an gegebene Hemmungen mit der Anbequemung des Mathematikers an die Vorbedingungen der Zusammenstimmung und gegenseitigen Abhängigkeit der Beobachtungsgrössen zu vergleichen. Das mechanische Princip in der Gaussschen Formulirung besagt nun nichts Anderes, als dass die Summe der Quadrate jener Ablenkungsdistanzen ein Minimum sein müsse. Der Begriff der Ablenkung ist auch für den Fall des Gleichgewichts gültig; denn in diesem Fall bleiben die Punkte thatsächlich an ihren Oertern, und man muss daher den Abstand dieser Oerter von denjenigen Positionen veranschlagen, welche die Punkte unter der freien Einwirkung der Kräfte nach Verlauf eines unbegrenzt kleinen Zeittheilchens einnehmen würden. Es ist also genau dieselbe Regel, durch welche das Verhalten der Kräfte im Bewegungszustand und in dem besondern Fall des Gleichgewichts ausgedrückt wird. Auch bemerkt Gauss ausdrücklich, dass die Statik nur als ein besonderer Fall der Dynamik anzusehen sei.

Will man die fragliche Principienfassung unabhängig von ihrem analytischen Ausdruck formuliren, so hat man im Sinne von Gauss nur zu sagen, dass die Ablenkungsaction so klein als möglich sei, wobei dann zugleich, wie auch Gauss selbst hervorhebt, die freie Action so gross als möglich bleibt. Geht man nun etwa im Allgemeinen davon aus, dass die Action der Masse und dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional sei, so ergiebt sich auch der von Gauss angenommene Ausdruck für die specielle Ablenkungsaction, indem für den gemeinsamen Augenblick die Producte der Massen mit den Quadraten der Ablenkungswege, die thatsächlich ins Auge gefasst werden, nur von dem gemeinsamen Divisor der Zeit befreit erscheinen. Das gekennzeichnete Princip, welches bei Gauss dasjenige der virtuellen Geschwindigkeiten mehr als blos ersetzen soll, lautet in dem angeführten Aufsatz:

---

[1]) Dargestellt in Gauss, Theoria motus corporum coelestium, 1809; über die ursprüngliche Auffindung vgl. Sartorius von Waltershausen, Gauss zum Gedächtniss, Leipzig 1856, S. 16 und S. 42 fg.



„Die Bewegung eines Systems materieller, auf was immer für eine Art unter sich verknüpfter Punkte, deren Bewegungen zugleich an was immer für äussere Beschränkungen gebunden sind, geschieht in jedem Augenblick in möglich grösster Uebereinstimmung mit der freien Bewegung, oder unter möglich kleinstem Zwange, indem man als Maass des Zwanges, den das ganze System in jedem Zeittheilchen erleidet, die Summe der Producte aus dem Quadrate der Ablenkung jedes Punkts von seiner freien Bewegung in seine Masse betrachtet."

169. Um das eben erwähnte Princip in seinem Zusammenhang mit der Vorgeschichte zu verstehen, müssen wir uns der Auffassungen und Schicksale des Princips der geringsten Wirkung erinnern und einige Züge derselben hier noch besonders hervorheben. Carnot hatte richtig erkannt, dass sich ein Theil der Vorstellungen, deren Metaphysik sich Maupertuis hatte angelegen sein lassen, darauf zurückführen liesse, dass die verlornen lebendigen Kräfte im Stoss, oder diejenigen, welche für den Fall des Mangels der Elasticität als verloren gelten würden, ein Minimum seien. An derselben Stelle (Nr. 125), wo wir über diese Carnotsche Wendung berichteten, wurde auch schon auf die mögliche Verallgemeinerung hingewiesen, derzufolge die Actionen der verlornen Kräfte minimal sein müssten. Ueberträgt man dieses Princip auf die durch die Beschränkungen des Systems eventuell im Zeittheilchen aufzuhebenden Actionen, so begreift sich die Gausssche Formulirung als eine Variante, die dem Princip der geringsten Wirkung verwandt ist.

Sieht man das fragliche Princip in seiner Vollständigkeit nicht als einen ersten Ausgangspunkt, also nicht eigentlich als ein erstes Princip, sondern, wie man muss, als einen Lehrsatz an, der eine allgemeine Eigenschaft des Verhaltens der Kräfte ausdrückt, so kann man von ihm auch sagen, es sei im engern Sinne des Worts deducirt oder bewiesen. Alsdann hat es nämlich das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten sowie das d'Alembertsche Princip in ihrer gegenseitigen Combination zur Grundlage. Nimmt man nämlich neben dem wirklichen Ort, den der Punkt nach Verlauf des Zeitelements eingenommen hat, irgend einen beliebigen an, welcher jedoch aus einer mit dem System verträglichen Verschiebung resultiren muss, so liefert dieser virtuelle Ort in Beziehung auf denjenigen, den die freie Wirkung der Kraft bestimmt haben würde, eine Ablenkungsdistanz, für welche die sonst im

Princip fragliche Quadratsumme stets grösser ausfällt, als unter Voraussetzung der wirklichen Ablenkung. Die wirkliche Lage ist also unter allen virtuellen Oertern diejenige, welcher das Minimum der in Beziehung auf die eventuellen ganz freien Oerter statthabenden Ablenkungsgrössen entspricht. Die Nachweisung, welche Gauss mit Hülfe des d'Alembertschen Princips und desjenigen der virtuellen Geschwindigkeiten giebt, hat den Vortheil, das Minimum unabhängig von den gewöhnlichen analytischen Kriterien und so zu sagen aus dem einfachen Begriff der Sache festzustellen. Die minimale Eigenschaft wird nämlich dadurch erwiesen, dass unmittelbar gezeigt wird, wie die fragliche Summe der Ablenkungsgrössen in dem vorausgesetzten Fall sich kleiner gestaltet, als wenn man die vorher gekennzeichneten andern Ablenkungen zu Grunde legt. Die drei Oerter des Punktes, die in Frage kommen, nämlich der wirkliche Ort, der hypothetische freie Ort und der beliebig gewählte virtuelle Ort, bilden ein Dreieck, auf welches man die erweiterte Pythagoreische Relation anzuwenden und sich dann zu überzeugen hat, wie das nichtquadratische Glied dieser Gleichung, unter Einführung der für alle Glieder gemeinsam zu machenden Masse des Punktes, das virtuelle Moment der verlornen Kraft darstellt. Die Summe dieser virtuellen Momente für alle Punkte ist nun nach dem d'Alembertschen Princip und nach demjenigen der virtuellen Geschwindigkeiten gleich Null. Bei der Summation aller solcher Gleichungen, die sich für die sämmtlichen Punkte aus der erweiterten Pythagoreischen Relation ergeben, verschwinden daher jene nicht quadratischen Glieder, welche den virtuellen Momenten der verlornen Kräfte entsprechen, und es bleiben nur die einfachen Quadratsummen von je einer der Dreieckseiten übrig, welche letztere mit den zugehörigen Massen multiplicirt sind. Die eine Seite des Dreiecks repräsentirt die wirkliche Ablenkung, eine andere die virtuelle Ablenkung, d. h. die Entfernung des virtuellen Ortes von dem freien Ort. Nun ist die Quadratsumme in Beziehung auf die letztere derjenigen in Beziehung auf die erstere nie gleich, sondern nach der gefundenen Gleichung immer um die Quadratsumme in Beziehung auf die dritte Seite grösser. Das Minimum ist also nachgewiesen und zwar ohne jede Rücksicht auf den Begriff der Action oder einen fremdartigen Gesichtspunkt; vielmehr liegt der Gaussschen Deduction nur die Combination eines geometrischen Satzes mit dem Princip d'Alemberts und mit demjenigen der virtuellen

Geschwindigkeiten zu Grunde. Hierin liegt selbstverständlich auch die Zusammensetzung der Kräfte, ja im besondern Falle die sichtbare Anwendung der Zerlegung und des Parallelogramms der Kräfte.

Wie schon bezeichnet, ist das angeblich neue Princip von Gauss nur eine Variante nach dem Princip der geringsten Wirkung und als solche nur von geringfügigem, überdies blos formellem Werth. Neues ist damit nicht das Geringste gewonnen, sondern wie gewöhnlichermaassen auch sonst bei den mathematischen Aufstellungen von Gauss, nur etwas früher Vorhandenes mit einem veränderten Anstrich versehen. In unserm mathematischen Grundwerk haben wir den Charakter angeblicher Gaussischer Leistungen etwas näher gekennzeichnet und können uns daher hier überhoben finden, dem Ursprung der Gaussischen Wege für jede Kleinigkeit nachzugehen. Hier, d. h. in der Mechanik, würde schon allein der Umstand entscheiden, dass Green, ausgehend von Lagranges allgemeinen mechanischen Formeln, die analytischen Grundlagen für die Behandlung der Elektricität geschaffen und eine Potentialfunction, das später kurzweg sogenannte Potential, zuerst zu umfassender Anwendung gebracht hat, während in Deutschland sich Gauss mit seinen nachgängerischen Aufstellungen, ohne Erwähnung Greens, als Macher der Sache hat ausgeben lassen. Was aber speciell obige mechanische Variante betrifft, so ist es kennzeichnend, wie grade das unrationell gefasste und von vornherein umdunkelte Princip der geringsten Wirkung auf die Vertreter der Unklarheit im 19. Jahrhundert und zunächst insbesondere auf den namhaftesten derselben seine zweideutige Anziehungskraft bewährt hat.

170. In Anknüpfung an die von Lagrange normirte Fassung des Princips der geringsten Wirkung und durch Bearbeitung der Gleichung der lebendigen Kräfte ist der irische Astronom und sich geistreich anstellende Analytiker William Rowan Hamilton (1805—65) dazu gelangt, eine neue analytische Form der allgemeinen mechanischen Beziehungen aufzustellen, die man gegenwärtig kurzweg als das Hamiltonsche Princip bezeichnet. Diese neue Form sieht in der That nach einer Annäherung an die Lösung des Problems aus, zu Lagranges universeller Gleichung der Dynamik eine Stammgleichung oder wenigstens allgemeine Typen oder Charaktere zu einer solchen, d. h. letzte Integrationsgestalten aufzufinden. Die grosse Allgemeinheit, vermöge deren

sich aus einer solchen abschliessenden Integralform die sämmtlichen typischen Hauptsätze der Mechanik durch Herstellung der betreffenden Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung gewinnen lassen müssten, würde sogar dazu nöthigen, ein derartiges Princip, wenn es in befriedigender Fassung vorhanden wäre, als die Wurzel aller übrigen zu betrachten.

Schon als junger Mann hat Hamilton in seinen Arbeiten über die Strahlensysteme[1]) seine späteren mechanischen Wendungen[2]) analytisch vorbereitet. Die mechanischen Aufstellungen beziehen sich zwar unmittelbar nur auf Systeme freier Punkte; aber Hamilton setzt auch mit Recht voraus, dass sich alle wirklichen Verhältnisse und Actionen der Natur schliesslich auf die Behandlung solcher Punktesysteme zurückführen lassen müssten. Auch schon von Lagrange war es ja immer betont worden, dass die freie gegenseitige Einwirkung nach Maassgabe von Distanzfunctionen der Fall der Natur sei, und da sich auch übrigens die unfreien Systeme nach Einführung der Reactivkräfte unter den allgemeinen Typus der freien Kräftecombinationen bringen lassen, so thut die Hamiltonsche Voraussetzung dem allgemeinen Charakter der Ergebnisse keinen Eintrag.

Hamilton selbst bezeichnet sein Princip als dasjenige der veränderlichen Action (law of varying action) und sieht im Princip der geringsten Wirkung nur ein Gesetz der „stationären Action“. Um die Verfahrungsart des irischen Mathematikers zu begreifen, muss man beachten, in welcher Form das Princip der geringsten Wirkung seit und nach der Zeit Lagranges aufgefasst wurde. Es war unter den Händen des Verfassers der Analytischen Mechanik auf einen rein analytischen Ausdruck reducirt, um dessen mechanischen Sinn man sich nicht sonderlich kümmerte. So hatte sich z. B. Laplace[3]) in dieser Beziehung Lagrange angeschlossen, jeden Zweckgesichtspunkt verworfen und nur noch aus Inconsequenz

---

[1]) Theory of systems of rays, in den Transactions of the Royal Irish Academy, Bd. 15 (1828).

[2]) On a general method in dynamics; by which the study of the motions of all free systems of attracting or repelling points is reduced to the search and differentiation of one central relation or characteristic function; in den Philosophical Transactions von 1834, S. 247—308; Fortsetzung 1835 ibid. S. 95—144.

[3]) Méc. céleste, Buch I, Cap. 5, Nr. 23.

gelegentlich[1]) eine metaphysisch geartete Vorstellung blicken lassen. Auch Poisson[2]) hatte das Princip in demselben Sinne reproducirt. Von den zwei analytischen Ausdrucksformen war diejenige, welche nicht die Geschwindigkeit mit dem Raumelement, sondern das Geschwindigkeitsquadrat mit dem Zeitelement multiplicirt enthielt, am geeignetsten, die Hamiltonsche Integralform der Gleichung der lebendigen Kräfte an die Hand zu geben. Indem er die Gleichung der lebendigen Kraft in der ihr von Lagrange gegebenen Gestalt[3]) variirte, mit dem Zeitelement multiplicirte und dann integrirte, ergab sich jene Beziehungsform von höherer Stufe, welche er als Gleichung der charakteristischen Function bezeichnete. Hiemit war die augenblickliche lebendige Kraft in ihrer Häufung zwischen zwei veränderlichen Positionsgrenzen zum Gegenstand einer dynamisch möglichen Variation gemacht. Hamilton bemerkt ausdrücklich, dass die Variation, die dem Princip der geringsten Wirkung zu Grunde liegt, eine dynamisch unmögliche sei, während es sich bei seinem Princip um actuelle Bewegung handle.

Um die Bedeutung der charakteristischen Function zu würdigen, beachte man zunächst, dass Lagranges allgemeine Gleichung der lebendigen Kraft eine Function enthält, welche zusammen mit der Constanten gleich der halben Summe der lebendigen Kräfte gesetzt, und deren Natur durch die Annahme bestimmt wird, dass sie differenzirt die bekannte Summe der Kräftemomente der Universalgleichung ergebe. Diese letztere in unbestimmter Weise als möglich vorausgesetzte Function wird von Hamilton als Kräftefunction (force-function) bezeichnet, und von ihrer Gleichung durch die vorher angegebene Variation und Integration der Uebergang zu der höheren Stufe der charakteristischen Function bewerkstelligt. Jene Kräftefunction ergab, sobald man die Gleichung nach den drei Coordinaten zerlegte, eine sehr einfache Form der Differentialgleichungen der Bewegung, indem man jedesmal nur die nach einer Coordinate differenzirte Kräfte-

[1]) Système du monde, Buch III, Cap. 5, Werke Bd. VI, S. 205, wo er sagt: „Das Integral der lebendigen Kraft eines Systems, die mit dem Zeitelement multiplicirt wird, ist ein Minimum; so dass also die wahrhafte Oekonomie der Natur diejenige der lebendigen Kraft ist.“

[2]) Traité de mécanique, 2. Aufl. Paris 1833 (auch deutsch von Stern), Bd. II, Nr. 573.

[3]) Méc. anal. Bd. I (1811), 2. Abth. Sect. III, Art. 34 u. Sect. IV, Art. 14.

function, d. h. den partiellen Differentialquotienten derselben dem Product aus der Masse und dem zweiten Differentialquotienten der Coordinate gleichzusetzen hatte. Sie war daher nichts Anderes als die allgemeine Potentialfunction. Wenn sich nun schon das gewöhnliche specielle Potential dadurch auszeichnet, dass es zu dem, was die Mechanik beschleunigende Kraft nennt, eine höhere Wirkungsursache liefert, die sich nicht blos auf den Augenblick bezieht, so ist klar, dass ein Aufsteigen zu einem noch über der Kräftefunction belegenen Standpunkt wenigstens von formeller Erheblichkeit sein könne. Dieser Standpunkt wird nun durch die charakteristische Function Hamiltons vertreten. Sie ist eine Function von zwei Positionen des Systems und von der Zeit, welche im Uebergange von der einen zur andern, d. h. von einer bestimmt gegebenen zu einer beliebigen Position verfliesst. Die Beziehung auf die Constanten ist ein kennzeichnender Umstand; denn nur dadurch, dass man sich die Veränderung der lebendigen Kraft in Beziehung auf eine gegebene Constante derselben als von einer allgemeinen, das Gesetz jener Veränderung vorschreibenden Function abhängig denkt, geht man über die Kräftefunction hinaus, die zusammen mit den Constanten den Lauf der Veränderungen der lebendigen Kraft repräsentirt. Das Integral der augenblicklichen lebendigen Kraft, näher erläutert durch die Bearbeitung der andern Seite der Gleichung der lebendigen Kräfte, ist der Hauptbegriff, um den sich die sozusagen charakteristischen Gedanken Hamiltons am natürlichsten gruppiren.

Die Gleichung des Princips der geringsten Wirkung wurde von Lagrange als unfruchtbar angesehen, und Hamilton trat dieser Ansicht bei, indem er zugleich für sein Princip geltend machte, dass es die Schluss- und Zwischenintegrale liefere, während jenes nur dazu gedient habe, die ohnedies bekannten Gleichungen zweiter Ordnung zu reproduciren. In der That ist die letztere Ableitung immer nur ein logischer Cirkel gewesen; denn man hat nur wiedergefunden, was man zur allgemeinen analytischen Aufstellung des Princips der geringsten Wirkung bereits hatte voraussetzen müssen. Obwohl sich nun Hamilton in seinen Darstellungen durch eine auf die Wirklichkeit der mechanischen Vorgänge bezügliche, wenigstens formelle Klarheit auszeichnet, wie sie unter den neben ihm in Frage kommenden analytischen Förderern mechanischer Probleme nicht vorkommt, so kann dennoch seine neue Formgebung der mechanischen Relationen nicht als ein Satz gelten,

der mit den typischen allgemeinen Eigenschaften, die man bisher unter dem Namen von Principien aufgeführt hat, auf eine Linie zu setzen wäre. Noch mehr als blos das Letztere, nämlich eine wirkliche Ueberordnung, würde jedoch möglich sein, sobald die reale Seite der Hamiltonschen Vorstellungsarten zu eingehenderen Auffassungsformen entwickelt wäre. Der einzige reale Begriff, den Hamilton etwas bestimmter gestaltet hat, ist die aufgehäufte lebendige Kraft oder diejenige Action im engern Sinne, welche mit Rücksicht auf eine veränderte actuelle Bewegung zum Gegenstand der Variation gemacht wird.

171. Was C. G. J. Jacobi [1]) zur Bearbeitung der analytischen Hülfsmittel der Mechanik gethan hat, besteht vornehmlich in Specialarbeiten, die sich mit einer neuen Principiengestaltung entweder gar nicht oder nur in ganz secundärer Weise berührt haben. Unter diesen Specialbeiträgen ist die Ableitung der allgemeinen Gleichgewichtsgestalt einer rotirenden flüssigen Masse, deren Theilchen gegeneinander gravitiren, wohl am bekanntesten. Für diesen Fall zog Jacobi eine von Lagrange nicht besonders ausgeführte, aber im fraglichen Zusammenhang auch nicht zu ziehende Consequenz und kam zu dem abstracten Ergebniss, dass der Aequator der gleichförmig rotirenden Masse eine beliebige Ellipse sein könne [2]).

Jacobi selbst stellte eine mechanische Anwendung seiner an sich rein analytischen Theorie eines neuen Multiplicators als neues dynamisches Princip [3]) hin und hatte dasselbe bereits drei Jahre vor der fraglichen ausführlichen Darlegung von 1845 der Petersburger Akademie mitgetheilt. Dieses Princip des letzten Multiplicators dient zur Ermittlung einer letzten Integrationsgestalt der dynamischen Gleichungen und soll in dieser Beziehung erheblich mehr leisten, als die andern bekannten Hauptsätze mit den ihnen entsprechenden Gleichungen. In der angeführten weitläufigen Abhandlung über den neuen Multiplicator wird das Princip

---

[1]) Geb. 1804, gest. 1851. Vgl. über ihn auch Dirichlet in den Abh. der Berliner Akademie von 1852.

[2]) Jacobi „Ueber die Figur des Gleichgewichts“ in Poggendorfs Annalen, Bd. 33 (1834).

[3]) Theoria novi multiplicatoris etc. besonders cap. III namentlich § 22 unter der Ueberschrift: Novum principium generale mechanicum; in den Opuscula mathematica (3 Bde. Berlin 1846—71), Bd. I, S. 162 fg.; zuerst stückweise in Crelles Journal erschienen.

auf einzelne Fälle angewendet, namentlich auf die Bewegung eines von einem festen Centrum und auf diejenige eines nach dem Newtonschen Gesetz von zwei festen Centren angezogenen Punktes, dann auf die Rotation eines Körpers um einen Punkt in Folge eines Stosses u. s. w.[1]). Der einfachste Fall für die Anwendung dieses Princips ist die Bewegung eines Punktes in derselben Ebene, wenn er von einem festen Centrum angezogen wird. Hier werden die beiden zunächst erforderlichen Integrale durch das Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft und durch dasjenige der Flächen geliefert. Indem Jacobi zu diesen beiden Daten diejenige Beziehung fügt, welche durch die rein analytische Manipulation nach dem Princip des letzten Multiplicators gewonnen wird, bestimmt er die Bewegung vollständig und zwar, wie sich von vornherein absehen lässt, durch blosse Quadraturen[2]).

Was wir über die Jacobischen Vorlesungen über Dynamik[3]) vom Winter 1842—43 durch die Veröffentlichung einer fremden Auffassung und Redaction derselben wissen, gestattet zwar nur selten sichere Schlüsse auf Einzelheiten, setzt uns aber in den Stand, im Allgemeinen den Beziehungen der Jacobischen Untersuchungen zu Hamiltons vorangegangenen Aufstellungen näherzutreten und ausserdem einen Einblick in die Vorstellungen zu erlangen, welche sich der deutsch-jüdische Mathematiker über das Princip der geringsten Wirkung und dessen analytische Fassung gebildet hatte. Der Umstand, dass er überhaupt die sogenannte isoperimetrische Form in der Auffassung der mechanischen Probleme und Beziehungen als diejenige von der grössten Allgemeinheit und Tragweite in den Vordergrund treten liess, stimmte mit der von Hamilton vollzogenen Wiederanknüpfung an das Princip der geringsten Wirkung überein. Die besondere Kritik, welche Jacobi diesem letzteren Princip in den Vorlesungen[4]) gewidmet hat, zeigt überdies, dass er sich von der seit Lagrange herrschenden analytischen Fassung desselben nach dem Vorgang Hamiltons nicht befriedigt fand. Eine stillschweigende Voraussetzung, durch welche die Gleichung der geringsten Wirkung erst einen gehörigen Sinn

[1]) Ibid. § 25 sq. Vgl. auch eine 1849 an die französische Akademie gerichtete Abhandlung: Sur la rotation d'un corps, in den Opuscula Bd. II (1851), S. 139—196.

[2]) Vgl. den eben angef. § 25, S. 176.

[3]) Herausg. von A. Clebsch, Berlin 1866 (Borchardtsches Heft).

[4]) Ibid. vornehmlich S. 44 u. 52.

erhalte, sei die Elimination der Zeit und zwar vermittelst der Gleichung der lebendigen Kräfte, wodurch Alles auf Raumelemente reducirt werde. Hiedurch erhält der analytische Ausdruck des Princips eine Gestalt, welcher kein einfacher mechanischer Begriff zu entsprechen vermag. Er wird unter dem Integralzeichen, wo sonst die mit dem Raumelement multiplicirte Geschwindigkeit stand, zu einem Product aus zwei Wurzeln, deren eine sich auf diejenige Seite der Gleichung der lebendigen Kräfte bezieht, welche die Kräftefunction mit der Constanten enthält, während unter dem andern Wurzelzeichen eine Summe der Producte aus Masse und Quadrat des Raumelements figurirt. Ausserdem weist Jacobi noch besonders die Selbstverständlichkeit nach, dass die festen Grenzpositionen, zwischen denen das Integral genommen wird, hinlänglich nahe sein müssen, damit nicht das Princip seine Gültigkeit verliere; so könnten z. B. die kürzesten Linien, welche ein auf der Kugel einem Impuls folgender Körper beschreibt, den Spielraum von 180° nicht überschreiten[1]). Uebrigens ist natürlich auch bei Jacobi die Voraussetzung maassgebend, es gelte das Princip des „geringsten Kraftaufwandes“, wie er es genannt wissen will, nur innerhalb der Vorbedingungen, unter denen auch die Gleichung der lebendigen Kräfte mit dem ihr entsprechenden Princip zutrifft, nämlich nur dann, wenn die für die Anordnung des Systems gültigen Bedingungsgleichungen die Zeit nicht explicite enthalten.

Die Thatsache, dass Jacobi in seinen Vorlesungen die Dynamik eines Systems von Punkten als Hauptgegenstand ins Auge gefasst und sich wesentlich nur mit der Bearbeitung der analytischen Hülfsmittel zur Integration der dynamischen Gleichungen beschäftigt hat, erinnert an den Kreis von Problemen, in welchem Hamilton das Maassgebende bereits vorgethan hatte. Auch ist der Gang der Vorlesungen der, dass nach Entwerfung der fundamentalen Gleichungsformen und nach Vorführung der principiellen Hauptsätze vom Schwerpunkt, von den lebendigen Kräften, von den Flächen und von der geringsten Wirkung, zu den Verfahrungsarten Hamiltons übergegangen und dann das Princip des letzten Multiplicators entwickelt und zur Anwendung gebracht wird. In einer nachgelassenen, als Anhang zu den Vorlesungen veröffentlichten Abhandlung[2]) sieht Jacobi die Gesichtspunkte

[1]) Ibid. S. 46—49. [2]) Ibid. S. 303.

Hamiltons als die ersten epochemachenden Bereicherungen an, welche die allgemeinen Formen der analytischen Behandlung der Mechanik nach Lagrange erfahren hätten. Das eigenthümliche Streben Jacobis selbst richtete sich angeblich auf die wirkliche Ausführbarmachung der erforderlichen Integrationen, und aus seiner vorzugsweise an das äusserlich rechnerische Interesse gebundenen Verfahrungsart mag es sich auch wohl mit erklären, dass die fundamentalen Principien bei ihm wenig Verständniss fanden. Kennzeichnend für seine Unbekümmertheit in dieser Richtung ist eine Aeusserung in einem populären Vortrag[1]), in welcher er komischerweise Descartes für den Erfinder des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten erklärte. Ueberhaupt fiel seine Kritik und Auffassung fremder Dinge, an die sich doch hauptsächlich seine Kleinigkeiten knüpften, an sich gar schwach aus, wenn auch die Judenreclame zäh beflissen gewesen ist, Geringfügigkeiten zu Etwas aufzubauschen und unwahre Versionen über vorgebliche Leistungen, ja über grossgetaufte Leistungen in Umlauf zu setzen. So mäkelte er namentlich in schiefer, unzutreffender Weise an Lagrange herum, und sogar mit dem oben berührten Fall bezüglich der Gleichgewichtsfigur, den die Juden und Judengenossenschaft für ihren Matador besonders auszubeuten gar eifrig gewesen, hat es nicht ganz seine Richtigkeit. Die Version von einem Fehler Lagranges hiebei ist falsch; Letzterer ist ganz im sachlichen Sinne seiner bestimmten erdsphäroidischen Aufgabe verfahren, welche speciellere Bedingungen der Gestaltentstehung einschloss und die Dreiaxigkeit von vornherein ausschloss. Lagrange bei dieser Gelegenheit einen Vorwurf machen, wie Jacobi that, hiess Mangel an Verständniss bekunden und selber einen Fehler begehen. Noch oberflächlicher war es aber, Lagranges Grundgleichung der Mechanik zu einer blos symbolischen herabsetzen zu wollen. Doch genug hievon! Die eckige, keiner Tiefe fähige, sich immer an Fremdes anlehnende, nur eine gewisse buchstabenrechnerische Virtuosität vorstellende Art und Weise Jacobis erklärt sich aus seiner Raceneigenschaft, auf die wir auch bezüglich des Verhältnisses zu Abel in unserm mathematischen Grundwerk und überhaupt, unter Gesammtbeleuchtung der wissenschaftlichen Unfähigkeit des Hebräerstammes, in unserer Schrift über die Judenfrage hingewiesen haben. In der That verräth die

---

[1]) Ueber Descartes' Leben, Berlin 1846, S. 8.

Betheiligung an der Wissenschaft die geringern Raceneigenschaften und deren Schädlichkeiten für den Kenner noch greller, als es das gemeinste Eindrängen in das praktische Leben für die gewöhnliche Auffassung thut.

172. G. P. Lejeune Dirichlet (1805—59), der sich gegen Ende seines Lebens den allgemeineren mechanischen Problemen von principiellem Charakter entschiedener zuwendete und sich ausser mit einem Beweis der Stabilität des Weltsystems auch einer Sage nach mit einer neuen Methode zur universellen Lösung der mechanischen Aufgaben beschäftigt haben soll, worüber des Näheren unsere Nr. 188 zu vergleichen, — hat nur eine unvollendete Abhandlung[1]) hinterlassen, welche die Bewegungen eines flüssigen Ellipsoids betrifft. Sie ist das Beispiel einer Integration der hydrodynamischen Gleichungen für den Fall, dass die Flüssigkeit, deren Theile gegeneinander gravitiren, ursprünglich die Form eines Ellipsoids hat. Die Flüssigkeit bleibt bei der Bewegung ein Ellipsoid mit demselben Mittelpunkt, aber Lage und Grösse der Hauptaxen ändern sich. Im speciellen Fall eines Umdrehungsellipsoids oscillirt die Flüssigkeit zwischen den zwei Gestalten eines verlängerten und eines abgeplatteten Ellipsoids. Müssen wir nun auch hier von der besondern Aufgabe absehen, welche an die ersten, namentlich Clairautschen Schritte zur Behandlung des Problems der Erdgestalt erinnert, und welche für die Formationen der kosmischen Körper ganz im Allgemeinen grosse Bedeutung hat, — so haben wir doch auf die in der Einleitung des fraglichen Aufsatzes gemachte Bemerkung Dirichlets hinzuweisen, dass Lagrange seine allgemeinere Form der hydrodynamischen Gleichungen, welche auf der Verfolgung der Bewegung jedes für sich ins Auge gefassten Elements beruht, für die Anwendungen nicht hätte wieder mit der Eulerschen Form vertauschen sollen.

Unter den früheren Arbeiten Dirichlets haben besonders zwei Aufsätze ein principielles Interesse. Der eine „Ueber die Stabilität des Gleichgewichts“ [2]) giebt einen Beweis derselben aus dem unmittelbaren Begriff des Maximums und schlägt also einen Weg

---

[1]) Ueber ein Problem der Hydrodynamik, Abh. der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Bd. 8 (1858—59). Auch abgedruckt in Crelles Journal, Bd. 58 (1861).

[2]) In Crelles Journal, Bd. 32 (1846).

ein, auf welchem die gewöhnlichen analytischen Kriterien des Maximums, die man vermittelst der allgemeinen Reihenform der Function gewinnt, und die für weniger einfache Fälle praktisch unausführbaren Umständlichkeiten nicht in Frage kommen. Der andere Aufsatz[1]) behandelt die Bewegung einer festen Kugel in einer unendlichen, unzusammendrückbaren Flüssigkeit und nimmt, abgesehen von der geleisteten Integration der hydrodynamischen Gleichungen dieses Falles, die Aufmerksamkeit noch besonders durch ein komisch überraschendes Ergebniss, namentlich aber durch die Unvereinbarkeit in Anspruch, welche zwischen den herkömmlichen Vorstellungen vom Widerstande eines Mediums und dem mathematischen Resultat besteht.

Die besondern Voraussetzungen, unter denen Dirichlet das Problem behandelte, waren die, dass die Flüssigkeitstheilchen von einer beschleunigenden Kraft von constanter Richtung afficirt würden, und er ging zunächst von der Idee aus, dass die Kugel unbeweglich fest, die Flüssigkeit aber um dieselbe in fortschreitender Bewegung begriffen sei. Alsdann zeigte er, dass man die Kugel frei, d. h. das ganze System der Flüssigkeit und der Kugel als ein freies denken könne, ohne dass die Ruhe der Kugel in der bewegten Flüssigkeit für die vorausgesetzte Art der Bewegung aufgehoben werde. Der Uebergang, in welchem der Kugel anstatt der Flüssigkeit die Bewegung zugetheilt wird, ist leicht begreiflich. Um jedoch über die eigenthümliche Seite des Resultats, dass der verändernde Widerstand schliesslich gar nicht von der beharrenden Geschwindigkeit, also nur von der Beschleunigung abhängig und ohne die letztere gar nicht vorhanden sei, nicht den mindesten Zweifel zu lassen, mögen hier die eignen Formulirungen Dirichlets selbst sprechen. Er sagt am Schluss des fraglichen Aufsatzes: „Dieser Widerstand entspricht nicht der Vorstellung, welche man sich von der Wirkung eines flüssigen Mediums auf einen in ihm bewegten festen Körper zu machen pflegt, und nach welcher ein Widerstand auch dann schon vorhanden und zu überwinden ist, wenn die in einem Zeitmoment stattfindende Bewegung für den nächsten Zeittheil nicht alterirt werden soll, wogegen nach Obigem in unserm Fall die Bewegung des festen Körpers augenblicklich in eine gradlinige und gleichförmige übergeht, sobald die beschleunigende Kraft zu wirken aufhört. Der Widerstand hängt

[1]) Monatsbericht der Berliner Akademie für 1852.

hier gar nicht von der vorhandenen Bewegung, sondern lediglich von der im nächsten Zeittheile hervorzubringenden Aenderung der Bewegung ab . . .“ Nun, das ist nicht blos nach unserer Ueberzeugung, sondern nach den festesten Elementarsätzen der Mechanik ein handgreiflicher Widersinn. Die Trägheitsbewegung einer Kugel soll in einem materiellen Medium ohne Reactionserzeugung von Statten gehen! Angesichts einer solchen Absurdität müssen freilich die einfachsten Axiome der Mechanik abstract mathematischen Versteigungen den Platz räumen! Was aber Dirichlet noch sonst an besondern zur Mechanik gehörigen Untersuchungen ins Auge gefasst hat, und was sich vornehmlich an die Gaussschen Arbeiten über die im umgekehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernung wirkenden Kräfte anschloss, betraf die mathematischen Ausspinnungen der Potentialtheorie und ist für unsere Principiengeschichte ohne specifisches Interesse.

173. Es ist historisch für die Beschaffenheit der mechanischen Principien nicht unerheblich, dass sich die Versuche, die allerersten Grundlagen strenger zu gestalten oder vielmehr für die ersten Hauptsätze befriedigende Beweise zu liefern, in der neusten Zeit und zwar auch bei namhaften Analytikern wiederholen. So hat sich z. B. Cauchy[1]) um eine neue Ableitung des Parallelogramms der Kräfte bemüht und so die bis dahin unternommenen mannichfaltigen Wendungen dieser Art um eine neue Variante vermehrt. Wir haben in unserm Geschichtsbericht derartige besondere Bestrebungen, auch wenn sie grössern Mathematikern angehörten, nicht besonders zu berücksichtigen gehabt, weil im Wesentlichen schon von vornherein Angesichts der Wendungen Varignons und Newtons abzusehen war, dass sich auf dem gewöhnlichen Wege keine stichhaltige Ableitung werde geben lassen. Auch Lagrange war von dem nothwendigen Fehlschlagen derartiger Versuche überzeugt gewesen, und das neuere kritische Ergebniss wird, wie es auch gewonnen werde, immer zu der Anerkennung der Thatsache gelangen müssen, dass die Reduction einer Kraft auf eine andere Wirkungsrichtung das Einfachere ist, aber dafür auch die Rolle eines stillschweigenden Axioms und zwar seit Galilei bis auf die Gegenwart gespielt hat. Bei einem Entwicklungsstande der Mechanik, der es, wie das Beispiel des Professors

[1]) Exercices de mathématiques, Bd. I. Paris 1826, „Sur la résultante etc.“, S. 29 fg.

Dirichlet gezeigt hat, wirklich noch gestattet, nicht blos die von Newton her überlieferten Grundvorstellungen über den Widerstand der Medien, sondern die einschlägigen mechanischen Axiome selbst in Frage zu stellen, darf es nicht überraschen, dass auch die fundamentalsten Wahrheiten, die an der Spitze der Statik und Dynamik stehen, noch für eine gewisse formale Erledigung Raum lassen. Hiefür zeugt ausser der Beschäftigung mit dem Parallelogramm der Kräfte noch ein anderer Versuch Cauchys[1]), welcher sich auf das hydrostatische Princip der Gleichheit des Drucks in allen Richtungen bezieht.

Diese zwei Beispiele mögen für eine Mannichfaltigkeit von andern Bestrebungen genügen, die sich theils in berühmteren Gesammtdarstellungen der Mechanik, wie in derjenigen Poissons, theils in besondern Artikeln oder specielleren Schriften antreffen lassen.

Das im vierten Capitel noch besonders zu besprechende Verhältniss des Antheils der Mathematik an den Formulirungen der allgemeinsten Principien der Mechanik entscheidet indirect auch über die Tragweite der rein analytischen Bestandtheile der fraglichen oder ähnlichen Beweisversuche. Da indessen in dem jetzt behandelten Capitel diejenigen Arbeiten zur Sprache gekommen sind, welche denen angehörten, die in erster Linie Mathematiker und auch vorzugsweise Analytiker waren, so erscheint es als angemessen, auch die Berührungen der Mechanik mit den verschiedenen rein mathematischen Methoden der neusten Zeit nicht mit Stillschweigen zu übergehen. Die unlösbaren Beziehungen der Mechanik zur Analysis und Functionentheorie sind schon bei der Behandlung Lagranges in der ausgeprägtesten Weise sichtbar geworden, und was die eben behandelten Mathematiker betrifft, so bedarf es nur einer Erinnerung an die durchgegangenen Punkte, namentlich aber an Hamiltons Vorstellungsarten, um den Typus, der in diesem Gebiet unumgänglich ist, charakteristisch vor Augen zu haben. Dagegen könnte man fragen, ob nicht die moderne synthetische Geometrie, also das Bereich der Methoden Poncelets und Steiners, in weiterer Ausbildung eine Rückwirkung auf die Fassungsart der mechanischen Wahrheiten üben und dazu führen möchte, die Vorstellungsarten in irgend einer Richtung eigenthümlich zu entwickeln. Zunächst versteht es sich von selbst,

---

[1]) Ibid. Bd. II (1827). „De la pression dans les fluides“, S. 23 fg.

dass da, wo die geometrischen Gebilde zu ihrem Theil die Gestaltung der mechanischen Wirkung bestimmen, jede Behandlungsart der Gesetze dieser Gebilde auch für das Bedürfniss der Mechanik zum Ziele führen müsse. Die im engern Sinne synthetische Geometrie muss also je nach ihrer Tragweite in den einzelnen Richtungen des erforderlichen mathematischen Wissens auch für die mechanischen Aufgaben ihre Ergebnisse liefern. Ein Beispiel hiezu ist Steiners Behandlung der Anziehung einer ellipsoidischen Schicht auf einen äussern Punkt[1]). Vielleicht mag aber auch im Allgemeinen die Pflege jener, am besten als projectivisch zu bezeichnenden geometrischen Methode dahin führen, nicht nur die mechanische Auffassung in einigen Richtungen anschaulicher zu machen, sondern auch gewisse Fundamentalanalogien aller räumlich realen Vorgänge hervortreten zu lassen. Beispielsweise wird dieselbe wichtige Beziehung, welche den Uebergang von den Winkeln oder Drehungsgrössen zu den linearen Ausdehnungsgrössen vermittelt, auch in der Mechanik bezüglich der Rotation und Translation ein Gegenstück erhalten, und es wird sich die hier obwaltende Zweiseitigkeit der Verhältnisse durchgängig bewähren. Eine eigentlich synthetische Mechanik würde aber mehr im Geiste der Poinsotschen Verfahrungsarten, als in demjenigen der projectivisch geometrischen Methode zu halten sein, ja schliesslich überhaupt einer natürlicheren Gesammtmethode Platz machen müssen, welche sich über die Analysis wie über die gegen diese gerichteten Reactionen erhebt. Unter den Erscheinungen, die im gegenwärtigen Capitel anzuführen waren, ist die Hamiltonsche Wendung das Einzige, was man wenigstens als originales analytisches Versuchsspiel bezeichnen kann, während alles Uebrige entweder praktisch bedeutungslos oder aber gänzlich problematisch ausgefallen ist.

---

[1]) Crelles Journal, Bd. 12 (1834) „Démonstration géométrique d'un théorème relatif à l'attraction d'une couche ellipsoïdique sur un point extérieur", S. 141 fg.

Drittes Capitel.

Vorstellungen im Anschluss an das mechanische Aequivalent der Wärme.

174. Setzt man voraus, dass die Ursache der Wärmeerscheinungen als eine mechanische Kraft betrachtet wird, die sich an irgend einem uns nicht näher bekannten Medium und an den Molecülen der Stoffe statisch und dynamisch bethätigt, so ist mit dieser Annahme für die Tragweite der mechanischen Principien ein neues, sehr weites Gebiet eröffnet. Geht man aber noch einen Schritt weiter und gelangt zu der Vorstellung, dass die Ursachen aller Phänomene, welcher Art sie auch sein mögen, in ihrer letzten Grundlage mechanische Kräfte sind, so entzieht sich kein einziger Vorgang der Natur der allgemeinen Möglichkeit einer mechanischen Kennzeichnung. Die verschiedenen Naturkräfte mögen alsdann sein was sie wollen; sie kommen darin überein, zugleich Ausdruck mechanischer Actionen zu sein, die in ihrem Wirken enthalten sind. Wie die Verschiedenartigkeit der Stoffe nicht mit der Existenz der einen allgemeinen Materie unverträglich ist, und wie die mannichfaltigen Naturprocesse nicht die sich gleichbleibende Quantität dieser allgemeinen Materie abändern können; ebenso ist auch mit der grössten Mannichfaltigkeit der Kräfte die Voraussetzung vereinbar, dass in allen diesen verschiedenen Kräften eine allgemeine Kraft d. h. mechanische Kraft enthalten und mit jedweder Bethätigung der specifischen Kraft in irgend einem Maass gegeben sei. Die Idee, dass die mechanische Kraftgrösse, die auf diese Weise in allen Ursachen der Phänomene mitwirkt und das Fundament aller Naturthätigkeiten bildet, in analoger Weise wie die Materie etwas Unvermehrbares und Unverminderbares sein müsse, liegt nahe, sobald die Grundvorstellung, dass mechanische Kraft nicht aus Nichts entstehe, zu Hülfe genommen wird. Diese letztere Grundvorstellung ist aber wiederum selbst unumgänglich, sobald die mechanische Kraft als ein Letztes gesetzt wird, in welches sich alle Naturprocesse auflösen lassen.

Ist letztere Idee einmal ernstlich ins Auge gefasst, so ist die Mechanik mit ihren Principien die reale Grundwissenschaft. Das Gebiet der Mechanik reicht alsdann soweit wie die Phänomene selbst, und es giebt keinen Vorgang, bei welchem nicht gefragt

werden könnte, welches die mechanischen Voraussetzungen seiner Möglichkeit seien. Obwohl sich diese Frage zunächst nur in wenigen Fällen möge beantworten lassen, und obwohl sogar die Beantwortung noch keine vollständige Erklärung der jedesmal fraglichen Erscheinung zu sein braucht, so ist mit einer solchen Betrachtungsart doch immer eine Anknüpfung an die letzte wahrnehmbare Grundlage des thatsächlich Gegebenen verbunden. Man hat von einem Vorgang eine sehr unzureichende Vorstellung, wenn man nichts weiter von ihm weiss, als dass zu seiner Hervorbringung ein gewisses Quantum Materie gedient habe. Man wird schon etwas mehr wissen, wenn man die mechanische Kraftgrösse kennt, die zur Hervorbringung derjenigen Veränderungen erforderlich war, die jener Vorgang etwa vorstellte. Dennoch wird man aber hiemit noch nicht die Mannichfaltigkeit der Formen, sondern gleichsam nur das Material erkannt haben, aus welchem diese Formen gestaltet sind. Es folgt mithin, dass die colossale Erweiterung der mechanischen Auffassungsart, die mit jenem neuen Gesichtspunkt der Betrachtung der Kräfte aller Gattungen verbunden ist, nicht dahin missverstanden werden darf, dass alles bestimmtere Wissen von den Naturvorgängen durch blosse Mechanik gedeckt werden könne.

Unter Hinblick auf die eben angegebene Einschränkung kann man nun sagen, dass die Mechanik innerhalb des etwa seit 1842 zu rechnenden Zeitraums in eine Epoche eingetreten sei, in welcher die Principien derselben nach der Eroberung des gesammten Kreises der Naturphänomene streben und bezüglich ihrer Competenz keine einzige Ausschliessung zugestehen. Die Entdeckung des mechanischen Aequivalents der Wärme ist zwar der Markstein für die Gebiete der engeren und der weiteren Conceptionsart der Naturmechanik geworden; aber man würde irren, wenn man diese Entdeckung und die Verbreitung der allgemeinen mit ihr zusammenhängenden Vorstellungen über die Kräftewirkung nur als Grundlage für Späteres und nicht auch als Frucht einer früheren schon lange zum Abschluss hinstrebenden Entwicklung ansehen wollte. Die Auffindung eines mechanischen Kraftausdruckes zur Charakteristik der Wärmeaction und die Auffassung dieser letzteren Action als einer mechanischen Molecularbeziehung sind allerdings die epochemachenden Thatsachen gewesen; allein die entscheidende Wendung, in welcher die epochemachende Eigenschaft lag, war durch den allgemeinen Gang der Vorstellungen

vorbereitet gewesen. Hieraus erklärt es sich denn auch, dass sich nachträglich, als man die neue Einsicht in einer vollkommneren Gestalt vor sich hatte, ein geschichtliches Vorspiel derselben nachweisen liess, und dass sich die Aufmerksamkeit auch solchen älteren Ideen zuwendete, die zur Zeit ihrer ersten Veröffentlichung im Allgemeinen unbeachtet geblieben waren.

Um die natürliche Abfolge der wissenschaftlichen Ereignisse wiederzugeben, wird man jedoch nicht mit den eben angedeuteten, nur partiellen Annäherungen, sondern mit derjenigen Gestalt der Sache zu beginnen haben, die zuerst einen klaren, unzweideutigen und vollständigen Ausdruck der neuen Idee und Thatsache enthalten hat. Obwohl auch diese Gestalt der neuen Einsicht nicht sofort in das Bereich einer allgemeineren Aufmerksamkeit gelangte, so ist sie doch später als die erste entscheidende Grundlage anerkannt worden und hat überdies auch in der weiteren Entwicklung durch ihren Urheber zum Ausdruck derjenigen Conceptionen geführt, die für die Erörterung der allgemeinen mechanischen Principien die wichtigsten sind. Aus diesen zwei Gründen werden wir mit den Arbeiten J. R. Mayers von Heilbronn zu beginnen und an die älteren Ideenansätze sowie überhaupt an die immer allgemeinere Gestaltung der Vorconceptionen über die Erhaltung der Kraft erst später zu erinnern haben.

175. Julius Robert Mayer (1814—78) veröffentlichte im Maiheft der Annalen der Chemie und Pharmacie von 1842 [1]) einen Aufsatz unter der Ueberschrift „Bemerkungen über die Kräfte der unbelebten Natur“ [2]), in welchem die Zahl des mechanischen Aequivalents der Wärme gegeben und so kurz abgeleitet ist, dass wir die betreffende Stelle hier wörtlich anführen können. Es heisst dort nach einer Erörterung der Folgen des Grundsatzes, dass die Wirkung der Ursache gleich sein müsse in Bezug auf den Zusammenhang und das Grössenverhältniss von Wärme und mechanischer Kraft, in den bestimmtesten Worten und Begriffen: „Unter Anwendung der aufgestellten Sätze auf die Wärme — und Volumens-

---

[1]) Herausg. von Wöhler und Liebig, Bd. 42, S. 233 fg.

[2]) Auch abgedruckt in der Sammlung der Mayerschen Abhandlungen: „Die Mechanik der Wärme“, Stuttgart 1867, S. 3—12. Die 2. Aufl. (1874) legt die etwas veränderte Aequivalentzahl, nämlich 425 statt 365, den Rechnungen zu Grunde und unterscheidet sich übrigens nur noch durch die Hinzufügung der 1871 erst abgesondert erschienenen „Naturwissenschaftlichen Vorträge“.



verhältnisse der Gasarten findet man die Senkung einer ein Gas comprimirenden Quecksilbersäule gleich der durch die Compression entbundenen Wärmemenge und es ergiebt sich hieraus, — den Verhältnissexponenten der Capacitäten der atmosphärischen Luft unter gleichem Drucke und unter gleichem Volumen = 1,421 gesetzt — dass dem Herabsinken eines Gewichtstheiles von einer Höhe von circa 365^m die Erwärmung eines gleichen Gewichtstheiles Wasser von 0^0 auf 1^0 entspreche."

Der kleine Aufsatz, gegen dessen Schluss die eben angeführte Constatirung des mechanischen Kraftwerths der Wärme vollzogen und auch die Methode der Gewinnung der betreffenden Zahl deutlich genug bezeichnet war, hatte als seinen Gegenstand die Bestimmung eines deutlichen Kraftbegriffs hingestellt. In der Verfolgung der Aufgabe, die Vorstellung von der Kraft ebenso unzweideutig zu gestalten, wie diejenige von der Materie, war der Verfasser zu einigen formalen Aenderungen der gewöhnlichen Anschauungsweise gelangt, die, ganz abgesehen von dem mechanischen Aequivalent der Wärme, für die Fassung der allgemeinsten Principien der Mechanik von Interesse sind. Da sie aber ausserdem auch die Vordersätze bildeten, aus welchen die Nothwendigkeit mechanischer Aequivalenzen aller Erscheinungen gefolgert wurde, so haben wir hier einen doppelten Grund, ihnen mit besonderer Sorgfalt zu folgen.

Nach Mayer ist Kraft ein Object, welches in den verschiedenen Erscheinungsformen, also trotz aller Qualitätsänderungen, unzerstörlich dasselbe bleibt. An die Spitze wird der Grundsatz gestellt: causa aequat effectum. Diese Gleichung zwischen Ursache und Wirkung wird sowohl begrifflich als quantitativ verstanden. Die Ursache erhält sich in der Wirkung und bleibt in der letzteren auch eine Ursache ihrer Art. Wenn die Kraft eine Wirkung hat, so ist die Wirkung wiederum eine Kraft, und die Eigenschaftsveränderung, die in der Unterschiedenheit der Erscheinungsform besteht, berührt die Hauptsache, d. h. das identisch zu Grunde liegende Object und dessen Quantum gar nicht. Näher auf die bekannten Formen der mechanischen Kraft angewendet, nimmt die Gleichung zwischen Ursache und Wirkung oder überhaupt zwischen den mehrfachen Gliedern einer Causalreihe von Erscheinungen folgende Gestalt an. Die Hebung einer Last ist die Bethätigung einer Kraft; befindet sich die Last in der ihr auf diese Weise zugetheilten Höhe, so ist dieses Verhältniss derselben nur eine andere Form der Kraft.

Die Last kann jetzt wieder fallen, und da sie sich in Beziehung auf die Ursache der abgesehen von einem Gegengewicht nothwendigen Senkung in einer bestimmten Verfassung befindet, so wird diese Verfassung oder dieses Verhältniss selbst die Kraft repräsentiren, deren Form durch die Erhebung erzeugt worden ist, und die nun wieder in eine Senkungsbewegung verwandelt werden kann. Mayer nennt die bei einem gegebenen Abstand gravitirender Gegenstände verfügbare Kraft die Fallkraft und will mit diesem Ausdruck den Vorstellungen entgegentreten, die sich an das Wort Schwere als an eine unter allen Umständen anhaftende Eigenschaft knüpfen. Sein Grundgedanke ist hiebei, dass ein räumlicher Abstand oder, wie er auch sagt, eine „räumliche Differenz“ die unerlässliche Vorbedingung der Existenz der Kraft in dieser Form oder, specieller, der Fallkraft sei.

Nach der Mayerschen Vorstellungsart sind nun Fallkraft und Bewegung zweierlei Erscheinungsformen von einerlei Gegenstand, nämlich von der mechanischen Kraft überhaupt. Durch das Heben der Last wird Kraft in die Form von Fallkraft übergeführt, und diese letztere kann sich wiederum in Bewegung umwandeln. Fragt man nun noch nach einem Dritten, welches da, wo Bewegung als solche verschwindet, die Form der Kraftexistenz bilden könnte, so ergiebt sich als Antwort aus den gewöhnlichsten Beobachtungen, namentlich aus dem Erscheinen der Reibungswärme, dass diese dritte Form die Wärme sein könne. Mayer protestirt, was nicht ohne Interesse ist, ausdrücklich dagegen, dass er, abgesehen von der strahlenden Wärme, die Wärme überhaupt als eine Bewegung angesehen wissen wolle. Seine Anschauungsweise bringe es mit sich, das Gegentheil vorauszusetzen, indem die Form der Bewegung als solche ja erst verschwinden müsse, damit Wärme hervortrete. Eine Verwahrung dieser Art findet sich noch in den späteren Schriften[1]). Die Vorstellung, dass mit der Auflösung aller Wärmevorgänge und Wärmezustände in Molecülbewegungen der Schlüssel zum Verständniss der Wärmemechanik gegeben sei, ist gegenwärtig so im Umlauf, dass es ihr gegenüber historisch erheblich ist, die Abweichung der Mayerschen Anschauungsweise nicht zu übersehen. Man könnte sich auch sonst zu der einseitigen Annahme versucht finden, dass die Aequivalenztheorie und überhaupt

---

[1]) Bemerkungen über das mechanische Aequivalent der Wärme, 1851, abgedruckt in der Sammlung: Die Mechanik der Wärme (1867), S. 279.

die ganze mechanische Wärmetheorie ihren Ursprung in dem Fortschritt habe, der durch die Vibrationstheorie des Lichts eingeleitet worden.

176. Der Entdecker des mechanischen Aequivalents der Wärme hat, wie wir zum Theil schon dargelegt haben, von vornherein den Kraftbegriff und die zugehörigen mechanischen Grundvorstellungen einer Kritik unterworfen und hat später die älteren Vorstellungen ausführlicher begründet[1]). In dieser späteren Gestalt seiner Ausführungen will er zu dem Newtonschen Begriff der (beschleunigenden) Kraft, welcher auch derjenige ist, der im allgemeinen Sprachgebrauch der wissenschaftlichen Mechanik heute schlechtweg Kraft heisst, und zu dem Begriff der lebendigen Kraft eine dritte Formulirung angeben, die den Vortheil habe, allgemein zu sein und sogar eine ganz strenge Darstellung der Elemente der Mechanik und zugehörigen Physik ohne die Anwendung der Differential- und Integralbegriffe zu gestatten. Diese dritte Fassungsart ist, genauer untersucht, ein Analogon und eine Verallgemeinerung des zunächst in der angewandten Mechanik üblich gewordenen Begriffs der mechanischen Arbeit, dessen Spuren aber auch schon früher in der Messung der Kraft nach Fall oder Erhebungshöhe vorhanden waren und sich, wenn man will, bis auf Cartesius' Schätzungsideen zurückverfolgen lassen. Bei dem gewöhnlichen Ausdruck der mechanischen Arbeit multiplicirt man das Gewicht mit dem durchlaufenen Raum; oder es besteht im Allgemeinen die Arbeit in dem Durchlaufen eines Raumes unter der Einwirkung einer bestimmten Kraft auf eine bestimmte Masse. Ist der Widerstand eine constante Kraft, die sich nach dem gewöhnlichen Schema der Kraftwirkung entwickelt und ihre Wirkung gleichsam anhäuft, so ist der Arbeitsbegriff noch ganz einfach, gleichviel um welche Kraft es sich handle. Sobald aber die Kraft nicht constant ist und sich etwa nach Maassgabe einer Function der Entfernung, also des unter ihrem Einfluss durchlaufenen Raumes selbst stetig ändert, muss der Arbeitsbegriff diesem neuen Verhältniss angepasst und mithin verallgemeinert werden.

Es ist hier nun wiederum die schon in der vorigen Nummer gekennzeichnete Fallkraft, welche von Mayer als Function des räumlichen Abstandes gedacht und sogar direct als ein verfügbarer, zu verbrauchender Gegenstand vorgestellt wird. Betrachtet

---

[1]) Ibid. S. 258—278.

man für zwei gravitirende Massen zwei verschiedene Entfernungspositionen, so ist der Uebergang aus der einen Position in die andere nach Mayer ein Formenwechsel der Kraft. Wird die grössere Entfernung in die kleinere verwandelt, so wird die Kraft in der Gestalt der ursprünglichen Fallkraft zu dem Theil verbraucht, welcher dem Raum entspricht, der zur Entfernungsverminderung durchlaufen ist. Dieser Verbrauch des räumlichen Abstandes ist eine interessante, dem Autor so eigenthümliche Vorstellungsart, dass man die in derselben liegende Abweichung von der traditionellen Anschauungsweise nicht sorgfältig genug markiren kann. Sie scheint zunächst praktisch nichts zu bedeuten und an der Hauptsache thatsächlich nichts zu ändern; und dennoch ist sie die formal entscheidende Wendung gewesen, durch welche eine neue Betrachtungsart gestützt worden. Die Fallkraft ist nämlich, wenn man sie im Hinblick auf statische Begriffe betrachtet, nicht die momentane Gravitation oder, mit andern Worten, das für den augenblicklichen Ort nur in dieser einen Position geltende Gravitationsgewicht der beiden Körper gegeneinander, sondern umfasst den Inbegriff aller Sollicitationen, die von einer Position zur andern, also während des Durchlaufens einer bestimmten Wegstrecke zur Entwicklung gelangen. Nur in Beziehung auf eine solche verfügbare Wegstrecke wird von einer Fallkraft geredet, und diese Fallkraft wird streng von dem Resultat ihrer Entwicklung unterschieden. Dieses Resultat ist nach den gewöhnlichen Begriffen der Mechanik eine angehäufte Geschwindigkeit, d. h. die lebendige Kraft. Wenn Mayer also von einer Gleichung zwischen Fallkraft und Bewegung redet, so meint er nur ein verallgemeinertes Analogon von dem, was man sonst die Gleichung der Arbeit nennt. Diese letztere Gleichung hat zur einen Seite die Arbeit, d. h. das Product aus Gewicht und Erhebungshöhe, und zur andern Seite die halbe lebendige Kraft, d. h. das halbe Product aus der Masse und dem Geschwindigkeitsquadrat. Verallgemeinert man den Begriff der Arbeit in dieser Gleichung, indem man ihn den sich mit den Entfernungen nach irgend einer Regel ändernden Kräften anbequemt, so erhält man auf der einen Seite eine Function der Massen und der Räume als Ausdruck der Kraft, und die Gleichsetzung dieser Function mit der aufgehäuften lebendigen Kraft drückt die Beziehung der beiden Kraftformen aus. Eigenthümlich ist hienach in dem Begriff der Fallkraft die unmittelbare Anknüpfung an eine erste und an

eine zweite Distanz, ohne Einschaltung einer Rücksicht auf die für einen gegebenen Punkt vorhandene Momentangravitation, die sonst recht eigentlich die Kraft heisst und für den Augenblick als constant betrachtet wird, während sie in ganz strenger Auffassung nur zeitlich punktuell, also in völliger Gleichheit auch nicht einen noch so kleinen Augenblick existirt.

Das Bestreben, den Kraftbegriff in endlicher Form und actuell, nicht aber als blossen Differentialquotienten und hypothetisch für die Constanz während der Zeiteinheit anzugeben, hat offenbar jene Wendung erzeugt, welche die vorhandene Distanz selbst als die Existenzform der Kraft ansieht und den Verbrauch dieser Distanz als eine Formverwandlung der Kraft kennzeichnet. Die Zeit tritt bei dieser Art der gleichsam räumlich definirten Gesammtkraft ganz und gar zurück und erscheint in der Gleichung nur auf der andern Seite in der Geschwindigkeit. Die verbrauchte Fallkraft oder, der Mayerschen Vorstellungsart und dem zugehörigen Sprachgebrauch gemäss, der verbrauchte Abstand der Massen kann durch die Aufwendung des Resultats in entgegengesetzter Richtung wiedererzeugt und so die ursprüngliche Existenzform der Kraft wiederhergestellt werden. Neu ist an diesen Gedankenformen offenbar nur die Hervorhebung der Verwandlungsvorstellung und der Begriff der verschiedenen Erscheinungsformen eines und desselben Etwas, dessen Quantum und allgemeiner mechanischer Charakter sich gleich bleibt, während die bestimmteren Verhältnisse wechseln. Dieses Etwas ist das, was Mayer kurzweg Kraft genannt zu sehen wünscht, und was man zur Unterscheidung von den andern beiden Kraftbegriffen und zur Verständigung im grade fraglichen Zusammenhang für einen Augenblick durch den Namen Gesammtkraft auszeichnen könnte. In der That ist diese Integralkraft, wenn man deren Begriff nach den üblichen und berechtigten Vorstellungsarten bemisst, nichts als ein Integral zu der Reihe der Momentanintensitäten, welche die Gravitation für alle Punkte einer von zwei Massen gegeneinander zurückgelegten Distanz nach dem Newtonschen Gesetz haben muss. Einen besondern Werth legt Mayer auf die Hervorhebung der Endlichkeit, die selbst für unendliche Räume bei dieser Gesammtkraft statthat, indem für das aus noch so weiter Ferne erfolgende Fallen auf die Oberfläche eines Weltkörpers eine nicht überschreitbare Grenze der letzten Endgeschwindigkeit existirt. Die Auszeichnung dieses Gedankens

ist allerdings für die Principien und namentlich für die Darstellung der Elemente der Physik erforderlich. Für die neue Anschauungsweise ist aber die Vorstellung einer Naturkraft als eines bestimmten Quantums eine Fundamentalidee. Den Gegensatz hiezu bildet die Fiction von Ursachen einer unerschöpflichen Hervorbringung endlicher Kraftgrössen, während in Wahrheit die Kraft selbst, ähnlich wie die Materie, ein endliches Quantum ist, welches nur seine Erscheinungsform wechseln und von der einen Art und Stelle der Bethätigung in eine andere Wirkungsweise und an einen andern Ort übergeführt werden kann. Nicht der Verwandlungsvorstellung überhaupt, wohl aber ihrer besondern Gestaltung wird nachher ein kritischer Gesichtspunkt aus der alten wohlbegründeten und klaren Mechanik entgegenzustellen sein. Hier sei vorläufig darauf aufmerksam gemacht, dass die Fallkraft, wenn ohne Dunkelheit gedacht, nichts weiter als den Gedanken einer Fallgelegenheit einschliesst. Nun darf aber diese Fallgelegenheit offenbar nicht als eine mechanische Affection des Körpers angesehen werden, die ihm etwa ähnlich anhaftete wie eine Geschwindigkeit. Dies haben aber diejenigen gethan, welche, wie zu allererst die Engländer, mit dem Aequivalent auch die Fallkraft von Mayer entnommen und dessen Begriff unter dem Namen der potentiellen Energie als angeblich eigne Conception in Umlauf gesetzt haben. Von dem Gerathen auf diesen Abweg jedoch Mehr erst nach der Kennzeichnung der allgemeinen positiven Folgen des Mayerschen Ausgangspunktes!

177. Soweit die vorher charakterisirten Mayerschen Vorstellungen im Gebiet allgemeiner Gedankenformen verbleiben und soweit sie im Besondern die Existenz und die in einer bestimmten Zahl angegebene Grösse eines mechanischen Kraftwerths der Wärme betreffen, sind sie mehr und mehr in die allgemeine Denkweise übergegangen. Schlagwörter, wie Einheit der Naturkräfte, Correlation der Naturkräfte, Erhaltung der Kraft, Unzerstörlichkeit der Kraft u. dgl. sind nur verschiedene Andeutungen jenes Gedankens, der schon 1842 in dem Mayerschen Aufsatz zugleich präcis und universell entwickelt worden war. Die Wärme hatte nur einen besondern Fall der bereits möglichen Anwendung für das Gesetz eines bestimmten Kraftwerths aller Erscheinungsformen geliefert; aber der Autor hatte, wie es sein speculativer Ausgangspunkt mit sich brachte, von vornherein den ganzen Kreis der Naturkräfte ins Auge gefasst. Die Aequivalenzzahl war aber

die eigentliche Entdeckung gewesen, und ohne sie hätte man noch Jahrhunderte über Einheit oder Erhaltung der Kraft reflectiren können, ohne irgend Jemand endgültig zu überzeugen. Wenn sich nun aber lange nach der Mayerschen Entdeckung nachträglich Erörterungen allgemeiner und schweifender Art oft genug als die Hauptsache haben ausgeben können, so trägt hieran der Mangel an Sachverständniss bei dem Publicum die Schuld. Vollends komisch hat es sich aber ausgenommen, dass die blosse und noch dazu nicht einmal originale, sondern triviale und fehlerhaft ausgefallene Betheiligung an derartigen vagen Discussionen[1]) mit einer

[1]) Auf eine solche Betheiligung lief beispielsweise Herrn Helmholtz' Abhandlung „Ueber die Erhaltung der Kraft“ (Berlin 1847) hinaus, in welcher die Aequivalentzahlen Joules berührt wurden und sich trotz der Erörterung mehrerer wenig erheblicher Arbeiten doch R. Mayer nicht erwähnt fand. Wenn daher irgend etwas darin auffallen kann, so sind es die neuen Worteinkleidungen Jahrhunderte lang bekannter Dinge, wie namentlich für die Gleichung der lebendigen Kräfte, bei deren Wortumschreibung an Stelle der bewegenden Kraft Newtons der Ausdruck Spannkraft beliebt und überdies die ihm entsprechende Sache in infinitesimal fehlerhafter Weise aufgefasst wurde. — Was die Nichterwähnung Mayers seitens der Professoren betrifft, so lassen sich noch 10 und 15 Jahre später ergötzliche Dinge ähnlicher Art constatiren. Der Berliner Professor der Physik Poggendorf schreibt in seinem biogr.-lit. Handwörterb. z. Geschichte d. exacten Wissenschaften, 2 Bde. Leipzig 1863, in dem ganz dürftigen Artikel „Mayer“ exact: „Soll vor 1858 im Irrenhause gestorben sein, Augsb. Allgem. Zeitung“ und muss dann am Schluss des Bandes corrigiren: „Ist nicht (wie die Allgem. Ztg. angab) 1858 im Irrenhause gestorben, sondern (1862) noch am Leben.“ Natürlich war für den Professor die Professorenzeitung eine autoritäre Quelle. Die Augsb. Allgem. Zeitung hatte sich als Professorenorgan auch schon circa ein Jahrzehnt vor ihrer Verrückt- und Todsagung Mayers, nämlich in ihrer Beilage v. 21. Mai 1849, mit einer Warnung des grössern Publicums vor der „vermeintlichen Entdeckung des Hrn. Med. Dr. Mayer“ vernehmen lassen und ihn dabei als fachunkundigen Dilettanten hingestellt, mit dessen Behauptungen sich einzulassen für keinen Mann von Fach noch weiter erforderlich sei, da ja seine „Deductionen schon hinlänglich in ihrer Unhaltbarkeit in wissenschaftlichen Organen beleuchtet worden“. In der That ist der Aerger und Neid des Professorenthums Angesichts eines sogenannten Dilettanten, der im 19. Jahrhundert die Hauptthatsache der Physik an das Licht gefördert hat, für den, welcher die Eigenheiten der Species genauer kennt, nichts Wunderbares, sondern etwas Selbstverständliches. Späterhin hat sich die Taktik der geistigen und leiblichen Todsagung Mayers in die der möglichsten Umgehung und einer durchschnittlich unzulänglichen Erwähnungs- und Berücksichtigungsart verwandelt, da dem nicht blos aus Universitätsprofessoren bestehenden inzwischen aufmerksamer gewordenen Publicum gegenüber sich die ältere Verfahrungsart nicht mehr

Auffindung des Gedankens und mit der Entdeckung selbst verwechselt werden konnte.

Uebrigens wird man stets anerkennen müssen, dass Mayer nicht etwa nur durch die Thatsache des Aequivalents, sondern auch grade durch seine originale Auffassungsart der Naturkräfte eine Umwälzung der Denkweise eingeleitet hat, deren Tragweite bis jetzt nur zu einem geringen Theil durchmessen ist. Der Heilbronner Arzt hat in seinen wenigen und kurzen Veröffentlichungen, auch abgesehen von seiner eigentlichen Entdeckung, soviel für eine einfache und klare, die strenge Wissenschaftlichkeit mit edler

---

anbringen liess. Schliesslich konnte aber, namentlich seit den Wirkungen der Darstellung Mayers in der ersten Auflage dieser Schrift (1873), jegliche Art von Taktik zur Verkleinerung seiner Verdienste nicht mehr anschlagen.

Auch das 1877 dazwischengetretene Verfahren der Berliner Universität mit der Profossmethode gegen die zweite Auflage dieser Schrift und namentlich gegen den auf Herrn Helmholtz bezüglichen Satz der vorliegenden Anmerkung, in welchem, wie schon in der ersten Auflage, das Fehlen des Mayerschen Namens in der Helmholtzschen Abhandlung einfach constatirt wurde, konnte ungeachtet persönlicher Vertreibung des Verfassers von der Universität nichts ergeben, als zu einer immer markirteren und gerechteren Würdigung der Sache Mayers im Publicum zu führen. Der Verfasser hat an die einmal übernommene und überkommene Aufgabe einen grossen Theil seiner Kräfte gewendet und hat mündlich in Vorträgen sowie in besondern Schriften alle Seiten der Angelegenheit, und zwar vom Standpunkt eines ganz allgemeinen dauernden Interesse hervorgekehrt. Das erste Zeugniss hiefür nach der Vertreibung wurde das vierte Capitel seiner Neuen Grundgesetze zur Physik und Chemie (1878), in welchem sich auch ein für die Lebensverhältnisse nicht unwichtiger Mayerscher Brief abgedruckt findet. Das allgemeine menschheitsgeschichtliche Interesse erhielt aber seinen umfassenden Ausdruck in der Schrift „Robert Mayer, der Galilei des 19. Jahrhunderts. Eine Einführung in seine Leistungen und Schicksale (1880)“. Der leitende Grundgedanke derselben ist der Gegensatz zwischen Mayer und dem Coteriegelehrtenthum, — ein Gegensatz, der in einer verallgemeinerten Weise überhaupt zwischen freien Forschern und dem corrupten Gelehrtenthum besteht, sei dieses nun von Zunft- oder Staatswegen oder auch sonst von Gesellschaftswegen mit falscher Autorität, falschen Aufgaben und überhaupt verderbten Ueberlieferungen oder Interessen behaftet. Religion und Kirche sind zwar auch intime Feinde von Wahrheit und freier Wissenschaft gewesen und geblieben, sind es aber heute trotzdem nicht in gleich hohem und gleich gefährlichem Grade, wie das corrupte Gelehrtenthum selber. Der so veränderte Gegensatz erklärt denn auch das Beiwort vom Galilei des 19. Jahrhunderts, welches aus dem Gesichtspunkt eines Gegensatzes gegen eigentliche Pfaffen bei Mayer nicht passen würde, aber vollkommen zutrifft, wenn an Stelle des Pfaffenthums das herrschende Gelehrtenthum als der eigentliche Hemmschuh und als die reactionäre Macht in Frage kommt.

Popularität verbindende Naturauffassung geleistet, dass die anregende Kraft seiner genialen Conceptions- und Darstellungsart sogar durch die Beimischung einer theistischen Metaphysik und durch das schliessliche markirtere Hervortreten[1]) von Zügen religiöser Sentimentalität nicht ernsthaft beeinträchtigt werden kann. Was aber die innere Beschaffenheit seiner leitenden Begriffe anbetrifft, so kann auch die am Schluss der vorigen Nummer angedeutete Ausstellung den Hauptwerth und Kern der Sache nicht aufheben. Dieser bestand in der Schlagung einer Brücke zwischen verschiedenen Bethätigungsarten desselben mechanischen Agens. Wenn einer der vermittelnden Begriffe dabei unrichtig ausfiel und den Charakter einer Fiction annahm, so wurzelte dieser Irrthum in dem Umstande, dass eine physische Theorie der Schwere nicht zur Verfügung stand. Trotzdem sollte das Resultat der Erhebung einer Last als abgesondertes Facit und zwar selber als Kraft vorgestellt werden. Dieser Begriff musste nun eine Anweisung auf etwas Dunkles werden, und einer Art Mysticismus der Kraftformen Vorschub leisten. Zu Massengeschwindigkeit und Arbeit sollte, um die Brücke zu schlagen und die Stetigkeit der Vorgänge durch Einschaltung herzustellen, noch ein Drittes gedacht werden. Dieses Dritte ist aber nichts als die abstracte Fallgelegenheit und daher als besondere Kraftform nicht vorhanden. Die Mechanik kann, wenn sie kritisch bleiben will, ausser der Massengeschwindigkeit und der Arbeit keine weitern einfachen Formen und Functionen der Kraft anerkennen. Der Mayersche Abweg ins Dunkle wurde komischerweise die Parole der folgenden Zeit und ist es nun bald ein halbes Jahrhundert geblieben. Mit dem Richtigen hat man dem Heilbronner Forscher auch das Falsche entwendet und als eigne Münze in Curs gebracht. Die hohle Fiction der potentiellen Energie, die immer mehr Mode geworden, zeugt dafür. Eine schärfere Kritik wird diese Erdichtungen beseitigen, aber die allgemeinere Mayersche Grundvorstellung vom Uebergang derselben mechanischen Grösse in andere Bethätigungsformen wird bleiben.

178. Wie die Einerleiheit der Erdschwere mit der Kraft, welche die Himmelskörper an dem Fortgehen auf der Tangente hindert, ideell und thatsächlich durch die blosse Untersuchung des Verhaltens des Mondes festgestellt war, und wie alles Uebrige

[1] In der Schrift: Naturwissenschaftliche Vorträge, Stuttgart 1871.

nur die empirische Ausführung und Erprobung eines im Wesentlichen gesicherten Gedankens sein konnte, so ist auch die weitere experimentelle Nachweisung der Aequivalenzen von Wärme und mechanischer Arbeit an verschiedenen Fällen nur eine Bestätigung der bereits durch Mayer verzeichneten Theorie und Entdeckung gewesen. Seit 1843 hat James Prescott Joule eine Gruppe von Experimenten veröffentlicht, welche sämmtlich das mechanische Aequivalent in ziemlich übereinstimmenden Zahlen lieferten und auch nicht erheblich von dem Mayerschen Resultat und in ihrer Interpretation von der zugehörigen Verwandlungsvorstellung abwichen. Der Unterschied bestand nur darin, dass Joule sich vorherrschend um die experimentellen Feststellungen bemühte und, abgesehen von der allgemeinen Idee der Verwandlung, sich nicht weiter bestrebte, ausser seinen Thatsachen auch einen universellen Gedankenausdruck und eine weittragende Theorie darzubieten. Die Experimente des englischen Forschers wurden zunächst allgemeiner bekannt als die Theorie und Entdeckung seines deutschen Vorgängers, woraus es sich erklärt, dass Mayer 1851 in einer besondern Schrift (Bemerkungen über das mechanische Aequivalent der Wärme) die Priorität seiner Entdeckung und Veröffentlichung reclamiren musste[1]). Obwohl uns für die mechanischen Principienfragen und Vorstellungsarten das Detail der Experimente hier nicht besonders angeht, so sei doch bemerkt, dass Joule das von Mayer Geleistete nach einer Reihe von Jahren noch immer geflissentlich theils verschwiegen, theils entstellt hat. Aus den Mitteln, mit denen Joule nachträglich sich die Entdeckung zuzuwenden und sie Mayer sogar zu bestreiten versucht hat, kann man auf die Art der Mittel schliessen, durch welche er zu ihr gelangt sein muss. In der Schrift über Robert Mayer, theilweise auch schon in den Neuen Grundgesetzen, erste Folge, habe ich die besondern Umstände beleuchtet, welche den Schluss unausweichlich machen, dass Herr Joule sich die Entdeckung Mayers aus dessen Aufsatz von 1842 angeeignet hat, und dass ihm selbstständig nur jene gröbern Experimente angehören, durch welche

---

[1]) Vgl. Mayer, Die Mechanik der Wärme (1867), S. 290: „Der neue Gegenstand fing bald an, die Aufmerksamkeit der Gelehrten zu erregen. Da aber derselbe im In- und Auslande als eine ausschliesslich fremde Entdeckung abgehandelt wurde, so versetzte mich dies in die Nothwendigkeit, meine auf Priorität sich gründenden Ansprüche geltend zu machen.“



die Uebereinstimmung von mechanischer Wirkungsgrösse und entsprechender Wärmemenge handgreiflich dargethan wird.

Die erste Veröffentlichung Joules, welche das mechanische Aequivalent angiebt, behandelt es im Anschluss an Untersuchungen über elektromagnetische Wärmewirkungen[1]). Gegen Ende des zweiten Theils der betreffenden Abhandlung[2]) wird das Gesetz präcis formulirt und auch der Ausdruck „Verwandelbarkeit von Wärme und mechanischer Kraft ineinander“ (convertibility of heat and mechanical power into one another) gebraucht. Uebrigens bleibt auch sonst über die Vorstellungsart kein Zweifel; nur fehlt eine ideelle Ausführung und Theorie, wie sie von Mayer in Beziehung auf die Unzerstörlichkeit der Kraft und auf den Gegensatz der Erscheinungsformen zu dem in dieselben eingehenden Kraftmaterial gegeben worden war. Viel bezeichnender ist in dieser Beziehung eine Abhandlung von 1845 schon in der Ueberschrift[3]), indem der Ausdruck „gewöhnliche Formen der mechanischen Kraft“ schon andeutet, dass die Wärme ebenfalls als eine Form der mechanischen Kraft angesehen werden solle. Die Reibung der Flüssigkeiten als Wärmequelle hatte für die neuen Experimente eine besondere Bedeutung, und die fraglichen Versuche ergaben auch eine specielle Abhandlung[4]). In einer Arbeit von 1850 hat Joule im Eingange[5]) eine kleine Skizze der Thatsachen gegeben, welche seiner Ansicht nach die Grundlage für die historische Möglichkeit und Entwicklung der Aequivalenzfeststellung gebildet hätten. Billigerweise wird an seiner Ansicht nicht bestritten werden können, dass die Rumfordschen Versuche von 1798[6]) eine Art Anlauf zur bessern Auffassung repräsentirt haben. Wenn

---

[1]) Philosophical Magazine, vol. XXIII (1843): On the calorific effects of magneto-electricity, and on the mechanical value of heat (Letzteres der zweite Theil der Abhandlung). Die verschiedenen Arbeiten Joules sind auch in Uebersetzung u. d. T. „Das mechanische Wärmeäquivalent“, Braunschweig 1872, erschienen.

[2]) Philosophical Magazine ibid. S. 441.

[3]) Ibid. vol. XXVII (1845): On the existence of an equivalent relation between heat and the ordinary forms of mechanical power.

[4]) Ibid. vol. XXXI (1847): On the mechanical equivalent of heat, as determined by the heat evolved by the friction of fluids.

[5]) Philosophical Transactions 1850: On the mechanical equivalent of heat, S. 61 fg.

[6]) Philosophical Transactions, für 1798, S. 80—102: An inquiry concerning the source of the heat which is excited by friction.

Rumford durch die von seinem Metallbohrer erzeugte metallische Reibung das umgebende Wasser in einigen Stunden zum Sieden brachte und aus diesem Experiment die Vorstellung ableitete, dass er sich die Mittheilung der Wärme nicht anders als durch Bewegungsmittheilung denken könnte, so war dies ein früher und erheblicher Schritt zur Anfechtung der herrschenden Voraussetzung eines Wärmestoffs, aber ungeachtet aller Rechnungsansätze nicht im Entferntesten auch nur irgend eine Streifung der Idee eines mechanischen Aequivalents, d. h. eines für die Einheit der Wärme vorauszusetzenden Kraftquantums. In dem weiteren Verlauf der Rechenschaft Joules, in welcher die Angaben und Experimente des Autors am Schluss in den Vordergrund treten, ist der Umstand bemerkenswerth, dass auf Faradays elektrochemische Anschauungen von 1834 hingewiesen und die Entwicklung so dargestellt wird, als wenn die chemische Affinität den Ausgangspunkt für den Gedanken der Wärme- und Kraftäquivalenzen gebildet hätte. Die erste Abhandlung des deutschen Entdeckers wird zwar angeführt, aber nur im Allgemeinen als in der Richtung der Rumfordschen Ideen liegend und übrigens im Hinblick auf einen untergeordneten Nebenumstand, nämlich wegen einer Notiz über Wärmeerzeugung durch Reibung von Flüssigkeiten. In Rücksicht auf die Hauptsache, nämlich das Factum, dass Mayer das Aequivalent nach Zahl und Ableitungsmethode bereits angegeben hatte, ist in der Darstellung Joules nichts zu finden, als die Verschweigung der Hauptsache und die Ersetzung derselben durch jenen Nebenumstand, der in eben jener Mayerschen Abhandlung, welche die Hauptsache enthielt, gelegentlich mitverflochten war.

Während der englische Experimentator sich damit beschäftigte, das Aequivalent durch vielseitige Versuche nach allen Richtungen hin festzustellen, hatte sich der deutsche Entdecker, für den die Wahrheit der Sache und auch die Maassbestimmung von vornherein genügend feststand, bereits mit der Verfolgung des neuen Naturgesetzes in verschiedene Anwendungsgebiete und zwar in einer Weise versucht, die zum Theil zu später allgemein discutirten Theorien geführt hat. Seine nächste Abhandlung von 1845 „Die organische Bewegung in ihrem Zusammenhange mit dem Stoffwechsel“ [1]) führte einerseits die allgemeinen physika-

---

[1]) Mayer, Mechanik der Wärme (1867) S. 15—126.

lischen Ideen weiter aus und zog andererseits die physiologischen Consequenzen der veränderten Auffassungsart. Ueberdies trifft man in ihren allgemeinen Entwicklungen bereits die Spuren einer neuen Anwendung des Aequivalenzgesetzes, die drei Jahre später in der Schrift „Beiträge zur Dynamik des Himmels“ [1]) gemacht wurde. Diese letztere Schrift enthält hauptsächlich das, was man heute die Meteortheorie der Sonnenwärme nennt, und behandelt überhaupt die durch kosmisch mechanische Stosswirkungen oder im Allgemeinen durch kosmische Bewegungswirkungen ableitbaren Wärmeeffecte und Wärmezustände. Was speciell die Meteoritentheorie anbetrifft, so ist die Vorstellung die, dass der Ersatz der von der Sonne ausgegebenen Wärme durch das Hineinfallen kleiner kosmischer Massen bewirkt werde. Die Erzeugung der Wärme durch die Stösse dieser mit grosser Geschwindigkeit anlangenden kosmischen Körper erscheint nach Maassgabe des Wärmeäquivalents der mechanischen Kraft weit intensiver und entscheidender als ein Verbrennungsprocess entsprechender Massen nach Art unserer gewöhnlichen Wärmehervorbringung nur irgend sein könnte. Die rein mechanische Action stellt sich mithin als etwas dar, was in erster Linie zu berücksichtigen ist, wenn es gilt, die allerintensivsten Wärmeprocesse zu erklären. Die Hauptsache bleibt aber in allen diesen Untersuchungen, dass durch die Feststellung des Aequivalents ein Maass in die sonst mehr oder minder haltungslosen Vorstellungen gebracht ist. Nur die bestimmte Kenntniss eines Wärmewerths der mechanischen Kraftprocesse konnte den Gedanken näherbringen, dass die kosmisch mechanischen Wirkungen für die Wärmeökonomie des Sonnensystems eine entscheidende Bedeutung haben könnten. Gegenüber jeglicher Theorie von kosmischen Stössen, als einer möglichen Ursache des Wärmeersatzes, muss ich bemerken, dass überhaupt die für geschichtliche Zeiten sich darbietende Wärmeconstanz der Sonne nicht gleich zu dem Schluss berechtigt, diese merklicherweise vorhandene Constanz sei eine genaue und absolute, und es müsse daher ein Ersatz stattgefunden haben. Alle Theorien von einem Ersatz, und es sind nach und ausser der Mayerschen gar curiose aufgestellt worden, bleiben so lange überflüssig, als nicht die Möglichkeit, ja Wahrscheinlichkeit beseitigt ist, dass überhaupt und wesentlich kein Ersatz stattfinde. Für den, welcher die

---

[1]) Ibid. S. 149—234.

Quantitäten veranschlagen und etwas rechnen will, liegt die Annahme sehr nahe, dass im Innern der Sonne eine so hohe Temperatur herrsche und eine so gewaltige Wärmemenge verfügbar sei, dass die Abnahme durch Verstrahlung während geschichtlicher Zeiträume nicht merklich werden kann. Geht man aber einmal von der Vorstellung eines Ersatzes aus, dann ist die Mayersche Meteortheorie noch die klarste Rechenschaft.

179. Nachdem das mechanische Aequivalent der Wärme und die gesammte sich daran schliessende Vorstellungsart bereits festgestellt war und es sich nur um die Verbreitung derselben sowie um noch mehr unmittelbare Experimente zur allseitigen Fixirung der betreffenden Zahl handeln konnte, begann im Allgemeinen eine Bewegung zur Ausbildung einer möglichst vielseitig ausgeführten und umfassenden mechanischen Theorie der Wärme. Man kann die Bestrebungen der fraglichen Art ziemlich genau als mit den ersten Jahren der zweiten Hälfte unseres Jahrhunderts anfangend bezeichnen. An Ideen, welche für die mechanischen Fundamentalprincipien oder Grundbegriffe einen erheblichen neuen Zuwachs lieferten, ist zunächst in dem fraglichen Kreise von Unternehmungen nichts hervorgetreten. Die Annahme, dass die Umsetzung von Massenbewegung in eine mechanische Affection molecularer Art die mechanisch hervorgebrachte Wärme ergebe, und dass umgekehrt die Umwandlung molecularer Kraftbethätigung in Massenbewegung die mechanische Wärmewirkung vertrete, wurde die maassgebende Anschauungsweise. Die Hypothese, dass die blosse Anwesenheit oder der Uebergang eines Wärmestoffs die Wärmeerscheinungen hervorbringe, war schon von Rumford und Davy sehr entschieden verworfen gewesen; aber es hatte fast ein halbes Jahrhundert gedauert, bis die über allen Zweifel und alle ältere Tradition triumphirende Thatsache der quantitativ festgestellten Aequivalenz das Signal gab, eine vollständige Wärmetheorie nach mechanischen Gesichtspunkten anzustreben.

Um so wunderlicher nimmt sich auf den ersten Blick die Thatsache aus, dass einige Schriftsteller, um in ihrer Art die Speculationen über die Mechanik der Wärme bunter zu machen, auf eine kleine Schrift zurückgreifen mussten, deren Verfasser bei seinen Ueberlegungen nie etwas Anderes als einen Wärmestoff im Auge gehabt hatte. Sadi Carnot (geb. 1796, gest. 1832) hat in seinen „Reflexionen über die bewegende Kraft des Feuers“

(Paris 1824)[1]) allerdings viel Geist und auch einen allgemeinen, interessanten Gedanken entwickelt; aber eine genauere Prüfung zeigt, dass die Angelegenheit der mechanischen Wärmetheorie durch die spätere unkritische Einmischung der Carnotschen Vorstellungsarten geschädigt worden ist. Carnots Haupterörterung richtete sich auf die Oekonomie der Dampfmaschine, und er suchte sich in eigenthümlicher Weise vorstellig zu machen, unter welchen Umständen von der entwickelten Wärme der grösste mechanische Nutzeffect zu erwarten sei. Hiebei ging er von einem ihm eigenthümlichen Gedanken aus, nämlich von der Annahme, dass die Ueberwindung eines mechanischen Widerstandes durch die Wärme stets nur auf der Wiederherstellung eines im Wärmestoff gestörten Gleichgewichts beruhen könne. Er dachte sich hiebei, dass der mechanische Nutzeffect erzielt werde, indem die Wärme von einem Körper höherer Temperatur durch ein vermittelndes Agens, also im besondern Falle durch den Dampf, auf einen Körper niedrigerer Temperatur, also etwa auf das condensirende Wasser, übergehe oder vielmehr, im Sinne seiner Stoffhypothese geredet, zu demselben überfliesse. Die Differenz der Temperaturen war ihm das Wesentliche, und er verglich sogar die Wirkung des Wärmestoffs mit derjenigen des fallenden Wassers dergestalt, dass in diesem Vergleichungsgebilde der Uebergang vom wärmeren zum kälteren Körper je nach der Temperaturdifferenz dem Sinken des Wassergewichts von einer grösseren oder geringeren Höhe analog sein sollte. Er vertheidigte demzufolge die Ansicht, dass niemals eine mechanische Wirkung anders möglich sei, als wenn der Wärmestoff von dem wärmeren zum kälteren Körper übergehe und dabei auf seinem Wege einen geeigneten Zwischenkörper in Bewegung setze.

Wenn nun dieser Gedanke nach Feststellung des mechanischen Aequivalents der Wärme wieder hervorgesucht und sogar dem Gesetz der Aequivalenz als ein zweites Grundgesetz der mechanischen Wärmetheorie an die Seite gestellt worden ist, so hat sich, nicht etwa blos in dieser ungleichartigen Verbindung selbst, sondern noch mehr in der unklaren Art ihrer Bewerkstelligung die Wirrniss recht blosgestellt, welcher diejenigen Gelehrtenköpfe,

---

[1]) Diese sonst kaum zugänglichen Réflexions sur la puissance motrice du feu etc. sind wieder abgedruckt in den Annales scientifiques de l'école normale supérieure, 2. Serie, Bd. I, Paris 1872, S. 393—457.



in denen es am meisten an Ordnung mangelte, vermöge der neuen, nicht bei Ihresgleichen erzeugten Ideen, anheimgefallen sind [1]). S. Carnot erklärte ausdrücklich, dass keine Wärme consumirt werde, sondern dass der mechanische Effect von der Wiederherstellung des im Wärmestoff unterbrochenen Gleichgewichts herrühre. Nun lässt sich allerdings ein Theil des Carnotschen Gedankens von der Stoffhypothese unabhängig machen; aber alsdann ergiebt sich nicht ein zweites Grundgesetz der mechanischen Wärmetheorie, sondern eine allgemeine mechanische Ansicht, die auch nebenbei für die Wärme einmal eine klarere principielle Bedeutung gewinnen mag.

In der That beruht jede mechanische Bewegung, die nicht blosse Trägheitsbewegung ist, darauf, dass in der Richtung derselben mechanische Kraft und zwar von einer Quelle, wo sie in grösserem Maasse vorhanden ist, zu einem Gegenstande hin, wo nur ein geringerer Widerstand entwickelt werden kann, übertragen werde. Auf diese Weise ist jede solche Bewegung ein Zeichen, dass sich in ihrer Richtung ein gestörtes Gleichgewicht wiederherzustellen suche. Jene Differenz also, von welcher der jüngere Carnot als von einer wesentlichen Voraussetzung mechanischer Leistung redete, und die ihm nichts als eine Temperaturdifferenz war, hat bei jeder thätigen, einen Widerstand überwindenden Kraftwirkung statt. Hienach ist es auch gar nicht überraschend, dass die Wärme als Molecularbewegung nur in derjenigen Richtung fortschiebende Wirkungen ausüben kann, wo sie nicht durch eine gleich intensive Molecularbewegung derselben Art aufgewogen wird. Mechanische Wirkungen überhaupt finden aber auch vom kälteren zum wärmeren Körper hin statt, und zwar ist dies ebenso nothwendig, wie die Gegenseitigkeit von Wirkung und Rückwirkung zwischen zwei einander stossenden Massen. Es ist daher nicht der geringste Grund vorhanden, in dieser Beziehung für die Wärmetheorie von einer neuen oder gar fruchtbaren Einsicht zu

---

[1]) Ein deutsches, besonders lehrreiches Beispiel der neuen Art von Zerfahrenheit bilden Herrn Clausius' „Abhandlungen über die mechanische Wärmetheorie", gesammelt 2 Bde., Braunschweig 1864—67 (überarbeitet und als mechanische Wärmetheorie betitelt, auch 1876—79). Diese sogenannte mechanische Wärmetheorie enthält, abgesehen von den Einmischungen der Elektricität, nichts weiter als Carnotereien, mit vielfacher Verschweigung des Urhebers und theilweise auch mit Taufung der Carnot-Clapeyronschen Ergebnisse auf den Namen des Herrn Clausius.

reden. Es heisst im Gegentheil auf Abwege gelangen, wenn man derartige Aperçüs, wie das bezüglich des Uebergangs vom wärmeren zum kälteren Körper, zu einem erheblichen und gar noch mit dem Aequivalenzgesetz ebenbürtigen Satz hinaufschrauben will. Die Verlegenheit, die an sich noch sehr unvollständige, ja ihrer Benennung noch lange nicht entsprechende und daher viel zu anspruchsvolle mechanische Wärmetheorie doch mit irgend etwas aufzustutzen, was nach Bereicherung ihres Materials aussieht, — diese Verlegenheit, nebst der Eitelkeit einzelner unkritischer Schriftsteller, liefert den Erklärungsgrund für jene seltsame Mischung des Ungleichartigen und nirgend zueinander Passenden. Wäre die Carnotsche Schrift früher nicht fast unzugänglich gewesen, so hätten sich auch wohl zeitig Kritiker gefunden, um den falschen und nebelhaften Berufungen auf dieselbe entgegenzutreten. Ungeachtet der zahlreichen Bücher, welche auf ihrem Titel die vielversprechende Aufschrift „mechanische Wärmetheorie" zur Schau tragen, und die theils das Experimentelle, theils den analytischen Schematismus cultivirt haben, ist dennoch von einer in den wesentlichen Richtungen zureichenden und über die Mayerschen Grundlagen sonderlich hinausreichenden Gesammttheorie noch keineswegs zu reden, zumal nicht von einer solchen, die durchgehends auf klare mechanische Grundbegriffe zurückgeführt wäre.

Um jedoch über die Punkte der theoretischen Wärmephysik zu orientiren, welche den Sadi Carnotschen Ideen und der Specialisirung derselben durch den Ingenieur Clapeyron Einiges zu verdanken haben, mögen noch folgende kritische Bemerkungen Platz finden. Die von Carnot erdachte cyklische Zustandsänderung und Zurückführung auf denselben Zustand nach Volumen und Temperatur ist in ausschliesslicher Anwendung auf ideelle Gase selber ein ideeller Entwurf, den man mit einer mathematischen Construction vergleichen kann, sobald nur von jeder Hypothese und hiemit auch von der Stoffhypothese abgesehen wird und nur die bekannten Gasgesetze in ihrer Gestaltung für ideelle Gase zu Grunde gelegt werden. Um unmittelbar und ohne unbekannte Function die Wärmemengen zu erhalten, die für die Zustandsänderungen ins Spiel kommen, bedarf man des Mayerschen Aequivalents, und es soll englischerseits, durch irgend einen der verschiedenen Thomsons, diese leichte Combination der Carnot-Clapeyronschen Ergebnisse mit dem Mayerschen Aequivalent zuerst

und, wie wir meinen, gleichsam automatisch vorsichgegangen sein. Setzt man nun jenen Veränderungsumlauf am Gase voraus, so ergiebt sich aus einer einfachen Berechnung der Satz, dass sich die auf dem Weg und dem Rückweg isothermisch, d. h. bei constanten Temperaturen ins Spiel kommenden Wärmemengen wie diese Temperaturen verhalten.

Dies ist der Fundamentalsatz, von dessen Verallgemeinerung für alle Körper alles Uebrige, also der gesammte Bestand der Carnotik an Sätzen und Anwendungen abhängt. Nun vermochte aber Carnot und vermag auch die weitere Carnotik die Brücke vom ideellen Gase zu jedwedem Körper nicht anders zu schlagen, als durch eine dunkle Anwendung des oben erwähnten, selber dunkeln Axioms vom Wärmeübergang. Griffe nämlich der Satz vom Verhältniss der Temperaturen nicht auch Platz, wenn die Cyklusconstruction sich auf einen beliebigen Körper, also z. B. ein wirkliches Gas oder auf jeglichen, sei es einfachen oder combinirten Aggregatzustand bezieht, so würde, im Widerspruch mit jenem Axiom, Wärme, und noch dazu in unbeschränkter Menge, vom kältern auf den wärmern Körper übergeführt werden können. Hiezu bedürfte es nur einer Verbindung des ideellen Gases mit dem fraglichen Körper, die beide als Maschinen betrachtet werden, vermöge deren Wärme- und Arbeitsmengen innerhalb der so hergestellten Gesammtmaschine in Umlauf gesetzt werden.

Indem auf diese Weise jener Satz von der Proportionalität der Wärmemengen und der Temperaturen für alle Körper, wenn auch äusserst indirect und vermittelst eines dunkeln und dunkel angewendeten Axioms, gewonnen ist, hat man Alles in der Hand, was ausser dem Mayerschen Aequivalent, aber zugleich in Verbindung mit demselben, für die mechanische Wärmetheorie an wesentlicher Einsicht existirt. Aus diesem Satz leitet sich alles Uebrige ab, und man kann verschiedene Folgerungen aus ihm, wenn man will, als gleichwerthig mit demselben, statt seiner an die Spitze stellen. Von einem zweiten Hauptsatz der Wärmemechanik ist daher keine Rede; was unter dem Namen eines solchen vorgegeben wird, enthält im Grunde immer nur jene Carnot-Clapeyronsche Ableitung des Proportionalitätssatzes oder irgend eine weitere Verarbeitung oder Transformation desselben. Die ursprünglichste, einfachste und wichtigste Transformation ist die Clapeyronsche Formel für die jedweder Zustandsänderung bei constanter Temperatur entsprechende Wärmemenge. Ihr Kern

und Typus zeigt sich am einfachsten in der Anwendung auf die latente Ausdehnungswärme. Hier hat man, wenn man unter Q die Wärmemenge gleich als Kraftmenge versteht und demgemäss nicht erst noch mit dem mechanischen Aequivalent E zu multipliciren braucht, die äusserst einfache Beziehung $dQ = T \frac{dp}{dt} dv$ oder auch $\frac{dQ}{dv} = T \frac{dp}{dt}$. Das Product $T \frac{dp}{dt}$ ist der eigentliche Kern der Clapeyronschen Formel.

Ich muss des Näheren wegen auf die „Neuen Grundgesetze II (1886)" verweisen; denn die Angelegenheit der Clapeyronschen Formel ist der dunkeln Ableitungsart wegen, und weil es für sie an einem klaren, eigentlichen und unmittelbaren mechanischen Princip bisher gemangelt hat, eine ziemlich umständliche. Hiezu kommt noch, dass die Nachtreter der Sache sich haben den Schein geben wollen, als hätten sie ausserdem noch etwas aufzuweisen, und dass sie zu diesem Behuf dahin arbeiten mussten, das Dunkle noch weiter zu verdunkeln und ihre eigne Nichtigkeit hinter umnebelten Verzwicktheiten zu verbergen.

Es sei daher hier nur ganz kurz auf den wirklichen Bestand der Sache hingewiesen. Die Clapeyronsche Formel, wie angegeben im Sinne des Mayerschen Aequivalents vervollständigt, kann so gut wie der Satz von der Proportionalität, aus dem sie und der aus ihr entwickelbar ist, als ein zweiter Satz angesehen werden, der sich hat an den Aequivalentsatz Mayers anschliessen lassen. Die auf die Technik gerichtete Ableitung eines ökonomischen Coefficienten ist auch nur eine Folge davon. Ausserhalb der Technik, rein innerhalb der theoretischen Physik, besteht die weitere mechanische Wärmethorie, die zu den sonstigen Aequivalentconsequenzen noch hinzugekommen ist, in nichts weiter als im gesammten Anwendungsgebiet der Clapeyronschen Formel. Diese Formel in ihren verschiedenen Varianten liefert vor allen Dingen die Verdampfungswärme als Function der Druckänderung, d. h. als Function von $\frac{dp}{dt}$, ebenso die Schmelzwärme und, wie schon angegeben, die latente Ausdehnungswärme, überdies aber noch für die chemischen Processe die latente Dissociationswärme. Sie muss sich überhaupt bei jeglicher Zustandsänderung anwenden lassen, bei welcher die Temperatur constant bleibt. Dieses ganze Stück theoretischer Physikerweiterung, dessen specifische Richtung

Carnot und Clapeyron zu verdanken, welches aber durch Mayers Aequivalent erst realisirbar geworden ist, würde noch mehr Bedeutung haben, wenn nicht alle fraglichen Beziehungen das empirische Gegebensein der Druckänderung $\frac{dp}{dt}$ voraussetzten. Aber auch so stellt das Anwendungsbereich der Clapeyronschen Formel immerhin ein Stück Wärmephysik von annähernd mechanischem Charakter vor. Carnot nebst dem sich anschliessenden Clapeyron auf der einen und Mayer auf der andern Seite haben aber bereits Alles geliefert, was in der heutigen Thermomechanik oder, besser gesagt, etwas mechanisch gestalteten Thermophysik an erheblichen Einsichten verfügbar ist, und nur die sich fast von selbst machende Amalgamirung ist auf Rechnung Späterer, und zwar vor Allen der Engländer, zu setzen.

180. Nehmen wir nun wieder den Leitfaden des Mayerschen Aequivalents auf, um zuzusehen, wie als Zweites zur Carnotik noch ein anderes Stück alter Theorie von freilich äusserst problematischem Charakter wieder hervorgesucht und cultivirt worden ist. Hiezu, d. h. zur Bernoullischen Kinese, werden uns am Besten einige Vorbemerkungen darüber führen, wie das, was man die Mayersche Gleichung des Aequivalents nennen könnte, den gasförmigen Aggregatzustand zur natürlichen Grundlage gehabt hat. In der That ist der erste und zugleich der Normalfall für die nähere Vorstellung und bestimmte Berechnung des mechanischen Aequivalents der Wärme derjenige der Gase gewesen, wie allein schon der oben wörtlich angeführte Mayersche Satz beweist. Zwischen der Wärmemenge, welche bei constantem Volumen, also erhöhtem Druck eine gewisse Temperaturerhöhung hervorbringt, und derjenigen Wärmemenge, welche bei der gleichen Temperaturerhöhung gegen den constanten Druck auch zugleich das Volumen verändert, also eine leicht berechenbare äussere Arbeit verrichtet, ist die Differenz der eben bezeichneten Arbeit gleichzusetzen, und in dieser Gleichung besteht wesentlich der Ausdruck der beiderseitigen Aequivalenz. Der Kraftwerth der Wärme und der Wärmewerth der Kraft sind natürlich durch einunddieselbe Gleichung gegeben. Der Begriff der Verwandlung bedeutet zunächst nichts Anderes als die Grössenbeziehung, welche zwischen beiden Gestalten der Phänomene besteht. Ausserdem schliesst er aber nicht etwa blos den Gedanken eines ursächlichen Verhältnisses, sondern, genauer betrachtet, vorzüglich denjenigen der Einerleiheit des in

eine neue Form übergegangenen Kraftmaterials oder Kraftvorraths ein. Abgesehen von einer solchen strengen Bestimmung ist der Ausdruck Verwandlung, wie mancher Missbrauch der neuen Ideen lehrt, nur zu geeignet, phantastischen Imaginationen und schwankenden oder unklaren Conceptionsarten der Naturprocesse Vorschub zu leisten.

Grade für das Interesse der Mechanik darf es nicht unbemerkt bleiben, dass es die Gase gewesen sind, an denen sich das Aequivalenzverhältniss am ehesten und deutlichsten hat sichtbar machen und feststellen lassen. Die gasförmige Constitution bietet die Materie und die Kräfte in einem verhältnissmässig freien Zustande dar und gestattet es, die Veränderungen des auf diese Weise gegebenen mechanischen Systems in Rücksicht auf Druck und Wärmewirkungen bereits einigermaassen zu übersehen und durch einfache empirische Gesetze zutreffend zu decken. Hiebei darf jedoch nicht vergessen werden, dass die innern Gründe dieser Gesetze und bereits der Mariotteschen Relation zwischen Druckveränderung und Volumensveränderung noch immer zu verschiedenen Vorstellungsarten der molecularen Vorgänge führen.

Im Kreise der mechanischen Wärmetheorien hat man nun eine eigenthümliche Vorstellungsart Daniel Bernoullis[1]) wieder hervorgesucht, derzufolge die Gastheilchen nach allen Richtungen in gradliniger Bewegung begriffen sind und z. B. den Druck auf die Wandungen eines Gefässes durch fortwährend wiederholtes Stossen hervorbringen. Jener Autor dachte sich bei der Veränderung der Abstände zwischen den Molecülen durch die Veränderung des Volumens nicht nur die Zahl der räumlich nebengeordneten Stösse, sondern auch deren Wiederholungszahl verändert, so dass die Häufigkeit der Stösse desselben Molecüls mit der abnehmenden mittleren Entfernung wachsen soll. Offenbar wäre man durch diese Anschauungsweise genöthigt, für ein in Wandungen eingeschlossenes Gas eine rastlose dynamische Agitation vorauszusetzen, die niemals zu strengem Gleichgewicht und zu strenger Ruhe führen, sondern auf der zeitlich grenzenlosen Unterhaltung eines Kräftespiels beruhen würde, welches man mit einem schrankenlosen Penduliren ohne Reibung und sonstige fremde Widerstände vergleichen müsste. Dieser Theil der Idee ist unannehmbar, insofern man ebensogut alle Gleichgewichts- und

---

[1]) Aus dessen Hydrodynamica (1738) Sect. X, namentlich § 2 und 4.

Spannungsverhältnisse, also überhaupt jede continuirliche Aufhebung eines Druckes oder Zuges in Oscillationen aufgelöst voraussetzen könnte, ja der Consequenz nach müsste. Der andere Theil aber, der sich auf das gradlinige Bewegungsbestreben aller Gasmolecüle in allen möglichen Richtungen bezieht, ist nicht nur eine sehr willkürliche, sondern auch eine solche Hypothese, bei welcher ein chaotisches Durcheinander unmotivirter Bewegungsrichtungen den Ersatz für eine systematische Vorstellungsart naturgesetzlich übereinstimmender Bewegungstendenzen liefern soll. Die sogenannte kinetische Theorie, die wesentlich für Gase gelten soll, theilweise aber auch auf den flüssigen Aggregatzustand ausgedehnt worden ist, kann geschichtlich kurzweg als Bernoullik bezeichnet werden, ähnlich wie wir jenen Theil annähernder Thermomechanik, der auf dem mechanisch dunkeln Princip vom Wärmeübergang beruht, der Kürze wegen Carnotik genannt haben. Nachdem einmal durch Mayer das Mechanische der Wärme vollkommen festgestellt war, lag es nahe, nicht blos, wie Mayer, in der Strahlung der Wärme, sondern in jedweder Wärme Bewegung vorauszusetzen. Motorische Theorien waren schon im 17. und 18. Jahrhundert verbreitet gewesen und, wie es scheint, nur durch Blacks Hinlenkung der Aufmerksamkeit auf die Wärmemengen in den Hintergrund gedrängt worden. Auch hat irgend eine motorische Theorie, sobald sie sich nur einigermaassen fruchtbar erweist, aller Wahrscheinlichkeit nach die Zukunft für sich. Hiemit soll aber nicht im Entferntesten gesagt sein, dass es die Bernoullik und heutige Kinese sein müsse oder auch nur sein könne, was dieser Aussicht entspricht. Bezüglich einer eingehenden Kritik der Bernoullik und der neuern Kinetereien, welche letztere von den Engländern her ungefähr um die Mitte des Jahrhunderts datiren, in Deutschland aber mit mathematistelnder Breite besonders arg ausgetreten worden sind, muss ich auf die „Neuen Grundgesetze I und II (1878—86)“ verweisen. Die begreiflicherweise ziemlich verworrene Complicirtheit des von untergeordneten Personen verschnörkelten und jedenfalls noch ganz unreifen Gegenstandes gestattet hier nichts als die Hervorhebung einiger Hauptpunkte zur allgemeinen Charakteristik.

Daniel Bernoulli hatte den wichtigen Umstand berücksichtigt, dass die Ausdehnung der Molecüle von erheblichem Einfluss auf die Wärmespannung ist, wenn auch seine besondere Art, dies bei den Stösschen in Rechnung zu bringen, nicht stichhält. Uebrigens

war die Rücksicht auf die Molecüldimensionen zur Veranschlagung der Wärmespannungen, wie ich nach der Aufstellung meines Zwischenvolumgesetzes durch neue Nachforschungen festgestellt habe, bereits damals eine traditionelle, und unabhängig von kinetischen, d. h. auf gradlinige Bewegungen und auf Stösse gerichteten Vorstellungen. Schon der Vater Daniel Bernoullis brachte das Volumen der Molecüle in Rechnung, und sogar hat Johann Bernoulli die Sache dabei richtiger gemacht als sein Sohn. Er zieht nämlich das Molecülvolumen vom ganzen Volumen ab[1]), ein Verfahren, zu dem ich ebenfalls, aber durch bestimmte und beweisende Thatsachen, gelangt bin, und welches den Keim jenes nachher alle Aggregatzustände umfassenden Zwischenvolumgesetzes in den „Neuen Grundgesetzen“ gebildet hat.

Ungründlicher als die Bernoullis, ja gradezu oberflächlich haben sich die neumodischen Kinetiker ein Menschenalter hindurch nur mit ideellen Gasen befasst und demgemäss die Molecüle wie Punkte behandelt, ohne Ausdehnungen in Frage zu bringen. Erst nachträglich, nachdem ich in den „Neuen Grundgesetzen“ diesen Zustand gerügt, ist eine ganz späte und zunächst obscur gebliebene Ausnahme[2]) hervorgesucht worden. Uebrigens besteht die alte,

---

[1]) Preisabhandlung über die Mittheilung der Bewegung (in den Opera, Lausanne und Genf 1742, 4 Bände, dritter Band); Zusatzabhandlung über den Grund der Elasticität. In den Artikeln 37 und 38 der letzteren findet sich das feste Volumen der Materie von dem übrigen Volumen zur Erklärung der extremen Drucke bei dem Mariotteschen Gesetz abgezogen. Nur ist bei der Luft das Verhältniss beider Volumina ganz falsch zu $\frac{1}{15000}$ angenommen, vermöge der Vorstellung, ihre Theilchen müssten wie im Golde verdichtet sein, sobald sie eine gedrängte Masse bilden. Uebrigens lässt Johann Bernoulli den Gasdruck in Centrifugalkräften der Molecüle bestehen, erklärt ihn also noch nicht, wie der Sohn, aus gradlinigen Bewegungen und auch nicht aus Stössen. Das Nähere davon ist willkürlich verwickelt und interessirt höchstens als geschichtliches Curiosum wegen der dabei vorausgesetzten molecularen Wirbelbewegungen nach Descartesschem Muster.

[2]) Nämlich eine holländisch geschriebene Dissertation von 1873 von dem Physikprofessor van der Waals, die, um unsern neuen Grundgesetzen etwas gegenüberzustellen, 1881 in deutscher Uebersetzung oder vielmehr ergänzender Bearbeitung erschienen ist. Sie betitelt sich „Die Continuität des gasförmigen und flüssigen Zustandes“. Der Abzug vom Volumen ist hier aber nicht das Molecülvolumen selbst, sondern das Vierfache davon, und bleibt diese angeblich kinetische Folgerung innerhalb äusserst enger Grenzen stecken. Näheres über den Sachverhalt ist in unserer zweiten Folge der „Neuen Grundgesetze“ (1886) auseinandergesetzt. Eine Priorität gegenüber unserer eignen Aufstellung

von Daniel Bernoulli her übernommene Eigenthümlichkeit der Kinese darin, den Gasdruck nach Maassgabe von Volumen und Temperatur aus den Massengeschwindigkeiten der Molecüle durch die in den Stössen bethätigte lebendige Kraft entstehen zu lassen und zu dieser hypothetischen Berechnungsart alsdann die erforderlichen Massengeschwindigkeiten zu fingiren. So ergiebt sich eine Art Erklärung des Mariotteschen Gesetzes und der Drucksteigerung durch Temperaturerhöhung, wie beide Dinge ja auch schon im Wesentlichen von Daniel Bernoulli auf eine solche Art abgeleitet wurden. Eine nicht specifisch kinetische, sondern wahre motorische Theorie würde sich vor allen Dingen dadurch zu bewähren haben, dass ihr eine genügende, ohne willkürliche Hypothesen vonstattengehende Rechenschaft über die Bestandtheile der specifischen Wärme gelänge. Die Kinese ist aber nicht blos hierin völlig unzulänglich, sondern auch sonst unfruchtbar geblieben. Sie hat nur den Schein von Erklärung bezüglich einiger solcher Wahrheiten gegeben, die man schon kannte, aber nirgend eine neue hinzugefügt.

Eine bessere Entwicklung, die sich aber ziemlich automatisch gemacht hat, betrifft einen zunächst kühnen, aber immer mehr bewährten Schluss aus den auf die Temperatur bezüglichen Gasgesetzen. Wendet man nämlich das Gesetz der Ausdehnung der Gase durch die Wärme bei constantem Druck gleichsam rückwärts und unbeschränkt für die Volumensverminderung bei sinkender Temperatur an und abstrahirt dabei von allen Eigenthümlichkeiten der etwaigen tropfbar flüssigen oder festen Condensation, also von den Folgen der Nichtpermanenz, so gelangt man zu einer Nullgrenze des Volumens. Die dieser Grenze entsprechende Temperatur, die durch den umgekehrten Ausdehnungscoefficienten gegeben wird und — 274° C. beträgt, ist als der absolute

---

kann aus zwei Gründen nicht gelten; erstens weil unser Zwischenvolumgesetz als etwas wesentlich Anderes mit einer kinetischen Beschränktheit nicht vergleichbar, sondern von unvergleichlich grösserer, alle Aggregatzustände umfassender Tragweite ist; zweitens aber, weil für unsern Keim der von uns jetzt aufgefundene Präcedenzfall Johann Bernoullis ein weit eher zutreffender ist. Hat man die vollen Wahrheiten ans Licht gebracht, so lassen sich geschichtliche Theil- und Vorstückchen oft genug auffinden. Nebenannäherungen von blossem Halbcharakter aus jüngster Zeit, wie die Waalssche, frischen sich alsdann auch auf und modeln sich auch wohl nach der erweiterten Wahrheit, haben aber trotzdem nur eine secundäre Nebenbedeutung in Anspruch zu nehmen.

Nullpunkt oder, mit andern Worten, als ein Werth betrachtet worden, bei welchem eine Temperaturgrösse zu existiren aufhört.

Zu demselben Ergebniss gelangt man natürlich auch, wenn man von der andern Gestalt des Gay-Lussacschen Gesetzes ausgeht, also constantes Volumen voraussetzt und sich die Spannungen proportional der Temperatur erschöpfen lässt. Die einzige Vorsicht, die man bei dem äusserst bequemen Gebrauch der absoluten Temperatur zu beobachten hat, ist die, immer der ursprünglichen Entstehung und des zugehörigen Sinnes der Sache eingedenk zu bleiben, also namentlich den Zusammenhang mit dem Ausdehnungs- oder Spannungscoefficienten nicht aus dem Auge zu lassen. Der tiefere Grund, warum jener Schluss auf den absoluten Nullpunkt nicht durch die Aenderung der Aggregatzustände hinfällig werden kann, ist in den „Neuen Grundgesetzen II", und zwar mit der Nachweisung eines Analogons der Gay-Lussacschen Beziehung, welches bei Flüssigkeiten und festen Körpern statthat, in seiner einfachsten Gestalt aufgedeckt worden.

181. Will man die Vorgeschichte der Mechanik der Wärme gehörig verstehen, so darf man nicht annehmen, dass die Vorstellung von einer Bewegung oder Agitation der kleinsten Theile der Körper oder eines Stoffes in den Körpern das Entscheidende gewesen sei, wodurch man etwa auf die Aequivalenztheorie hingedrängt worden wäre. Die Conceptionsarten von dem, was die Wärme an sich selbst sei, sind vielmehr nach der positiv fördernden Seite in jeder Gestalt ziemlich gleichgültig geblieben und haben in ihrer irrthümlichen Gestaltung, welche die blosse Existenz eines Wärmestoffes und dessen Zu- und Abfluss zum Erklärungsgrund der Erscheinungen machte, nur hinderlich gewirkt. Hätte allein die entgegenstehende Idee von der Bewegung als dem Wesen der Wärme in der Theorie etwas helfen können, so hätten sogar rein philosophische Ansichtsäusserungen, wie z. B. diejenige Lockes, die Joule zu einem Motto seiner Abhandlung von 1850 [1]) machte, zu einer Reform treiben müssen. Auch der geistvolle und universelle Thomas Young gelangte in seiner verhältnissmässig sehr rationellen Encyklopädie des exacten Wissens zu Vorstellungen,

---

[1]) Philosophical Transactions (1850) S. 61: Heat is a very brisk agitation of the insensible parts of the object, which produces in us that sensation from whence we denominate the object hot; so what in our sensation is heat, in the object is nothing but motion.



die, abgesehen von dem Aequivalent selbst, den uns heute geläufigen Begriffen entsprechen. In seinem ebenso scharfsinnigen als gelehrten Werk[1]) bezeichnete er unter Verwerfung der Leibnizschen Metaphysik und aus Abneigung gegen die entsprechende Namengebung die lebendige Kraft als „Energie" und setzte sie zur „Arbeit" in Beziehung, indem er sich zugleich dahin aussprach, dass die Wärme Bewegung sein müsse[2]). Indessen ist es ganz offenbar eine andere Nothwendigkeit, als die der molecularen und unbestimmt dynamischen Vorstellungsart gewesen, was in der neuern Zeit die Beziehung zwischen Kraft und Wärme immer näher gerückt hat.

Parallel mit der Entwicklung und dem Hervortreten der technischen Gesichtspunkte machte sich der Begriff der mechanischen Arbeit, der auf dem Boden der praktischen Mechanik erwuchs, allmälig auch in der rationellen Mechanik geltend. Bei Lagrange kam dieser Ausdruck und die entsprechende Vorstellungsart noch gar nicht in Frage, wenn auch natürlich die Sache bei ihm vorhanden war. Für unser Jahrhundert sieht man aber aus Poncelets Introduction à la mécanique industrielle physique ou expérimentale[3]) recht deutlich, wie sich der Sprach- und Begriffsgebrauch erst allmälig im Sinne der technischen Gesichtspunkte abänderte. Der geniale Begründer der modernen synthetischen Geometrie, der sonst die Neuheit der Wendungen nicht scheute, glaubte in jener mechanischen Schrift noch besonders bemerken zu müssen, dass er sich des Ausdrucks mechanische Arbeit und des entsprechenden Begriffs als einer leitenden Vorstellungsform bedienen wolle. Hiebei erkennt man deutlich, wie das besondere Hervorkehren des Arbeitsbegriffs in den rein theoretischen und rationellen Grundlagen der Mechanik als eine noch erst zu vollendende Thatsache, aber noch keineswegs als bereits eingeleitete Gewohnheit angesehen wurde. Wenn eine solche Voraussetzung schon von einem technischen Mechaniker gemacht und der durchgängige theoretische Gebrauch des Arbeitsbegriffs für alle rationellen Grundlagen der Mechanik als eine Art Neuerung angesehen wurde, so kann man die Kluft ermessen,

---

[1]) Natural Philosophy, 2 Bde. London 1807, Bd. I, S. 78 fg.

[2]) Ibid. S. 654.

[3]) 1. Ausg. 1829, 2. Ausg. 1830—40, 3. Ausg. herausg. von Kretz, Paris 1870.

die im Uebrigen zwischen der reinen und analytischen Theorie einerseits und der Geläufigkeit des Arbeitsbegriffs andererseits bestehen musste. Die Rückwirkung des so in der praktischen Mechanik ausgebildeten Arbeitsbegriffs konnte aber nicht lange ausbleiben, und in die neusten Darstellungen der Mechanik oder Physik ist der Gebrauch des Arbeitsbegriffs sogar schon als eine selbstverständliche Lehrbuchangelegenheit eingedrungen. Hiemit soll nicht gesagt sein, dass den früheren Darstellungen der Kern der Sache an sich selbst habe fehlen können; denn in der Gleichung der lebendigen Kräfte, wie sie von Lagrange concipirt wurde, repräsentirt die eine Seite die räumlichen Positionen des Systems, und wenn man zwei verschiedene Positionen als Grenzen setzt, so entspricht der dazwischenliegende Zuwachs an lebendiger Kraft einer Differenz zwischen den Werthen der auf die Positionen bezüglichen Function. Diese letztere Function ist es aber, die dem ganz universell gedachten Arbeitsbegriff thatsächlich entspricht, obwohl diese Auslegung und Vorstellungsart ursprünglich nicht vorhanden war.

In Poncelets erwähnter Schrift ist es ein geschichtlich interessanter Umstand, dass in derselben[1]) die Gedankenform und Redewendung von einer Umwandlung der lebendigen Kraft in Arbeit und der Arbeit in lebendige Kraft ganz entschieden hervortritt. War dies auch materiell keine wesentlich neue Einsicht, so war es doch formell ein erheblicher Schritt, das Princip der lebendigen Kräfte, ohne Einschränkung auf die von den bestimmteren Voraussetzungen abhängigen älteren Erhaltungsvorstellungen, derartig zur Anwendung zu bringen, dass dem Zuwachs und der Erzeugung lebendiger Kraft ein Verbrauch von Arbeit, und umgekehrt, äquivalent gesetzt wurde. Eine solche Vorstellungsart, deren Entwicklung sich auch übrigens mehr und mehr vollzog, musste ausserordentlich dazu beitragen, den Gedanken der Kräfteäquivalenzen auch in andern Richtungen nahezulegen. Der Mechanik und der zuerst in ihr ausgebildeten Denkweise ist es daher zuzuschreiben, dass auch der weitere entscheidende Schritt, nämlich die Erfassung der Idee möglich wurde, dass in allen Erscheinungsformen der Naturkräfte ein identischer, rein mechanischer Kraftfond als Material zu Grunde

[1]) Durchgehends und besonders Art. 138 der 3. Ausg., die mit der 2. übereinstimmt.

liege. Diese Idee ist nicht erst nach und nach, sondern sofort mit der Mayerschen Entdeckung und Berechnung des Wärmeäquivalents hervorgetreten, und sie ist als eine Frucht zu betrachten, deren Hervorbringung, wenn man weit zurückgreifen will, im Huyghensschen Princip des gleichen Aufsteigens, ja schon in Galileis Vergleichung des Aufsteigungsraumes mit der erforderlichen Geschwindigkeit gesucht werden kann. Bedenkt man ausserdem die Verbindung, in welcher diese ersten Grundlagen der Dynamik mit dem Cartesischen Gedanken einer sich gleichbleibenden Menge von Bewegungsquantität, nach Ausmerzung der irrthümlichen Seite dieser letzteren Idee, zu den universelleren Erhaltungsvorstellungen führten, so sieht man deutlich, dass ein verhältnissmässig langsamer Gedankenprocess stufenweise die heutige, durchgreifende Conceptionsart vorbereitet hatte. Um jedoch den Contrast zu empfinden, in welchem die neue mechanische Wärmetheorie zu den Vorstellungen steht, welche früher möglich waren, erwäge man schliesslich, was noch ein Fourier in der Vorrede seiner Théorie analytique de la chaleur, Paris 1822, zu schreiben vermochte: „Was auch die Ausdehnung der mechanischen Theorien sein möge, sie wenden sich durchaus nicht auf die Wärmewirkungen an. Diese bilden eine besondere Ordnung von Erscheinungen, welche sich durch die Principien der Bewegung und des Gleichgewichts nicht erklären lassen.“ Selten wohl ist eine Vorhersagung über die Schranken eines Gebiets glänzender widerlegt worden als die angeführte des berühmten Analytikers, und dennoch war Fourier ein Mann, der an eben derselben Stelle den Grundsatz ausgesprochen hatte, dass ein „tieferes Studium der Natur die fruchtbarste Quelle der mathematischen Entdeckungen“ sei. Aber freilich ist es nicht der analytische Weg gewesen, der zur Wärmemechanik geführt hat oder sie seit ihrer Auffindung nennenswerth gefördert hätte! Auch musste die Befähigung, die zu so etwas führen sollte, den Capacitäten von der Stufe der Fourierschen gewaltig überlegen sein.

Viertes Capitel.

Tragweite der mechanischen Principien.

182. Um die thatsächlichen und möglichen Anwendungsrichtungen des von mechanischen Grundsätzen ausgehenden Denkens in geordneter Weise überblicken zu können, muss man sich erinnern, dass die Mechanik eine reine Mathematik der mit Rücksicht auf die Zeit betrachteten Ortsveränderungen zur Voraussetzung hat. In diesem Sinne ist der Ausdruck Lagranges[1]), dass die Mechanik eine Geometrie von vier Dimensionen sei, sehr bezeichnend. Allerdings gilt er nur von der Phoronomie oder Kinematik[2]), die aber im Laufe unseres Jahrhunderts mehr und mehr als eine besondere Abstractionsstufe oder, besser gesagt, als ein eignes, zur reinen Mathematik gehöriges Gebiet hervorgetreten und in neuern Lehrbüchern diesem Gesichtspunkt entsprechend zu selbständiger Berücksichtigung gelangt ist, ausserdem aber einen veränderten, auf die praktische Technik der Bewegungen bezüglichen Sinn erhalten hat. Alles, was sich in den drei Dimensionen des Raumes und in der vierten, die der Zeit entspricht, als Bewegungserscheinung vollzieht oder als Ruhe darstellt, muss Gegenstand der phoronomischen Auffassung werden können. Auch für die Statik ist ein phoronomisches Gegenstück denkbar; denn die Ruhe ist die dauernde Gegenwart an demselben Orte und setzt mithin voraus, dass sich die Bewegungserscheinungen im Sinne der Translation und der Rotation derartig aufheben, dass die phoronomischen Punkte oder Gebilde, die man sich als bewegbar denkt, irgend welche Zeit hindurch auch nicht die geringste Ortsveränderung erfahren. Die phoronomischen Begriffe unterscheiden sich von den specifisch mechanischen Vorstellungen dadurch, dass sie denkbar sind, ohne die Materie in Frage zu bringen. Die Mannichfaltigkeit des phoronomischen Gebiets ist zwar durch die Naturthatsachen veranlasst, muss aber als ein Bereich von Gebilden betrachtet werden, die wie diejenigen der übrigen reinen Mathematik in den Satzungen und Combinationen

---

[1]) Théorie des fonctions analytiques (1813), dritte Abth. Art. 1.

[2]) Wortvorschlag und Sinn der Kinematik bei A. M. Ampère, Essai sur la philosophie des sciences, Paris 1834, S. 50 fg.

des in Zeit und Raum construirenden Verstandes ihren vollständigen Erzeugungsgrund haben.

Hieraus folgt nun, dass der phoronomische Theil der Mechanik nicht nur nach Gewissheit und Erkenntnissart denselben Charakter hat, wie die reine Mathematik, sondern auch das äusserste Anwendungsgebiet mechanischer Einsichten ermessen lehrt. Abgesehen von metaphysischen Phantasmen wird dieses Gebiet die ganze Wirklichkeit der zugleich räumlichen und zeitlichen Phänomene und nichts weiter umfassen. Wer nicht Räume mit andern Dimensionen oder sonst eine neue Geometrie in Bereitschaft hat, wird sich an jener Gewissheit der Mathematik und an deren Ausdehnung genügen lassen können. Wohin jedoch die unhaltbare Verdinglichung des Unendlichgrossen und die Unklarheiten im Unendlichkleinen zu führen vermögen, hat die Leugnung der unbedingten Wahrheit der Geometrie bewiesen, mit welcher Gauss in vertraulichen Mittheilungen[1]) einen Anfang gemacht hat, auf dessen fälschlich grosse Autorität hin eine ganze Geometrie kleiner Autoritäten entstanden ist, die man auch Hypergeometrie[2])

---

[1]) Gauss an Schuhmacher unterm 12. Juli 1831, im „Briefwechsel zwischen Gauss und Schuhmacher", herausg. von Peters, 3 Bde., Altona 1860—61, Bd. II, S. 268 fg. Dort heisst es: „In der nicht euklidischen Geometrie giebt es gar keine ähnliche Figuren ohne Gleichheit, z. B. die Winkel eines gleichseitigen Dreiecks sind nicht blos von $^2/_3$ R., sondern auch nach Maassgabe der Grösse der Seiten unter sich verschieden und können, wenn die Seite über alle Grenzen wächst, so klein werden, wie man will."

[2]) So schrieb der verstorbene Göttinger Professor der Mathematik Riemann, den bei seiner Unselbständigkeit ausser der Gaussischen Selbstmystification auch noch gar eine Zeit lang Herbartsche Philosophasterei verwirrt hatte, in einem Aufsatz „Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen", Abh. d. Göttinger Ges. d. Wissenschaften, Bd. 13 (1866—67) S. 149: „Nun scheinen aber die empirischen Begriffe, in welchen die räumlichen Maassbestimmungen gegründet sind, der Begriff des festen Körpers und des Lichstrahls, im Unendlichkleinen ihre Gültigkeit zu verlieren; es ist also sehr wohl denkbar, dass die Maassverhältnisse des Raumes im Unendlichkleinen den Voraussetzungen der Geometrie nicht gemäss sind, und dies würde man in der That annehmen müssen, sobald sich dadurch die Erscheinungen auf einfachere Weise erklären liessen." Es überrascht nicht, dass der unklar ein wenig philosophelnde physiologische Physikprofessor Herr Helmholtz sich auch in diesem Falle die Gelegenheit nicht entgehen liess, an der Discussion theilzunehmen und in einem Aufsatz „Ueber die Thatsachen, welche der Geometrie zu Grunde liegen" (Nachrichten von der K. Ges. der Wissenschaften zu Göttingen, Juni 1868) den pikanten Widersinn beifällig zu commentiren. Eine derartige Nachgängerschaft hat sich überhaupt auch in andern Angelegenheiten



nennen könnte, die sich aber selbst vornehmlich als nichteuklidische Geometrie bezeichnet. An einer Betheiligung bei der Pflege dieser Geometrie des sogenannten Gaussschen Raumes hat es in den jüngsten Jahren nah und fern nicht gefehlt, und wenn es uns nicht selbst an dem erforderlichen Raume fehlte, so würden wir auf die auch der Mechanik hochkomisch drohende Untergrabung der geometrischen Axiome näher eingehen. So aber müssen wir die Angelegenheit den Metaphysikern und sonstigen geistigen Alchymisten überlassen, die hier mit Befriedigung wahrnehmen können, dass die Früchte der Ungereimtheit, deren Erzielung sie sich allein zuzutrauen pflegen, auch gelegentlich in den Gärten der Mathematiker reifen.

In meinen sonstigen Schriften, namentlich in den von mir und meinem Sohn verfassten „Neuen Grundmitteln zur Analysis, Algebra u. s. w. (1884)“, ist das Unwesen, welches auch in andern Beziehungen durch Gauss und die ganze zugehörige Böoterei über die Mathematik der letzten Generationen gekommen, mehrfach gestreift und namentlich das künstlich Aufgeblasene an jenem Gauss und dem ihm gewidmeten bornirten Cultus ins Licht gesetzt worden. Mit der Mathematik des Absurden sich aber speciell einlassen, hiesse soviel, als mit der Unsinnigkeit und dem Wahnwitz selber streiten wollen. Jedes Geistesgebiet hat auch sein Irrenbereich, und an der Schwelle letzterer Behausung hört zwar nicht der Schein der Wissenschaft auf, hat aber die wirkliche Wissenschaft Halt zu machen, wenn sie sich nicht selber durch Einlassung mit den Insassen oder Candidaten des Hauses compromittiren will.

183. Obwohl die eben berührten Verworrenheiten und Umnachtungen nicht die einzige Trübung und Verdunkelung sind, durch welche die strengen Begriffe vom mathematischen Mysti-

---

als die hervorstechende Art von Begabung erwiesen, durch die sich Herr Helmholtz bemerklich gemacht hat. Abhängig von irgend einer falschen oder richtigen Vorgängerschaft Anderer, hat er Selbständiges in keiner Theorie vorgebracht. Da nun dieses Niveau des Arbeitens bei ihm in allen offen zu Tage liegenden Fällen die Regel gebildet hat, so gilt der nicht blos populäre Schluss, dass, wo beispielsweise nur die höchste Wahrscheinlichkeit einer Entlehnung angezeigt, absolute Gewissheit aber der Natur der Sache nach für das allgemeine Publicum ohne Geständniss nicht zu haben ist, bessere Fähigkeiten auch in einem solchen Falle nicht im Spiele gewesen sein können, weil — sie überall sonst gemangelt haben. Vgl. übrigens die Anmerkung zu Nr. 177.

cismus und Irresein her zu leiden haben, so kann man doch nicht sagen, dass die über gewisse Seiten der Mathematik grade in unserm Jahrhundert verbreiteten Nebel wesentlich dem positiven Einfluss irgend einer bestimmten Richtung der Schulmetaphysik zuzuschreiben seien. Da sich Jacobi und Dirichlet philosophisch indifferent verhielten und der letztere vermöge seiner bessern französischen Bildung gegen metaphysische Nebelhaftigkeiten sogar eingenommen war, so konnte in Deutschland nur Gauss in Frage kommen, und auch von ihm weiss man, dass er keiner besondern Philosophie huldigte, sondern in einzelnen Richtungen, wie z. B. gegen seinen in der bizarresten und unexactesten Weise am falschen Ort mathematisirenden Facultätscollegen Herbart positive Abneigung hegte. Wenn also die Autorität von Gauss dahin gewirkt hat, die letzten logischen Grundlagen der Mathematik in der angegebenen Weise und auch bezüglich des Imaginären[1]) in einem mystischen Licht erscheinen zu lassen,

---

[1]) Vgl. hierüber Gauss' eigne Auslassung, Göttinger gelehrte Anzeigen, April 1831. Seine dort eingestreute, an sich berechtigte Erklärung gegen die Kantische Lehre von der Subjectivität des Raumes stimmt wenig zu dem mit älteren Auslassungen Kants gemeinschaftlichen Phantasma von Räumen mit mehr als drei Dimensionen, das nur die Böotier nicht sollen begreifen können. In der Construction des Imaginären ist der Ausgangspunkt bei Gauss nicht blos mystisch unklar, sondern auch in der blossen Veranschaulichung der reellen Theile ganz willkürlich. In seinem Aufsatz über Flächenabbildung (Werke Bd. IV) hatte er Art. 5 eine Zerlegung in imaginäre Factoren benutzt, aber durchaus noch nicht eine unrationelle geometrische Deutung und Construction des Imaginären angebracht. Selbst als blosses Veranschaulichungsmittel reeller Theile und Coefficienten betrachtet, würde die Darstellungsmanier von Gauss doch völlig willkürlich bleiben und grade dem nicht entsprechen, was wir Nr. 205 als die Hauptangelegenheit nachweisen. Beseitigt man nämlich auch die von Gauss nicht erfundene, sondern nur wiederholte ältere Selbsttäuschung, dass sich die sogenannte imaginäre Einheit als mittlere Proportionale zwischen einer positiven und negativen Abscisse in der Gestalt einer lothrechten Ordinate construiren lasse, sowie die sich daran anschliessende Darstellung einer Punktentfernung durch eine rechtwinklig gebrochene, aus einer reellen Abscisse und einer imaginären Ordinate bestehende Linie oder gar durch den als Construction des Complexen angesehenen Leitstrahl selbst, — entfernt man also auch alle metaphysisch phantastischen Unterstellungen, so bleibt doch nur ein äusserst unmotivirter Veranschaulichungsmodus reeller Elemente imaginärer Combinationen übrig. Es zeugte daher für den ganz subalternen Charakter der sich auf Gauss berufenden Riemannschen Arbeiten (nämlich einer Dissertation über die Functionen einer complexen Veränderlichen von 1851, neuabgedruckt Göttingen 1867, und einer auf die Abelschen

so ist diese Thatsache auch aus der mit dem religiösen Aberglauben der Person gegatteten Beschränktheit ihres allgemeineren Denkens zu erklären. Auch kann man der Mathematik und ihren Anwendungen nur Glück wünschen, dass zu den Abirrungen, die auf ihrem eignen Felde veranlasst wurden, kein bestimmender Einfluss der metaphysischen Scholastik des 19. Jahrhunderts gekommen ist. Die Hegel und Herbart sind, wenn auch nicht für alle Mathematiker oder mathematischen Schriftsteller, so doch für den Gang der Mathematik und ihrer Anwendungen, sowie für die logische Fassung der wesentlichen und am meisten streitigen Grundbegriffe völlig gleichgültig geblieben. Wo sie in dieser Beziehung gelegentlich hineingeredet haben, sind ihre Conceptionen derartig ausgefallen, dass die hervorragenderen Mathematiker sich nicht versucht finden konnten, von solchen Aufklärungen Gebrauch zu machen. Auch hing die logische Gestaltung der mathematischen Wissenschaften nicht allein von Deutschland ab, und die umfassendere Völkergemeinschaft würde immer eine gewisse Bürgschaft gegen einseitige Voreiligkeiten dieses Schlages geboten haben. Ein einziger grosser Denker, der f ü r die Philosophie und v o n

Functionen bezüglichen Aufsatzgruppe von 1857 in Bd. 54 von Crelles Journal), dass in ihnen jene Veranschaulichungsart in ihrer ganzen Willkürlichkeit autoritär hingenommen und ausgesponnen wurde. Uebrigens ist der ganze Gaussische Standpunkt bezüglich des Imaginären durch eine wirkliche und rationelle Construction des Imaginären in unsern „Neuen Grundmitteln" antiquirt und völlig überwunden. Dort wird das Imaginäre als Ausdruck einer Unmöglichkeit genommen, diese Unmöglichkeit aber dadurch geometrisch entworfen und veranschaulicht, dass an den correspondirenden möglichen Gebilden die analytisch widersprechenden Beziehungen der Vorzeichen, also die Signirungsunmöglichkeiten hervortreten. Die Beziehung geometrischer oder anderer Sachverhalte vermittelst der Rechnungsbegriffe auf eine Gleichung, die unmittelbar nicht passt, — dieses analytische Verhältniss ist das nunmehr gelöste Räthsel des Imaginären. Hieraus folgt aber auch die geometrische oder sonst sachliche Darstellbarkeit jeder imaginären Unmöglichkeit in einem sachlichen Entwurf, in welchem die sonst analytisch abstracten Grössen ihre Rolle als sachliche Grössen, in der Geometrie daher als Raumgrössen spielen. Diese kurze Formulirung des Hauptpunkts kann jedoch erst völlig verständlich werden, wenn man unsere umfassenden Aufschlüsse über das Imaginäre und Imaginative studirt. Gauss war auf dem der Wahrheit entgegengesetzten und reactionären Wege, als er in dem angeführten Artikel der Göttinger Anzeigen sich den Irrthum mit dem Negativen zum Vorbild und die Einführung eines ähnlichen Phantasma für das Imaginäre als zukunftsreichen Fortschritt in Anspruch nahm.

der Mathematik gelebt hat, ist in den Fall gekommen, mit wirklicher Sachkenntniss auf die logische Gliederung der Mathematik, sowie auf die Principien und Hauptergebnisse der rationellen Mechanik einzugehen. August Comte hat 1830 im ersten Bande seines Cours de philosophie positive die mathematischen und mechanischen Voraussetzungen aller weiteren Wissenschaft ausführlich behandelt und die letzten 200 Seiten allein der Mechanik gewidmet. Obwohl nun diese Arbeit einen wohlgeordneten Ueberblick des Gebiets gewährte, sich durch scharfe Sonderungen auszeichnete und dergestalt etwas bot, was einzig in seiner Art war und geblieben ist, so hat doch der Autor sich wesentlich darauf beschränkt, im Anschluss an Lagrange und unter Benutzung der Ueberlieferungen des Kreises der Pariser polytechnischen Schule den Stoff im Sinne einer klaren Architektonik in seiner Weise logisch zu gestalten. Bezüglich der infinitesimalen Begriffe ist er nicht über die Standpunkte Lagranges und Carnots hinausgegangen und hat sich mit der vereinigten Darlegung dieser beiden Auffassungsarten begnügt. In seiner Auseinandersetzung der Principien der Mechanik griff er wesentlich wieder auf Newtons Fassung der Axiome zurück. Seine Erklärung, dass alle Versuche, das Trägheitsprincip aus blossen Gedanken, anstatt aus der Erfahrung stammen zu lassen, „absurd“ seien, und dass es thöricht sei, das Parallelogramm der Kräfte rein analytisch erweisen zu wollen, ist für das entschiedene Gepräge seiner Ansichten bezeichnend. Einwirkungen Comtes auf die mathematischen Wissenschaften können aber insofern für uns noch nicht in Frage kommen, als seine positive Philosophie erst spät allgemeiner bekannt wurde und die Notiznahme von derselben grade in Deutschland von sehr neuem Datum ist. Uebrigens hat sich aber auch die Originalität dieses Philosophen trotz seiner vollständigen Fachkenntniss der Mathematik mehr in einer andern Richtung, nämlich in der Philosophie der Geschichte und in der universellen Auffassung des Ganzen der Wissenschaften bekundet.

Was ein allseitiges Urtheil über Comte betrifft, so gehört dies nicht hieher; in meiner Geschichte der Philosophie und in derjenigen der Nationalökonomie und des Socialismus ist der unabhängige französische Denker auf deutschem Boden zuerst eingehend, sowie von einem hinreichend universellen Standpunkt, wohl überhaupt in der Welt zuerst zulänglich, und zwar in der Einheit seiner verschiedenen Entwicklungsstadien, gewürdigt worden.

Die Hauptausstellung bezüglich des mathematischen und exacten Gebiets bleibt schliesslich diejenige, durch welche auch die Philosophen des 18. Jahrhunderts betroffen werden, dass nämlich Comte, ungeachtet seiner bessern Kenntniss des Specialfachs, ebensowenig wie Jene etwas zur Vermehrung des bestimmten Wissens beigesteuert hat. Ja nicht einmal das, was dem specifischen Philosophen am ehesten gelingen sollte, nämlich eine Zurechtrückung und endgültige Klärung von verdorbenen und mit Widersinn behafteten Begriffen ist bewerkstelligt worden, wie besonders die schwächliche oder gleichgültige Haltung gegenüber den bisherigen Vorstellungen der Mathematiker vom Unendlichkleinen und vom Imaginären bezeugt. Ganz verschwindend sind auch in der neuern Zeit, ja auch im Alterthum die Fälle nicht, dass Denker ihre Befähigung durch Auffindungen im positiven Wissen und durch wirkliche Verbesserungen wichtiger Begriffe darthaten. Wenn in der neusten Zeit Leute mit wesentlich theologischem Vorstudium, also sozusagen mit der Bildung von Pfaffen, wie die Schelling und Hegel, oder mit nicht viel mehr, wie im 18. Jahrhundert auch noch ein Kant, sich herausnahmen, die exacten Wissenschaften zurechtweisen zu wollen, dabei aber nur Unsinn oder krauses Zeug producirten, so ist das in der Ordnung, und man sucht Zurechnungsfähiges für Mathematik, Physik, Chemie u. dgl. bei der fraglichen Gilde ebensowenig wie in der Kirche. Wenn aber ein Sachkundiger, der überdies noch auf dem entgegengesetzten Standpunkt steht und exact wissenschaftliche Positivität auf seine Fahne schreibt, jedes Zeugniss dafür schuldig bleibt, dass sein Denken auch das bestimmte Wissen erweitern könne, so ist dies ein erheblicher Mangel.

Ein anderer Mangel, der am entgegengesetzten Ende der Fähigkeitsscala belegen ist, betrifft das Sachlogische. Hiefür hatte Comte insoweit keinen Sinn, als es sich um bewusste Bethätigung des allgemeinsten Denkschematismus an Totalitäten, ja überhaupt am Ganzen der Dinge und Vorgänge handelt. Solche consequente, letztinstanzliche Bethätigung der Begriffe und aller wirklich in unserer Denkausstattung vorhandenen Elemente ist keine Metaphysik oder geistige Alchymie, sowenig als etwa heutige Chemie noch bezichtigt werden kann, Alchymie zu sein. Bei Comte hat sich übrigens dieser Defect an universeller Verstandesconsequenz gerächt, indem er sein letztes Stadium mitsichbrachte, in welchem sogar die Mathematik und Astronomie von der Gefühlszerfahren-

heit mitergriffen wurden. Sieht man jedoch von jenen zwei Hauptmängeln ab, die eben auch seinen besten Arbeiten eigen sind, so kann man ohne weitere Einschränkung Befriedigung darüber empfinden, dass in Mathematik und Mechanik der Versuch einer geordneten letzten Zusammenfassung, also einer Art von System und zwar eines von gesundem Charakter, im ersten Bande des Comteschen Cursus vorgelegt worden.

Nimmt man die eben berührte, einigermaassen gesunde Erscheinung aus, so kann man behaupten, dass der Geist des achtzehnten Jahrhunderts nicht etwa blos in seiner allgemeinen philosophischen Haltung sondern auch in seiner specifischen Bekundung im Gebiet der mathematischen Wissenschaften klarer und verstandesmässiger gewesen sei, als derjenige des neunzehnten. Hat auch das, was für die zwei letzten Generationen namentlich in Deutschland Philosophie hiess, seine verunstaltenden Wirkungen im Allgemeinen nicht auf die mathematischen Wissenschaften erstrecken können, so haben doch die Abirrungen in der Mathematik und die Rückschritte, welche in der Deutlichkeit der Begriffsfassungen gemacht worden sind, mit jenen Entartungen des philosophischen Geistes eine gemeinsame Wurzel. Der restaurative Geistestypus, der am ausgeprägtesten in einem Cauchy [1]) vertreten war, ist keine Zufälligkeit gewesen und hat bei andern Persönlichkeiten, wie Gauss, seine äusserlich minder, sachlich aber noch mehr auffallenden Gegenstücke gehabt [2]). Eine gewisse logische

---

[1]) Vgl. zur richtigen Auffassung des allgemeinen geistigen Typus von Cauchy bezüglich biographischer Thatsachen und sozusagen für den ästhetischen Standpunkt die verdienstvolle und originale Arbeit Th. Wechniakofs zur anthropologischen Biographik geistiger Capacitäten unter dem Titel: Contribution etc.; seconde section des Recherches sur les Conditions anthropologiques de la Production scientifique et esthétique, Moscou 1872; eine dritte Section dieses auch bezüglich der Charakteristik anderer Mathematiker interessanten Buchs erschien Paris 1873. — Specifisch mathematische Streiflichter zur Kennzeichnung des weit überschätzten Jesuitenmathematikers, der sich verschiedentlich mit fremden Federn geschmückt hat, sowie auch gelegentlich markirte Gesammturtheile über seine Haltung, finden sich in unsern „Neuen Grundmitteln“.

[2]) Vergleicht man das Verhalten Cauchys bezüglich des Imaginären mit dem von Gauss, so erscheint Ersterer noch als ein verhältnissmässig rationalisirender Skeptiker, der manches Stück Metaphysik nicht gelten lässt, und diese mathematisch skeptische Ader in der Wissenschaft stimmt auch ganz gut zu seiner katholischen Gläubigkeit in der Religion. Er gelangte schliesslich dahin, das Imaginäre umgehen zu wollen, wie zwei Memoire, nämlich das

Trägheit, die mit dem Interesse des 18. Jahrhunderts an klaren Begriffsfassungen wirklich contrastirt, ist sichtbar genug die Mitgift der restaurativen Aera der zwei letzten Menschenalter geworden und hat auch gegenwärtig noch nicht aufgehört, ihre Schatten auf die Behandlungsart derjenigen Wissenschaften zu werfen, bei denen unbedingte Strenge und Klarheit eine Grundforderung ist.

184. In logischer Hinsicht ist der Begriff der reinen Phoronomie als einer Geometrie von vier Dimensionen sehr aufklärend, wenn auch praktisch die äusserliche Absonderung in der Behandlung keineswegs nothwendig ist. Die Phoronomie hat die apriorische Gewissheit der reinen Mathematik und begrenzt sich dadurch, dass in ihr der reale Massenbegriff keine Stelle hat. Ihre Anwendung auf die Welt der vollen Wirklichkeit vermittelt sich erst dadurch, dass sie zur eigentlichen Mechanik wird, indem sie die Massen und deren Verschiedenheit berücksichtigt. Mit diesem Schritt kommen die eigentlichen mechanischen Principien in Frage, welche sich auf das Verhalten der Materie und der sich an der letzteren äussernden Kräfte beziehen. Jedoch könnte man von dem einen zu dem andern Gebiet dadurch eine Brücke schlagen, dass man die Häufung phoronomischer Punkte, welche als Träger von Bewegungserscheinungen gedacht werden, als ideelles Analogon der Materie und ihrer Mengenverschiedenheit einführte. Trotzdem würden aber die empirischen Principien, welche das Verhalten der wirklichen Stoffe und Kräfte betreffen, sowie ausserdem auch die Constanten und die zahlenmässigen Feststellungen

---

über die algebraischen Aequivalenzen und das über die geometrischen Quantitäten (in Bd. IV seiner Exercices d'analyse et de physique mathématique, Paris 1847) deutlich zeigen. Die abseits gerathende Halbkritik, die in einer solchen verkünstelten, theils nur scheinbaren, theils aber auf gänzlich unmotivirte Begriffe gestützten Umgehungsposition verkörpert ist, erinnert daran, wie sich etwas von den bessern Tendenzen des 18. Jahrhunderts in der logisch unzulänglichen und sonst unrationalen Denkweise Cauchys verloren habe, und wie hiedurch seine, übrigens sehr breiten Auslassungen in bestimmten Richtungen einen gewissen Zug von Verstandesmässigkeit erhalten und wenigstens von den metaphysischen Hintergedanken seines deutschen Zeitgenossen Gauss freibleiben konnten. Mangel an Logik machte Cauchy in der einen Richtung abergläubisch und in der andern skeptisch, nämlich skeptisch nicht blos gegen falsche Metaphysik, sondern auch gegen die innere Consequenz der Wissenschaft, die klar gefassten Begriffen gegenüber jener künstlichen und willkürlichen Umgehungen nicht bedarf.

absoluter Wirkungsgrössen nicht zu entbehren sein und den deutlichsten Beweis liefern, dass die Mechanik eine reale Wissenschaft ist, deren Anwendung auf der Erfassung einfacher Naturthatsachen beruht.

Bei der Masse denkt man zunächst nur an gravitirende Materie; aber sowenig der Begriff der allgemeinen Materie durch die Feststellung der Wägbarkeit eingeschränkt ist, ebensowenig begrenzt sich die Mechanik durch eine so enge Vorstellung. Sind es bis jetzt auch nur hypothetische Medien, auf welche sich über den Kreis der als ponderabel erkannten Materie hinaus die mechanischen Raisonnements erstrecken, so ist diese Unvollkommenheit doch nur als provisorisch anzusehen. Der Hauptmangel liegt vorläufig in der Unbekanntschaft mit dem, was man im Aether oder in andern hypothetischen Medien, als Menge der Materie betrachten und mit den sonstigen mechanischen Massen vergleichen könnte. Wäre der Widerstand, von dem die Bahnveränderungen der Kometen Zeugniss geben [1]), wirklich auf den Aether und nicht etwa auf kleine ponderable Massen oder Massentheilchen zurückzuführen, so wäre die unmittelbare Gegenseitigkeit in der Bewegungsübertragung von der einen Art der Materie auf die andere nach Analogie der Bewegung in gravitirenden Medien sehr nahegelegt. Uebrigens ist ja aber auch die Brücke von den thermischen zu den mechanischen Erscheinungen geschlagen, und es fehlt nur an der Zerlegung der von der Wärme vorgestellten mechanischen Phänomene nach Maassgabe einer Unterscheidung der Masse des Mediums von den afficirenden Bewegungsursachen. Wenn man bei Erörterungen der elektrischen Erscheinungen von der Masse redet, so ist hiemit keineswegs der Begriff der Menge einer allgemeinen Materie gegeben, vermöge dessen man die verschiedenartigsten Kräfteerscheinungen auf einen einzigen gleichartigen Träger zu beziehen vermöchte. Die Anwendung der mechanischen Principien bleibt daher auch hier für jetzt in erhebliche Schranken gebannt, die sich nur in dem Maasse erweitern werden, in welchem man das Gleichartige in der universellen Materie erkennen und schliesslich messen lernen wird.

---

[1]) Vgl. Encke „Ueber die Existenz eines widerstehenden Mittels im Weltraum“, Berliner astronomisches Jahrbuch für 1861, S. 319 fg. — Ueber eine mögliche Art der mechanischen Behandlung nach herkömmlichen Annahmen vgl. auch Jacobi in der Theoria novi multiplicatoris § 29, Werke Bd. I, S. 205.



185. Als die ersten Anwendungen der eigentlich mechanischen Principien muss man die Behandlung der bestimmteren Probleme der Mechanik selbst und alsdann die Ausdehnung auf den erreichbaren Theil der gegebenen Naturwirklichkeit betrachten. Es sind also zunächst die einzelnen abstracteren Aufgaben und ausserdem besonders die planetarische und kosmische Mechanik, die hier die Hauptlinien der Anwendung bezeichnen können. Unter den abstracteren Aufgaben ist das Rotationsproblem hervorzuheben, zu dessen Behandlung besonders die auf die Präcession und Nutation bezüglichen Fragen angeregt haben, und welches die aus dem Gesichtspunkt der Anschaulichkeit einfachste Form der Lösungsart durch Poinsots Theorie gefunden hat. Es hat dies Problem sogar solche Begriffe den Elementen und allgemeinen Principien nähergebracht, die man herkömmlich nicht unter die principiellen Präliminarien aufnimmt, sondern mehr als Anwendungen erscheinen lässt. Hieher gehört insbesondere die Conception der drei durch den Schwerpunkt eines Körpers oder momentan aufgefassten Systems gehenden Hauptträgheitsaxen, d. h. der freien, natürlichen und permanenten Rotationsaxen. Dieser Begriff eignet sich ebenso wie der des Schwerpunkts oder momentanen Massencentrums zur Aufnahme in den Kreis der einfacheren Ausgangspunkte aller Mechanik. Ebenso ist der zugehörige Begriff der Trägheitsmomente vermöge seiner Natur am consequentesten sofort an den Massenbegriff und an diejenigen Vorstellungen anzuschliessen, die sich für die translatorische Bewegung an die hypothetische Vereinigung der ganzen Masse im Schwerpunkt knüpfen. Wo man auch die mechanischen Principien anwenden will, wird man die letzteren Grundbegriffe als eigentliche Elemente ansehen müssen, ohne deren Hülfe gar kein völlig exacter und zugleich vollständiger Ausdruck der einfachsten mechanischen Vorgänge möglich ist.

Zu den berühmtesten Specialproblemen gehört das der drei Körper, welches eine allgemeine Lösung über das gegenseitige Verhalten in Folge attractiver Kräfte verlangt. Specifisch mechanische Principien neuer Art sind bei dieser Aufgabe nicht abzusehen. Die Schwierigkeit besteht in der analytischen Anwendung der gewöhnlichen Axiome und Principien. Die Lösungen in Approximationsform für besondere Fälle beziehen sich praktisch auf die astronomischen Störungen, und alle Fortschritte in dieser Beziehung haben bis jetzt von den Wendungen und Gestaltungen

im Gebrauch der Analysis abgehangen. Wo es sich eigentlich nur um Integrationsprobleme handelt, sind die specifisch mechanischen Ausgangspunkte nicht mehr in Frage, und die Möglichkeit einer ausgedehnteren Anwendung der mechanischen Grundeinsichten nach dieser Methode setzt die Erweiterung der mathematischen Mittel voraus. Das Problem der drei Körper ist also, um es kurz zu sagen, längst derartig formulirt, dass es nur noch als ein analytisches gelten kann.

Die universalsten Gesichtspunkte der Anwendung ergeben sich, wo von der planetarischen oder gar der ganz allgemein gedachten kosmischen Mechanik die Stabilitätsvorstellungen oder die Ideen von dem mechanischen Charakter der Naturvergangenheit ins Auge gefasst werden. Was Laplace Himmelsmechanik nannte, war wesentlich nur planetarische Mechanik, und auch der Ausdruck Weltsystem muss bei ihm in einem engeren Sinne genommen werden. Die genetischen Voraussetzungen, welche gleichsam die Geschichte oder die zu einer früheren Epoche gegebenen Formen des planetarischen Mechanismus kennzeichnen sollen, und sich in der letzten Anmerkung von Laplaces Exposition du système du monde[1]) skizzirt finden, enthalten die bekannte Hypothese von einem ursprünglich gasförmigen Zustand des Sonnensystems und lassen ausser der ursprünglichen Rotation dieser Gasmasse hauptsächlich die Abkühlungen für die weiteren Gruppirungen maassgebend werden. Die Kometen werden hiebei als dem Sonnensystem fremdartig und von andern Räumen und Systemen kommend angesehen[2]). Strenge, mathematisch vermittelte Deductionen sind in Beziehung auf die fragliche Hypothese bis jetzt nicht möglich, da es keinen Weg giebt, die gegenwärtigen Oerter der Planeten aus angenommenen früheren Positionen der zerstreuten Materie abzuleiten, was, wenn es geschehen sollte, erfordern würde, das Gesetz des Gruppirungsprocesses mathematisch zu verfolgen und aus einer vorausgesetzten Gestalt des Systems eine Veränderung dieser Gestalt positiv und exact, also nicht blos in unbestimmten Zügen zu entwickeln. Die Hypothese bleibt aber nichtsdestoweniger eine unausweichliche, weil die Rückschlüsse von der gegenwärtigen Beschaffenheit und von den Spuren der Bildungshergänge keine andere Vorstellungsart erlauben.

---

[1]) Werke Bd. VI (1846) Note 7, S. 470—479.

[2]) Ibid. S. 475.

Die kosmische Mechanik bedeutet nicht blos dem Umfang, sondern auch dem Wesen der Sache nach erheblich mehr, als eine mechanische Theorie des Sonnensystems. Allein dieser gewaltige Begriff, der in seinen Rahmen das Universum aufzunehmen hat, ist thatsächlich nur mit wenigen bestimmten Vorstellungen ausgefüllt. Die Wahrnehmbarkeit des Gravitationsgesetzes in den gegenseitigen Bewegungen der Doppelsterne ist der einzig entscheidende Punkt, den man als eine in der neusten Zeit immer mehr gesicherte Ausdehnung der mechanischen Principien auf die Massen des Universums ansehen kann. Ausserdem liegt es am nächsten, eine exacte Vorstellung von den Ursachen der Formen der Fixsternsysteme und zwar zunächst der Milchstrasse nach mechanischen Principien, also durch Verbindung der Rotation mit der Gravitation zu suchen. Der Umstand, dass sich diese Formen, weit entfernt, die Kugelgestalt an sich zu tragen, im Gegentheil dem Typus einer sich einer Ebene nähernden Anordnung anbequemen, ist eine mechanische Andeutung von dem, was unter Voraussetzung der Rotation in einem gewissen Maasse und dem allgemeinen Schema nach wirklich deducirt werden kann. Laplaces unveränderliche Ebene kann in dieser Hinsicht noch eine umfassendere Bedeutung erhalten, als sie zunächst gehabt hat.

Solange man bei einem Fixsternsystem oder auch bei Gruppen derselben, ja überhanpt bei blossen Theilen oder Stücken des Universums stehen bleibt, neben denen man noch andere Systeme und Massen zur Seite lässt; — solange man also nicht die Totalität der Natur zum Gegenstand der Anwendung mechanischer Principien macht, bleiben gewisse Consequenzen unmöglich und sehr erhebliche Sätze in dieser Richtung unfruchtbar. Um nicht blos den äusserlichen Umfang, sondern auch den Gattungscharakter der Anwendungen des Mechanischen auf das Universum zu ändern, müssen die Begriffe selbst universal abgeschlossen werden. Dies ist zunächst formal möglich und zum Theil schon Thatsache, indem z. B. die mechanischen Erhaltungsprincipien auf den Inbegriff aller vorhandenen, wenn auch nicht wahrgenommenen Naturkräfte bezogen werden. Der früher erörterte Satz, dass der Schwerpunkt oder, mit andern Worten, das Massencentrum des Universums ruhen müsse, da im Natursystem alle Kräfte innere sind, und dass mithin die Trägheitsbewegung desselben, die der mathematischen Constante zu entsprechen hat, Null sein muss; — dieser Satz ist nicht der einzige, der im Hinblick auf den Inbegriff aller Natur-

massen und mechanischen Naturkräfte formulirt werden kann. Die Natur ist als Totalität, abgesehen von ihrer sonstigen Beschaffenheit, ein mechanisches System und muss, da ausser derselben nichts Mechanisches vorausgesetzt wird, die allgemeinen Eigenschaften mechanischer Systeme an sich tragen und zwar in einer principiellen Bestimmtheit, die durch den Wegfall der Voraussetzung äusserer Kräfte entsteht. Bei allen Theilsystemen können Wirkungen in Frage kommen, die von andern Systemen stammen; bei dem System aller Systeme ist dies ausgeschlossen. Dieser Uebergang vom Theil zum Ganzen hat einige Aehnlichkeit mit denjenigen mathematischen Proceduren, die eine Vielheit ins Unbeschränkte hinein umfassen, ohne dass er jedoch mit dem Begriff des stetig Unbegrenzten oder einer discreten Unendlichkeit etwas zu schaffen hätte. Ein mechanisches System kann universal umfassend, darf aber nicht unendlich gedacht werden, wenn es einen Sinn behalten und Gegenstand der Anwendung der Principien, also auch der Rechnung mit wenigstens hypothetischen Massen und Kraftgrössen bleiben soll. Die Unbeschränktheit in der Aneinanderreihung von materiellen Wirkungscentren, die für einen Punkt der Reihe auch bei unbegrenzter Summirung der Kraftwirkungen ein unterhalb einer Grenze bleibendes Resultat ergeben, bleibt allerdings zulässig und kann sogar zu den wichtigsten Einsichten über das Maass der relativen Unabhängigkeit der mechanischen Theilsysteme führen. Man kann durch diese Wendung auch dazu gelangen, sich völlig gegen die Widersinnigkeiten zu sichern, welche der Begriff einer der gewöhnlichen Vorstellung von der Unendlichkeit des Raumes entsprechenden Häufung der Massen mit sich bringt. Es darf aber hiebei nie vergessen werden, dass die vollendete Unendlichkeit unter allen Umständen ebenso widersinnig bleibt, wie die in der Wortformel einer letzten Zahl der Zahlenreihe enthaltene Unmöglichkeitsconception.

186. Der mechanische Kosmos reicht soweit, als Materie und Bewegung wahrgenommen werden können oder vorausgesetzt werden müssen. Er stellt wirklich, der alten Bedeutung des Wortes entsprechend, eine mechanische Ordnung vor, die in ihrer Art unbeschränkt alles Existirende umfasst. Das Spiel besonderer Gestaltungen im Organischen und Vitalen schliesst die Gesetze der Mechanik nicht aus, sondern ein. Ehe wir jedoch zu diesem andern äussersten Ende der Bethätigung mechanischer Principien übergehen, müssen wir noch das Verhältniss der Mechanik zur

Physik berühren. Dieses Verhältniss gestaltet sich mehr und mehr derartig, dass der rationellste Inhalt der Physik immer entschiedener als angewandte Mechanik sichtbar wird. Die Akustik ist derjenige Theil der Physik, welcher sich zuerst am nachdrücklichsten und unmittelbarsten zu einer Anschliessung an die mechanischen Principien geeignet hat. Ja er steht nach einer gewissen Seite mit sehr wesentlichen Elementen seines Inhalts noch innerhalb der herkömmlichen Abgrenzungen der Mechanik selbst; denn die Aërostatik und Aërodynamik oder überhaupt die Mechanik des Gasförmigen werden zum Umkreis der rein mechanischen Theorien gerechnet. Wenn aber die deducirende Consequenz aus mechanischen Principien in der bestimmten Form eines durch Rechnung fortschreitenden Verfahrens thatsächlich irgendwo abbrechen muss, und wenn auch die weniger bestimmte Schlussart, die auf das eigentliche Rechnen verzichtet, nicht überallhin zu reichen vermag, so ist der Grund hiefür in dem Mangel an Ausbildung zu suchen, der an sehr wesentlichen rein mechanischen Theorien noch nicht gehoben werden konnte.

Der eben angedeutete Mangel betrifft vor allen Dingen die Theorie der Bewegung in widerstehenden Mitteln. Die Thatsache, dass ein Mathematiker, nämlich Dirichlet, die gewöhnlichen Vorstellungen in diesem Gebiet in der früher angegebenen Weise in Frage stellen konnte, ist hier bezeichnend. Uebrigens hat man ja aber auch seit Newton den Widerstand der Medien hypothetisch zunächst für zwei Fälle behandelt, nämlich je nachdem derselbe als der einfachen Geschwindigkeit, oder aber als dem Quadrat derselben proportional gesetzt wurde. Diese Doppelheit der allgemein mathematischen Annahme zeigt ebenso, wie die auf das ganz Allgemeine beschränkte Vorstellung, derzufolge der Widerstand eines Mittels überhaupt als eine gänzlich unbestimmte Function der Geschwindigkeit des im Medium bewegten Körpers behandelt wird, dass eine den Erfahrungseigenschaften der gasförmig oder tropfbar flüssigen Mittel entsprechende Theorie noch erst bestimmter zu gestalten sei.

Wenn nun schon die Bewegung in widerstehenden Mitteln, die physikalisch sehr zugänglich sind und in ihrer Existenz nichts Hypothetisches haben, eine Schwierigkeit bildet, so werden die Hindernisse bei hypothetischen Medien noch steigen müssen. Ausserdem ist ja aber auch die Bewegung des Festen im Flüssigen noch das einfachste Problem, und die Beherrschung der mannich-

faltigen Combinationen, die innerhalb der verschiedenen Dichtigkeitszustände und in deren gegenseitigem Verhalten stattfinden können, eröffnet die Aussicht auf die Ueberwindung von Schwierigkeiten, deren Grösse sich nicht blos dem Umfang, sondern auch dem Gattungscharakter nach steigert. Am erfolgreichsten ist die allgemeine mechanische Theorie bis jetzt noch in der Lehre von der oscillatorischen Fortpflanzung der Bewegung gewesen. Diese Lehre umfasst alle Aggregatzustände, wenn sie auch für die gasförmigen Systeme relativ am vollkommensten ausgebildet ist. Die Fortpflanzung des Schalles in gasförmigen, tropfbar flüssigen und in festen Körpern bildet hier ein charakterisirendes Hauptbeispiel der Tragweite rein mechanischer Principien. Dieses Beispiel zeigt aber auch, wie viel Mühe es gekostet und wie lange Zeit es erfordert hat, die Theorie den Thatsachen entsprechend zu gestalten. Newtons Ergebnisse in Bezug auf die Schallgeschwindigkeit in der Luft mussten erst durch die von Laplace vorgenommene Berücksichtigung der Wärme[1]) ausgeglichen werden, und diese Berücksichtigung der Wärme hat wiederum durch die neusten Theorien über die mechanische Natur der Wärmevorgänge beleuchtet werden müssen.

Im Allgemeinen sind die Feststellungen über oscillatorische Fortpflanzung der Bewegung nichts als die Grundzüge einer Theorie der Mittheilung der mechanischen Action in beliebigen mechanischen Systemen von jedwedem Zustande der Aggregation. Die Aggregation selbst ist aber bei näherer Untersuchung ein Begriff, der Vielerlei einschliesst. Die blosse Dichtigkeit entscheidet nicht ausschliesslich, und es sind die Anordnungen und Kräftebeziehungen selbst, die in Frage kommen. Ausserdem denke man nur beispielsweise an die Krystallisationsunterschiede, durch welche nach verschiedenen Richtungen eine verschiedene Gestaltung der Mittheilung der Bewegung verursacht wird. Nichtsdestoweniger wird die Erweiterung der rein mechanischen Auffassung dadurch fortschreiten, dass die allgemeinen oscillatorischen Schemata der Bewegungsmittheilung als mechanische Specialtheorie abgesondert und vorangestellt, nicht aber im Zusammenhang mit demjenigen Stoff belassen werden, der im Gebiet der Physik den specifischen Beschaffenheiten der verschiedenen Medien entsprechen mag.

Offenbar hängen die fraglichen Fortschritte davon ab, dass

---

[1]) Mécanique céleste, Bd. V der Werke (1846) Buch XII, Cap. 3.

zunächst die Hydrodynamik im weitesten Sinne des Worts, also einschliesslich der Mechanik des Gasförmigen, erhebliche Erweiterungen erfährt. Erinnert man sich aber, dass die Gestalt des dreiaxigen Ellipsoids als allgemeine Gleichgewichtsform für eine Flüssigkeitsmasse unter der denkbar einfachsten Voraussetzung erst von Jacobi constatirt, und dass die Grundform des eigentlich dynamischen Verhaltens einer solchen Masse erst noch zuletzt von Dirichlet hingestellt worden ist, so wird man ermessen, dass eine allgemeine mechanische Theorie, welche jeden Körper als Medium zu behandeln und die Entwicklung, also nicht blos die Uebertragung der an seinen Theilen wirkenden Bewegungsaffectionen auch nur in bestimmteren Grundzügen exact und mechanisch deducirend übersehbar macht, schon zu den sehr weit vorgreifenden Conceptionen gehört. Trotzdem wird um der Allgemeinheit der Vorstellungsart willen nicht darauf zu verzichten sein, diese reine Form der Anwendungsgestaltung mechanischer Principien kenntlich und so die Antriebe sichtbar zu machen, von denen eine erweiternde Vorschiebung der zeitweiligen Schranken des der angewandten Mechanik zuzuweisenden Wissens zu gewärtigen ist.

Wie schwierig die Flüssigkeitsmechanik in rationell ableitender Form sogar für die bekanntesten Medien werden müsse, sobald man die Bewegung der einzelnen Theilchen schliessend und rechnend verfolgen will, zeigt das Beispiel der Wasserwellen, deren experimentelle Untersuchung durch die Brüder Weber[1]) einen Einblick in das verstattet, was rationell mechanisch erforderlich sein würde, um die beobachteten Theilchenbewegungen als Nothwendigkeiten zu erkennen. Die Molecularmechanik, wie sie zunächst blos mathematisch verstanden wird, schliesst zwar durchaus nicht wesentlich eine bestimmtere Kenntniss der atomistischen oder molecularen Constitution der Medien und Körper ein; aber sie setzt voraus, dass man die Theilchen als bei der Bewegung zusammenverbleibende und auf diese Weise selbständige Massen denken könne. Nun besteht die Schwierigkeit der Anwendung der mechanischen Principien auf die Theilchenbewegung hauptsächlich in den Hindernissen, die sich der völlig selbständigen Verfolgung der Bahn eines Theilchens entgegenstellen. Schon die Abgrenzung des Begriffs eines selbständig bewegten Theilchens

---

[1]) E. H. und W. Weber, Wellenlehre, Leipzig 1825.

erfordert hier einige Umständlichkeiten; denn es ist da, wo man sich auf keine hypothetische Constitution des Mediums berufen will, doch allermindestens erforderlich, das Theilchen als den Träger einer alle seine Untertheilchen mit unbegrenzter Annäherung gleichmässig afficirenden Bewegung zu denken, wobei innerhalb des Theilchens Affectionen zweiter Ordnung zugelassen sind. So wird dem mathematischen Calcül entsprochen, und es ist für die Strenge der Vorstellung nicht einmal anzunehmen, dass die Unbegrenztheit an sich vorhanden sei. Die Annäherung daran muss nur eine solche sein, dass man die Effecte zweiter Ordnung im Verhältniss zu der Gesammtbewegung des zusammengefassten Massentheilchens als quantitativ unerheblich vernachlässigen kann. Die differentiellen Methoden werden alsdann allerdings zu Verfahrungsarten von einem bestimmten Grade der Approximation; aber diese Annäherungen sind solche, deren Grenzen man bemessen kann, und die daher völlig sichere Schlüsse auf ein Gesammtergebniss liefern. Von dieser Seite steht also den Anwendungen der mechanischen Principien, auch abgesehen von der Constitution der verschiedenen Stoffe, nur die Schwierigkeit einer solchen mathematischen Bearbeitung entgegen, die soweit reicht, dass eine Bestätigung durch die ebenfalls nicht leicht zu gewinnenden Beobachtungen in jedem Stadium der Entwicklung möglich bleibt.

Bei weiterem Eindringen wird sich jedoch stets zeigen, dass Theilchen, wie sie von den Mechanikern und Physikern herkömmlich angenommen werden, recht eigentlich nur mathematische Abtheilungen der Körper sind. Diese blos mechanischen oder physikalischen Molecüle können aber nur als vorläufige Surrogate des chemisch physikalischen Sachverhalts gelten. Wo man in einer Weise vorwärts will, die zu intimeren Beziehungen mit den Erfahrungsthatsachen führt, muss die chemisch atomistische Constitution nach Maassgabe der modernsten Theorie in Anschlag gebracht werden. Hier sind die einatomigen Molecüle und einatomigen Zustände der Stoffe von den mehratomigen zu unterscheiden und es ist keine mechanische Behandlung, die etwas ergiebt, anders möglich, als durch die chemische Individualisirung des Begriffs von selbständigen Theilchen verschiedener Ordnung, d. h. irgend einer Art von Einfachheit oder Zusammengesetztheit. In unsern „Neuen Grundgesetzen, zweite Folge“ ist diese Methode mit neuen Mitteln ausgestattet worden und hat zu Ergebnissen geführt, deren Charakter weiterhin zu kennzeichnen sein wird.

Eine zweite Bemerkung zur Theilchenbewegung ist rücksichtlich der Beziehung zum Oscillationsbegriff erforderlich. Die Oscillationen werden herkömmlich rein mathematisch auf kleine Massenabtheilungen der Medien oder überhaupt der Körper bezogen, und die Schichten, die man sich dabei vorstellt, sind von willkürlicher Grösse oder, was dasselbe sagt, Kleinheit. Gesetzt aber auch, man stellte bei Schwingungen individuelle Theilchen als oscillirend vor, so wäre hiemit das mechanisch Letzte und Einfachste noch nicht erreicht. Jede Schwingung als solche ist in Beziehung auf deren Entstehungsursachen etwas Zusammengesetztes. Es gehört dazu die Entstehung einer eignen Geschwindigkeit des bewegten Körpers oder Theilchens und alsdann eine Kraft, gegen welche sich diese Geschwindigkeit erschöpft, so dass eine Umkehr eintreten muss. Dies lehrt jedes Pendel; bei den Oscillationen scheint man aber meist zu vergessen, dass sie bereits zusammengesetzte Bewegungsformen sind. Eine letztinstanzliche motorische Theorie der Körper, also auch aller Aggregatzustände und Medien, dürfte den Oscillationsbegriff nicht als Letztes anerkennen, sondern müsste auf Atome, Atomgruppen, Kräfte und erzeugte Bewegungsgrössen zurückgehen.

187. Da die oscillatorische Bewegung die mechanische Grundform aller gegenseitigen Theilchenbeziehungen bildet, die gewöhnlich als Störungen eines stabilen Gleichgewichtszustandes aufgefasst werden, und da die Verfahrungsarten der Natur in der materiellen Uebertragung der mechanischen Wirkungen sich schliesslich immer auf kleine Schwingungen zurückführen lassen, so muss hier noch an ein berühmtes Specialproblem erinnert werden, welches der Ausgangspunkt für eine wichtige Vorstellungsart über die Zusammensetzung der Vibrationen geworden ist. Indem Daniel Bernoulli in seiner Abhandlung über die Mischung und Coexistenz einfacher Schwingungen[1]) die allgemeinern Consequenzen des von Taylor in Angriff genommenen Problems der vibrirenden Saiten zog und hiebei von den Richtungen der d'Alembertschen und Eulerschen Versuche abstrahirte, gelangte er zu einer Idee, welche besonders durch die neuste Gestaltung der Akustik wieder in den Vordergrund gebracht worden ist.

---

[1]) Sur le mélange de plusieurs espèces de vibrations simples isochrones qui peuvent coexister dans un même système de corps; Histoire de l'académie de Berlin, für 1753.

Er stellte diese Idee ganz allgemein als einen Satz hin, der rein mechanisch und abgesehen von allen Anwendungen für jedes System von Körpern gelte, die unter wechselseitiger Einwirkung oscilliren. Am Schluss seiner Arbeit[1]) erachtete er die neue Wahrheit der mechanischen Physik als dahin festgestellt: „dass in jedem System die gegenseitigen Bewegungen der Körper immer eine Mischung von einfachen, regelmässigen und permanenten Schwingungen verschiedener Arten . . . . sind."

Diese sogenannte Coexistenz der kleinen Schwingungen erschien einem Lagrange[2]) nicht als ein in allen Beziehungen geklärter Gedanke, und es möchte vielleicht nur die spätere mathematische Ergänzung der analytischen Auffassungsformen der fraglichen Beziehungen durch Fourier[3]) gewesen sein, was in Verbindung mit der Richtung, welche die zugehörigen akustischen Experimente und die Analyse des Klanges seit den Anregungen Georg Ohms[4]) genommen haben, dazu geführt hat, dass nicht blos der unleugbare Kern der Bernoullischen Idee, sondern auch die damit bisher verbundenen, ursprünglich mindestens zweideutig gefasst gewesenen Vorstellungen als Grundlagen des physikalischen Raisonnements gelten.

Weit annehmbarer würde sich die hochwichtige Lehre von der Zusammensetzung der einfachen Schwingungen gestalten,

[1]) Ibid. Art. 18.

[2]) Méc. anal. Bd. I (1811) Dynamik Sect. VI, Art. 47 und 59. — Vgl. hiezu auch noch die kurze Geschichte des Problems der schwingenden Saiten in Lagranges „Recherches sur la nature et la propagation du son", zuerst in den Miscellanea Taurinensia, Bd. I (1759); auch in Oeuvres de Lagrange, Bd. I (1867) Art. 11 fg. (S. 61 fg.).

[3]) In der Théorie analytique de la chaleur, Paris 1822; siehe besonders Art. 230, wo die Erfüllung der Bernoullischen Voraussetzung der Entwickelbarkeit einer Function in eine Reihe von Sinus und Cosinus vielfacher Bögen als Princip der strengen und vollständigen Lösung des Problems markirt wird. — Spuren der Fourierschen Behandlungsart der kleinen Schwingungen finden sich übrigens schon in seinem Mémoire sur la statique etc. Journal de l'école polytechnique, tome II (an VI).

[4]) In seiner durch die Seebeckschen Versuche veranlassten Abhandlung „Ueber die Definition des Tones", Poggendorfs Annalen, Bd. 59 (1843) und Bd. 62 (1844). Vgl. in dem ersteren Haupttheil der Abh. besonders Nr. 4 (Bd. 59) S. 519, wo die Benutzung des Fourierschen Satzes dargelegt wird. Die G. Ohmschen Gedanken und Arbeiten bezüglich dessen, was man jetzt Klangfarbe nennt, sind die Quelle von dem, was in Herrn Helmholtz' „Lehre von den Tonempfindungen" in breiterer Darstellung und experimenteller Ausführung wiedergegeben ist.

wenn man sich in Anlehnung an eine strenge Fassung der infinitesimalen Begriffe dazu herbeiliesse, alle Consequenzen der einfachen Wahrheit zu ziehen, dass ein selbständiges materielles Theilchen stets nur eine einzige Bahn beschreiben kann. Die Coexistenz der kleinen Schwingungen kann hienach zunächst keine andere Bedeutung haben als das Zusammenbestehen von Bewegungen überhaupt. Der Gedanke einer Zusammensetzung selbständig vorhandener Bewegungen, von denen einunddasselbe Theilchen afficirt wird, kann, ganz abgesehen von dem Specialfall der kleinen Schwingungen, schon rein principiell und im Hinblick auf das einfachste Schema der phoronomischen Combination und der zugehörigen Kräftebeziehung nur dann völlig exact ausfallen, wenn man nicht die Bewegungserscheinungen, sondern die ihnen vorangehenden Antriebe als Gegenstand der realen Composition vorstellt. Hiezu kommt alsdann die Möglichkeit, eine einzige und einheitliche Bewegungserscheinung durch den blossen Act der Auffassung zu zerlegen, indem man z. B. nur das an ihr ins Auge fasst, was einer bestimmten Coordinate oder überhaupt einem besondern Gesichtspunkt entspricht. Es sind alsdann nicht zugleich mehrfache Bewegungserscheinungen vorhanden, sondern einundderselbe reale Vorgang, der auf der Zusammensetzung der Antriebe zur Bewegung beruht, und dem nur eine einzige an sich vorhandene oder, mit andern Worten, eine auf den allgemeinen Raum und das universelle System von mechanischen Oertern bezogene Bahn entspricht, lässt sich vermöge einer höchst interessanten Abstractionskraft, die in unsern räumlichen Vorstellungen bethätigt werden kann, auch in irgend einem seiner natürlichen Bestandtheile als besondere Bewegungserscheinung sichtbar machen.

Durch diese Art von Uebersetzung der realen Bewegungsantriebe in einseitige Constructionen von Bewegungserscheinungen kann die Täuschung veranlasst werden, als wenn die partiellen Bewegungsphänomene nebeneinander und gleichzeitig in verschiedenen Bahnen zur Existenz gelangten. Der Widersinn, der das Ergebniss dieser Täuschung ist, kann jedoch nicht eintreten, solange man sich bewusst bleibt, dass jene Trennung, auf welcher die besondere Partialvorstellung beruht, auf eine Theilauffassung und Theilconstruction des realen Gesammtvorgangs zurückzuführen ist. Bei der ausserordentlichen Wichtigkeit, welche die Klarstellung der angedeuteten Unterschiede für die Auffassung der Naturmechanik hat, erinnere man sich auch hier jener phänome-

nalen Methode, deren sich Huyghens zur Erweisung der Stossgesetze bediente, und für deren allgemeine Bedeutung wir bereits früher (Nr. 70 fg.) die Aufmerksamkeit der tiefer Nachdenkenden in Anspruch genommen haben. In der hier fraglichen Anwendung jener Gesichtspunkte handelt es sich allerdings nicht vorzugsweise um Scheinbewegungen, sondern um natürliche Absonderungen und Gruppirungen partieller Bewegungserscheinungen, für welche die Möglichkeit einer getrennten Auffassung auch natürliche und nicht blos künstliche Gründe hat und sogar in der allgemeinen Sinneswahrnehmung der physikalischen Vorgänge zur Nothwendigkeit wird. Beseitigt man auf dem eben angegebenen Wege die Unzuträglichkeiten, welche mit der gewöhnlichen vagen Conception des Zusammenbestehens mehrerer Bewegungen und speciell mit der unzulänglichen Rechenschaft über die sogenannte Coexistenz der kleinen Schwingungen verbunden sind, so gelangt die von Daniel Bernoulli vorgenommene Zerlegung zu dem ihr gebührenden Recht, und die rationelle Physik hat Ursache, gleich der allgemeinen Mechanik selbst, die Erweiterung ihrer Einsichten und die Lösung der schwierigsten Probleme auf einem Wege zu suchen, auf welchem die Analogien der in der Theorie der kleinen Schwingungen gebrauchten Wendungen und Verfahrungsarten nicht zu vernachlässigen sein dürften. Es möchten jedoch nicht eigentliche Approximationen, sondern systematische Deckungen der principiellen und einfachen Vorgänge der Naturmechanik sein, in denen man am ehesten eine umfassendere und für die Anwendungen bequemere Behandlung der mechanischen Probleme zu suchen haben würde, falls man überhaupt, wie dies Dirichlet der Sage nach angestrebt haben soll, die Consequenzen der fraglichen Entwicklung seit Daniel Bernoulli und der Fourierschen mathematischen Ergänzung zu verfolgen gewillt wäre.

Zur vorangehenden Auffassung, in welcher ein Bild des geschichtlichen Bestandes der Sache skizzirt ist, sei bemerkt, dass es wesentlich ist, das rein Analytische in der Angelegenheit von dessen sachlicher Auslegung scharf zu trennen. In ersterer Hinsicht können im Hauptergebniss keine Bedenken obwalten; in der andern Hinsicht darf aber nie gegen den klaren Satz verstossen werden, dass Bewegungen entweder selbständig nebeneinander vorhanden sind, oder dass sie oder vielmehr ihre Antriebe sich, wie im Parallelogramm der Kräfte, vereinigt finden. Die Einmischung von Physiologie und blos subjectiven Vorgängen

ist als ungehörig und als eine schon vom 17. Jahrhundert her datirende subjectivistisch philosophische Tradition am besten wieder ganz auszumerzen. Diese unpassenden Wendungen sind mit der Huyghensschen Methode nicht einerlei und gehören nicht dahin, wo es sich um allgemein Mechanisches und Physikalisches oder überhaupt um sonstige absolut objective Angelegenheiten handelt, deren Charakter an sich selbst, also unabhängig davon zu bestimmen ist, ob er in ein Bewusstsein eintrete oder nicht.

Was aber die vorher angedeutete Verwerthung jedweder Theorie kleiner Schwingungen in einem allgemeineren mechanischen Sinne betrifft, so kann diese eine Bedeutung haben, der theilweise schon von Lagrange mit seiner stufenweisen Annäherungsmethode in der Analytischen Mechanik entsprochen ist. Eine Weiterführung dieser Methode oder auch nur eine specielle Benützung derselben mag Epigonenmathematikern vorgeschwebt haben, und aus vertraulichen mündlichen Aeusserungen dieser an andere, die noch weniger verstanden und sie daher missverstanden, mag sich jene Sage herleiten, wonach der Professor Dirichlet für die mechanischen Probleme eine allgemeine stufenweise Annäherungsmethode in seinem Kopfe besessen habe, die aber mit ihm gestorben sei. Auf nähere Ueberlegungen hin ist es mir so gut wie zur Gewissheit geworden, dass er nichts besessen und auch nicht so etwas behauptet, sondern nur von Analogien jener allgemeinen mechanischen Methode gesprochen habe, die von Lagrange aufgestellt und dann auf den Specialfall der kleinen Schwingungen angewendet worden ist.

188. Zu denjenigen Ausdehnungen, durch welche die mechanischen Principien in ein zunächst ungleichartig erscheinendes Gebiet übertragen werden, gehört ausser der früher als epochemachend dargelegten und erörterten Umgestaltung der Wärmetheorie mehr und mehr die Form, welche die Elektrodynamik theils erhalten hat, theils annehmen könnte. Was seit Ampère in dieser Beziehung geschehen ist, knüpft sich besonders an Arbeiten von Wilhelm Weber[1]), die in ihren späteren Formulirungen[2])

---

[1]) Elektrodynamische Maassbestimmungen, Leipzig 1846, 2. Abdruck 1867; in kürzerer Gestalt in einem gleichnamigen Aufsatz in Poggendorfs Annalen, Bd. 73 (1848) S. 193 fg.

[2]) Im Artikel W. Webers: „Ueber einen einfachen Ausspruch des allgemeinen Grundgesetzes der elektrischen Wirkung“, ibid. Bd. 136 (1869) S. 485 fg.

zu mancherlei Gegenvariationen desselben Thema Veranlassung gegeben haben, aber noch immer als der einzige solide Kern dastehen. Das Eigenthümliche dieses Anwendungsgebiets besteht darin, dass die gegenseitige Einwirkung elektrischer Theilchen ausser von ihrer jedesmaligen Lage und Entfernung auch noch von den vorhandenen Geschwindigkeiten abhängig gedacht wird. Die Ausführung der Vorstellungen über die Potentialfunction, welche Green schon in seinem 1828 veröffentlichten Essay[1]) speciell für das Gebiet der Elektricität behandelte, also namentlich die Sätze, welche Gauss und Spätere ganz allgemein in Beziehung auf die im umgekehrten Quadrat der Entfernung wirkenden Kräfte für eine gewisse Art von Wirkungsgrössen nachformulirt haben, — diese Hervorkehrung bestimmter functionaler Formen der Kräfteverhältnisse hat etwas dazu beigetragen, den Ideen über die mathematische Fassung der elektrodynamischen Wirkungsgrössen und Wirkungsformen einen einigermaassen mechanischen Typus zu verschaffen.

Im Hinblick auf die bisherigen Resultate, die man für die Vorstellungen der ausser der Gravitation vorhandenen physikalischen Anziehungs- und Abstossungswirkungen freier Massentheilchen gewonnen hat, ist das Gesetz der im umgekehrten quadratischen Verhältniss der Entfernung stehenden Kraft als ein Element aller gegenseitigen, aus der Ferne erfolgenden Actionen anzusehen. Was zu dieser Grundform noch mit Rücksicht auf vorhandene Geschwindigkeiten hinzutrete, oder was mit Rücksicht auf eine Fortpflanzungszeit schon in den ersten Entwicklungen der Fundamentalbeziehungen vorauszusetzen sei, berührt den allgemein mechanischen Sachverhalt nicht derartig, dass der Hauptinhalt der Gesetze durch Verallgemeinerungen oder Vervollständigungen dieser Art leiden könnte. Was also wirklich bei den neuen Anwendungen und bei den Rückwirkungen derselben auf die bethätigten Principien zunächst eine Frage bleiben kann, bezieht sich nicht auf die Geltung der Schemata der Kraftwirkungen, wie sie bisher anerkannt gewesen sind, sondern auf die Modificationen und verallgemeinerten Gestalten, die mit der bisherigen Erfah-

und „Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere über das Princip der Erhaltung der Energie", Abh. der Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, Bd. X (1871).

[1]) Abgedruckt in G. Green, Mathematical Papers, London 1871.

rung vollkommen verträglich sein würden, aber für die früheren Vorstellungs- und Ableitungsarten gleichgültig geblieben sein könnten.

Nicht unbemerkt darf die Thatsache bleiben, dass die vorher erwähnte Formulirung des elektrodynamischen Wirkungsmodus durch W. Weber eine Zerlegung eintreten lässt, vermöge deren das, was man das elektrostatische Potential nennt, zu dem von der vorhandenen Geschwindigkeit herrührenden Theil des allgemeineren Ausdrucks in einer Art Complementarbeziehung steht. Dieses Verhältniss hat eine allgemeinere, mechanisch principielle Seite, indem es mit den Vorstellungen zusammentrifft, welche zwischen der statischen Beziehung und dem Bewegungseffect eine gegenseitige Aequivalenz voraussetzen. Es sind also die Erhaltungs- und Verwandlungsvorstellungen, welche den neusten Ideen entsprechen, auch hier einer Anwendung fähig. In Bezug auf die letzten Ableitungen lässt zwar die Webersche Potentialformel, welche sein modificirtes Anziehungsprincip am einfachsten in zwei Gliedern ausdrückt, sowie deren Construction bei ihm aus zwei angenommenen elektrischen Grundgesetzen, noch einige Klärung zu wünschen übrig; aber die Surrogate und modificirten Nachahmungen, durch die man das Urbild in Schatten zu stellen beflissen gewesen ist, sind, obwohl sie in den Lehrbüchern den breitesten Platz einnehmen, in unserer Schrift keiner besondern Erwähnung werth.

Eine kosmische Mechanik müsste nach den Aussichten, die sich für die Bethätigung mechanischer Principien in der specifischen Physik eröffnen, eigentlich zu dem Begriff einer kosmisch mechanischen Physik oder kosmisch physikalischen Mechanik erweitert werden. Auch reichen in der That die neuern Gesichtspunkte schon in nicht unerheblicher Weise an diese Idee. Es sei nur an die Meteortheorie der Sonnenwärme erinnert, die von J. R. Mayer[1]) aufgestellt worden ist, und vermöge deren die mechanische Action der kleinen im Bereich des Sonnensystems zerstreuten und schliesslich auf die Sonne stürzenden Massen in Gestalt der bei dem Stoss erfolgenden, die Verbrennungseffecte übersteigenden Wärmeentwicklung für die fortwährend verlorne Wärme einen Ersatz beschaffen soll. Die Annahme dieses kosmischen

---

[1]) Beiträge zur Dynamik des Himmels, 1848, abgedruckt in der „Mechanik der Wärme“, Stuttgart 1867.



Hergangs, durch welchen die Wärmeproduction der Sonne ohne definitiven Verlust aufrecht erhalten gedacht wird, ist echt mechanisch; denn es ist nur die mechanische Wirkungsgrösse oder, analytisch geredet, die lebendige Kraft, deren Verbrauch oder vielmehr Fortpflanzung in der einen Richtung als durch eine entsprechende Zuführung von der andern Seite ausgeglichen vorgestellt wird. Der kosmische Mechanismus, den man bisher nur aus dem Gesichtspunkt der Gravitation kannte, ist hiedurch auch in thermischer Beziehung etwas verständlicher ins Auge gefasst worden. Der Werth dieses neuen Mayerschen Gesichtpunkts besteht daher wesentlich in der Zurückführung kosmischer Wärme auf eine grössere kosmisch mechanische Vereinigung von Körpern, die vorher nicht vorhanden war. Die Annäherung der Materie durch irgend welche Kräfte und infolge dessen eine etwaige Wärmeerzeugung durch Verdichtung ist eine Vorstellung, die durch Nachahmung und Verallgemeinerung aus der Mayerschen entstanden, aber an Einfachheit und Klarheit, sowie überhaupt an mechanischem Charakter weit hinter dieser zurückgeblieben ist. Uebrigens vergleiche man zur Kritik der ganzen Fragestellung das früher am Ende von Nr. 178 Gesagte.

Sichtlich streben alle Theile der mechanischen Physik dahin, einander zu unterstützen, und seitdem das Licht durch die neue Wissenschaft der Spectralanalyse zum Erkenntnissmittel von chemischen Verhältnissen geworden ist und über die Hergänge und Thatsachen auf der Sonne erhebliche Aufschlüsse ertheilt, dürfte der Gedanke naheliegen, die eigentliche Mechanik auch in dieser Richtung ernstlich auszudehnen[1]. Der Zusammenhang der verschiedenen physikalischen, ja chemischen Kräfte, die sämmtlich einen mechanischen Grundcharakter haben und in ihrer Bethätigung eine gewisse mechanische Kraftmenge repräsentiren,

---

[1]) Die Aufstellung, derzufolge das Absorptionsvermögen und das Emissionsvermögen für Wärme und Licht bei allen Körpern unter derselben Temperatur gleich ist, erinnert an nicht unwesentliche Beziehungen zur Möglichkeit einer rein mechanischen Anschauungsweise. Die fragliche Voraussetzung wurde, was sehr nahe lag, von Kirchhoff auf jede Strahlengattung ausgedehnt; siehe hierüber G. Kirchhoff „Ueber das Verhältniss zwischen dem Emissionsvermögen und dem Absorptionsvermögen der Körper für Wärme und Licht" in Poggendorfs Annalen, Bd. 109 (1860) S. 275. Ueber eine Anwendung jenes Satzes vgl. auch Kirchhoff „Untersuchungen über das Sonnenspectrum" in den Abhandlungen der Berliner Akademie für 1861, S. 77.

muss hier die Brücke zu neuen Anwendungsergebnissen bilden. Die Ausführbarkeit dieser Anwendung wird von der Gewinnung sicherer mechanischer Aequivalenzen für alle Bethätigungsformen und ganz besonders von der Annäherung der Mechanik des Wägbaren an die Mechanik der noch mehr oder minder unbestimmt vorgestellten Medien und Agentien abhängen.

189. Alles ist im letzten materiellen Grunde Mechanismus, was es auch noch übrigens sein möge. Trotzdem ist die Physik, die sich doch am nächsten an die Mechanik anschliesst, noch ziemlich entfernt davon, auch nur in den Hauptausgangspunkten auf mechanische Principien zurückgeführt zu sein. Ja eine vollständige Auflösung alles Physikalischen in das rein Mechanische ist nicht abzusehen. Man bedarf meistens besonderer Ausgangspunkte, die nicht rein mechanisch sind und wird deren auch fernerhin bedürfen. Mit den blossen Begriffen von Zeit, Raum, Geschwindigkeit und beschleunigender Kraft kann man zwar schliesslich in Alles eindringen, soweit Untersuchung und Zerlegung nicht zu umständlich werden; indessen man erschöpft mit diesen vier Ausgangsbegriffen der Mechanik nicht alle physikalische, geschweige alle sonstige Wirklichkeit.

Jedoch auch abgesehen von der allgemeinen Frage, wie weit die Physik specifisch eigenthümlicher Ausgangspunkte nothwendig bedürfe, wird auch in denjenigen Lehren, in denen die Auflösung in das rein Mechanische näherliegt, heute thatsächlich meistens noch eine andere Behandlungsart platzgreifen müssen. Man wird nämlich Zwischen- oder Uebergangsprincipien einzuführen haben, in denen sich rein Mechanisches mit etwas Anderartigem zusammensetzt; denn andernfalls würde man gewisse Aufgaben nicht bemeistern und mit der Rechnung nicht tief genug eindringen können.

Beispiele für solche zusammengesetzte Zwischenprincipien und für das, was man mit ihnen ausrichten kann, enthalten unsere Neuen Grundgesetze zur Physik und Chemie und zwar schon in ihrer ersten Folge von 1878, aber wegen des weiteren Vordringens noch sichtbarer in ihrer Fortsetzung von 1886. Dahin gehört in erster Linie unser ganz allgemeines Gesetz des Zwischenvolumens, dessen Consequenzen bis zu neuen Aufschlüssen über die chemische Atomigkeit geführt haben. Bei letzteren leistete eine von uns entworfene thermostatische Grundgleichung, in der wir zum ersten Mal die Molecülzahl berücksichtigten, entscheidende Dienste. Ein

anderes wichtiges Beispiel ist das von meinem Sohn Ulrich aufgefundene Gesetz der Partialvolumina, welches ebenfalls nicht auf lauter rein mechanischen Vorstellungen beruht, aber die bisherige, seit Dalton fortgepflanzte falsche Idee von Partialdrucken, die in einem Gasgemisch statthaben sollen, aus der Wissenschaft entfernt. Die angeführten Gesetze kommen darin überein, dass sie ausser den sichtlich mechanischen Begriffen noch andere enthalten, für die eine zuverlässige mechanische Charakteristik noch fehlt. Unter letzteren Begriffen zeichnet sich besonders derjenige der Temperatur aus; denn bisher ist es noch nicht gelungen, genügend nachzuweisen, wie sie durch eine rein mechanische Grösse zu decken sei, die sich in der Rechnung brauchen lässt, in den Folgerungen bewährt und zu neuen Aufschlüssen führt. Wenigstens kann das Spielwerk sogenannter kinetischer Speculationen und entsprechender billiger Hypothesen nicht für das gelten, was hinsichtlich einer mechanischen Temperaturdefinition die besonnene Forschung zu fordern hat. Bei diesem Stande des Temperaturbegriffs hat auch das ebenfalls von Ulrich Dühring aufgefundene Gesetz der correspondirenden Siedetemperaturen diejenige physikalisch rationelle Fassung, die es unter den gegenwärtigen Umständen erhalten konnte, und die Versuche Anderer, es durch ableitbare Surrogate zu ersetzen, sind sämmtlich recht ungediegen ausgefallen. Ueberhaupt ist es für die Wissenschaft heilsamer, bei unaufgelösten Zwischenbegriffen stehen zu bleiben, als mit leichtfertigen Annahmen fruchtlos zu spielen. Wir wenigstens, d. h. mein Sohn und ich, haben durch die Entwicklung der „Neuen Grundgesetze“ mit der That bewiesen, dass man durch richtig gewählte Zwischenprincipien weiter gelangt, als wenn man von vornherein, wir sagen nicht die reine Mechanik, sondern nur den Schein davon cultivirt.

Sicherlich sind grade wir die Letzten, die irgendwo auf rein mechanische Ableitungen verzichten. Wenn wir es daher in einem gewissen Maass in physikalisch chemischen Forschungen gethan haben, so hat der Grund im Sachverhalt selber und in den zur Zeit vorhandenen wissenschaftlichen Möglichkeiten gelegen. Grade mit dem theilweisen Verzicht ist zu einem andern Theil eine entschiedene Vorschiebung der mechanischen Gesichtspunkte verbunden gewesen. Das grundsätzliche Vertrauen also, die Mechanik überall hin auszudehnen, wird durch den Gebrauch von gemischten Zwischenprincipien durchaus nicht betroffen.

190. Hat man sich einmal von dem Gedanken befreit, als wenn die Anwendung der mechanischen Principien durch die besondere Beschaffenheit des materiellen Gegenstandes ausgeschlossen werden könnte, so übersieht man sofort, wie auch das Organische und das Vitale für die mechanische Auffassung keine Schranke bilden können. Die Action der organischen Gestaltung im Aufbau der Pflanze arbeitet mit mechanischem Kraftmaterial und bethätigt sich gleichsam in dem Medium der allgemeinen mechanischen Naturvorgänge. Analog verhält es sich mit der vitalen Plastik in der Gestaltung der Verhältnisse des animalen Körpers, und wir sind hiemit an dem andern äussersten Ende der Anwendung mechanischer Principien angelangt. Seit Borelli[1]) ist die Aufmerksamkeit auf das rein mechanisch Gesetzliche in den animalen Bewegungen mit der Entwicklung der Mechanik selbst schliesslich immer mehr gesteigert und auch in neuerer Zeit in verschiedenen Richtungen fruchtbar geworden. Ein zugleich die erheblichen Grundlagen für eine bestimmte Richtung schaffendes und im Allgemeinen auch für das weitere Anwendungsgebiet dieser Gattung höchst lehrreiches und kennzeichnendes Beispiel ist eine Arbeit der Brüder Wilhelm und Eduard Weber[2]), in welcher die rein mechanischen Voraussetzungen und Umstände im Gebrauch des menschlichen Gehapparats experimentell sichtbar gemacht und rationell nach Möglichkeit auf die mechanischen Principien zurückgeführt werden. Hier ist es nicht etwa blos das wie ein Pendel schwingende Bein, was einen typischen Fall für die mechanischen Wirkungsvoraussetzungen liefert, sondern weit mehr muss das Analogon des Princips des geringsten Kraftaufwandes lehren, dass die im Körper thätigen Ursachen des ordnungsmässigen Gebrauchs der Gehwerkzeuge und der natürlichen Einrichtung derselben zunächst ebenso zu betrachten seien, als wenn es sich um einen Vorgang der unorganischen Mechanik handelte[3]). Das erwähnte Princip braucht auch in dieser Anwendung nicht als Finalgesetz

---

[1]) De motu animalium, 1685, neue Aufl. Neapel 1734. Die iatromechanische Richtung der damaligen Zeit entsprach der Begründung der Dynamik und Physik. Sie förderte die Physiologie am entschiedensten, und ihre Analogie mit dem heutigen Streben der rationellen Naturwissenschaft nach mechanischen Resultaten ist für die tiefere Untersuchung nicht zu verkennen.

[2]) Mechanik der menschlichen Gehwerkzeuge, Göttingen 1836.

[3]) Vgl. das eben angeführte Werk, Vorrede S. VI, über das Princip „der geringsten Muskelanstrengung“; dann über die Beinschwingungen § 7, § 100.

gedeutet zu werden, sondern kann, ganz wie in allen andern Fällen, seinen völlig genügenden Ausdruck als rein causale Nothwendigkeit finden, wobei es dann der weiteren Betrachtung überlassen bleibt, zuzusehen, ob in der Mechanik des Organischen auch besondere Gründe vorliegen, den Zweckgesichtspunkt oder, mit andern Worten, die Beziehung von Mittel und Zweck ins Auge zu fassen. Das Aeusserste, was in Rücksicht auf Charakteristik nach rein mechanischen Principien geleistet werden kann, ist die aus mechanischen Voraussetzungen entnommene Bestimmung der Merkmale oder Vorbedingungen einer gewissen ästhetischen Physionomie des Ganges [1]; aber man sieht aus derartigen Möglichkeiten, dass es überhaupt gar keinen Erscheinungstypus bewegter Massen oder Körpertheile geben kann, der nicht seinen ihm eigenthümlichen mechanischen Charakter hätte und daher stets als mechanisch definirbar gedacht, wenn auch nicht immer thatsächlich auf diese Weise gehörig analysirt werden kann. Auch hat es meist wenig Interesse, die mechanische Constitution eines solchen Erscheinungstypus im Einzelnen bloszulegen; dagegen ist die allgemeine Voraussetzung der mechanischen Charakterisirbarkeit der sonst nur durch die ästhetische Gesammtempfindung aufgefassten Zustände ein Gedanke von grossem Werth. Mit diesem Gedanken wird nämlich die ganze Tragweite und innere Unbeschränktheit der mechanischen Auffassungsmöglichkeiten recht deutlich und zugleich der Punkt bezeichnet, wo der einer Empfindung entsprechende objective Sachverhalt Gegenstand der mechanischen Untersuchung und Bestimmung sein kann.

Für die physiologischen Anwendungen der mechanischen Principien sind mit Rücksicht auf die Wärmemechanik wiederum die Arbeiten J. R. Mayers und zwar besonders die Schrift „Die organische Bewegung in ihrem Zusammenhange mit dem Stoffwechsel“ [2]) zu nennen. Sogar bis in die medicinische Physiologie hat der Autor die Consequenzen seiner mechanischen Wärmetheorie auszudehnen verstanden [3]). Ueberhaupt ist nicht zu vergessen, dass er nach seinem eignen Bericht [4]) zuerst durch eine

---

[1]) Siehe z. B. ibid. § 139 über den gravitätischen Schritt.

[2]) Zuerst 1845; abgedruckt in der Mechanik der Wärme.

[3]) In einem Aufsatz „Ueber das Fieber, ein iatromechanischer Versuch“ (zuerst 1862); abgedruckt in der Mechanik der Wärme, S. 129—145.

[4]) In den „Bemerkungen über das mechanische Aequivalent der Wärme“ (1851); abgedruckt in der Mechanik der Wärme, S. 249.



physiologische Erscheinung auf die Idee der mechanischen Aequivalenztheorie gekommen ist. „Im Sommer 1840," sagt er, „machte ich bei Aderlässen, die ich auf Java an neuangekommenen Europäern vornahm, die Beobachtung, dass das aus der Armvene genommene Blut fast ohne Ausnahme eine überraschend hellrothe Färbung zeigte." Die Vermehrungen oder Verminderungen des Farbenunterschieds der beiden Blutarten erklärte er sich auf Grundlage der Lavoisierschen Verbrennungstheorie aus der höheren oder geringeren Temperatur der Umgebung, mit welcher sich die Wärmeproduction des Körpers in eine Art von beweglichem Gleichgewicht zu setzen hat. Die Wärmeconsumtion ist in der kälteren Umgebung grösser, und mithin muss auch in der innern Oekonomie der Wärmeerzeugung durch den Körper eine stärkere Production und eine erheblichere Differenz der Oxydationszustände des Blutes obwalten. Der Farbenunterschied erklärt sich also mechanisch, indem die Wärmeentwicklung von einer gewissen Grösse diejenige Leistung ist, um die es sich zunächst handelt. Aber auch abgesehen von dieser Entdeckungsart eines Verhältnisses, welches auf die Grundlagen der mechanischen Wärmetheorie selbst hinführte, ist seit Mayer die Vorstellung immer geläufiger geworden, dass jede mechanische Leistung des lebenden Körpers darauf angesehen werden müsse, inwiefern dieselbe auf einem äquivalenten Wärmeverbrauch beruht; und dass jede vitale Wärmeerzeugung zugleich als mechanischer Act zu betrachten sei, der in einem Kraft- und Materialfond seine Grundlage hat. Die Vorgänge und Zustände des animalen Körpers werden daher in ihrem Entstehungsgrunde nicht mehr unbestimmt gedacht, also nicht etwa wie aus dem Nichts unerklärlich hervortretend vorgestellt, sondern als specifische Gestalten der in den vitalen Process eingegangenen mechanischen Kräfte gekennzeichnet. Nach dieser neusten Vorstellungsart wird die Bewegung ebensowenig als die Materie oder, mit andern Worten, der mechanische Kraftfond ebensowenig als der Vorrath an Materie eigentlich hervorgebracht, sondern im lebenden Wesen nur bestimmten Formverwandlungen nach mechanischen Principien und Aequivalenzen unterworfen.

Um daran zu erinnern, wie man schon früher in der bestimmtesten Weise die specielleren mechanischen Principien auf den lebenden Körper übertrug, sei noch eine durch den Zusammenhang charakteristische Stelle des älteren Carnot [1]) in Bezug

---

[1]) Principes fondamentaux etc., Paris 1803, Art. 271, S. 246.

genommen. Dort wird das Thier mit einer Vereinigung von Körperchen verglichen, die durch Federn verbunden seien. Diese Federn, mehr oder minder zusammengedrückt, repräsentirten eine Summe latenter lebendiger Kräfte, und es könne auch in diesem Fall keine Kraft hervortreten, die nicht anderwärts als verbraucht vorauszusetzen wäre. Das Thier könne sich keine Bewegung geben, ohne dass die Beziehung von Action und Reaction, z. B. gegen die Erde, ins Spiel käme. Diese Vorstellungen, denen nur noch die Universalität derjenigen Denkweise fehlte, die sich im Anschluss an die Wärmemechanik neuerdings entwickelt hat, können als ein Beispiel von der allgemeinen Tendenz betrachtet werden, den mechanischen Principien nur diejenigen Schranken zu setzen, die in ihrer Natur selbst gegeben sind. Jetzt sind Beispiele, in denen die allgemeinen Principien der Mechanik, wie das Flächenprincip, auf lebende Wesen angewendet werden, bisweilen schon in die Erläuterungsmittel der Lehrbücher der analytischen Mechanik übergegangen.

191. So entlegen und extrem die kosmische Mechanik und die Mechanik des lebenden Wesens einander gegenüberzustehen scheinen, so ist doch die äussere Kluft, welche beide Gebiete dem Gegenstand nach scheidet, bei Weitem nicht so gross, als der innerliche Abstand, der sich ergiebt, wenn man die Gesichtspunkte betrachtet, aus denen die eigentlich mechanischen Principien mit den Empfindungen wirklich oder scheinbar in Berührung gekommen sind. Zunächst ist der blos metaphorische Gebrauch der mechanischen Ausdrücke als meist unerheblich zur Seite zu lassen, wobei jedoch immerhin die Frage von Interesse bleiben mag, wieweit die mechanischen Metaphern in irgend einem allgemeineren Charakterzug der Verhältnisse ihren Grund haben. Man wird in dieser Beziehung, auf die hier nicht näher einzugehen ist, im Allgemeinen finden, dass es in allen existirenden Objecten und Verhältnissen etwas giebt, was nur darum als der specifischen Mechanik analog erscheinen kann, weil es mit derselben gewisse sehr allgemeine Grundzüge theilt. Grade aber um dieser Gemeinsamkeit und Allgemeinheit willen gehört dieses Gebiet nicht in den bestimmteren Typus der specifischen Mechanik, sondern befindet sich über demselben, indem es als eine Classe von Beziehungen gelten muss, die entweder rein logisch und rein mathematisch oder derartig schematisch sind, dass sie auf alles

Existirende ohne Unterschied Bezug haben[1]). In diesem letzteren Falle kann aber offenbar eigentliche und specifische Mechanik nur soweit in Frage kommen, als der Gegenstand der Untersuchung nach den Begriffen von Materie, räumlicher Bewegung oder überhaupt materiell mechanischer Action aufgefasst und schliesslich auch in dieser Weise gemessen oder wenigstens als derartig messbar und mit bekannten mechanischen Actionen vergleichbar gedacht werden kann.

Der Uebergang von den äusserlichen, der umgebenden Natur oder den Vorstadien in der Gliederung des lebenden Körpers angehörigen, mechanisch analysirbaren Vorgängen zum eigentlichen Empfindungsgebiet ist durch interessante Versuche und Ideen beleuchtet worden, von denen einige, die Bahn eröffnende und zugleich exacte Thatsachen auch die Abgrenzung der Mechanik einigermaassen angehen. Die sehr klaren Auseinandersetzungen E. H. Webers[2]) haben sich in der hier fraglichen Beziehung besonders um die Thatsachen zu dem Gedanken bemüht, dass die offenbar mechanischen Seiten der Sinnesempfindung, also zunächst die Druckempfindung, in einem näher bestimmbaren Verhältniss zu der objectiven Grösse des empfundenen Sachverhalts, wie z. B. des Gewichts, stehen. Die Experimente, durch welche für die Gewichtsvergleichungen mit der blossen Hand die kleinste noch durch die Empfindung zu unterscheidende Differenz constatirt wird, bilden hier den Anknüpfungspunkt. Den Zusätzen an solchen kleinsten Gewichtstheilen entsprechen die Steigerungen der Empfindung. Geht man nun auf Grund der Experimente davon aus,

---

[1]) Beispiele solcher mechanischen, aber über das engere Gebiet der Mechanik hinaustragenden Analogien finden sich, namentlich in Rücksicht auf die innern Antriebe des menschlichen Handelns und in Beziehung auf die Kräfte des gesellschaftlichen und politischen Lebens mit Vorliebe erörtert von Sophie Germain, in deren kleiner, aber gedankenreicher philosophischer Schrift Considérations sur l'état des sciences et des lettres (Paris 1833). Diese Analogien sind grade bei der genannten Verfasserin besonders bemerkenswerth, weil dieselbe nicht blos mathematisch und naturwissenschaftlich exact dachte, sondern sich auch an der Mathematik mit interessanten Specialarbeiten, die ihr einen Preis der Pariser Akademie eintrugen, in einem Maasse betheiligt hatte, wie es unter den Universitätsprofessoren der Mathematik in der letzten Generation nur selten Einem gelungen ist.

[2]) In Wagners physiologischem Wörterbuch, Bd. III, 2. Abth. (1846), Artikel Tastsinn und Gemeingefühl, und darin besonders „über die kleinsten Verschiedenheiten der Gewichte, die wir mit dem Tastsinn . . . unterscheiden können", S. 559 fg.



dass es immer ein gewisser Bruchtheil des jedesmal wirkenden Gewichts sein müsse, durch dessen Zusatz ein fühlbares Empfindungselement hervorgebracht werde, so liegt in der mathematischen Verallgemeinerung dieser experimentellen Beziehung allerdings ein Gesetz, welches zwischen der Grösse des die Empfindung hervorbringenden äussern Sachverhalts oder Reizes und der Grösse der Empfindung selbst das Vorhandensein eines durch eine mathematische Function näher gekennzeichneten ursächlichen Zusammenhangs ausspricht. Diese Abhängigkeit zwischen äusserer Ursache und bewusster Empfindung ist nun aber wesentlich nur als ein allgemeiner, mathematisch etwas näher bestimmter Typus des Verhältnisses von zwei Grössenreihen zu betrachten, deren Beziehung innerhalb eines gewissen Stetigkeitsspielraums verbleiben muss. Ausserdem ist der experimentelle Inhalt die Hauptsache, und es dürfte, ganz abgesehen von der Frage einer mathematischen Verwerthbarkeit des Verhältnisses, ein eigentlich mechanisches Princip nicht zur Anwendung gelangen können. Wohl aber sieht man deutlich, in welcher Richtung eine solche Anwendung zu suchen wäre.

Die mechanische Physik oder physikalische Mechanik ging bisher in der Regel davon aus, dass mit der Nervenaffection das der mechanischen Auffassungsart Zugängliche aufhöre. In einem engern Sinne ist dies zutreffend und gilt auch noch den neusten Vorstellungsarten gegenüber; denn die nächsten Analoga der am unstreitig Wägbaren statthabenden mechanischen Vorgänge sind offenbar auch im lebenden Körper nur für das vorhanden, was sich mit gleichartiger Kraftreaction an der fremden mechanischen Action gleicher Gattung bethätigt. Allein schon die feineren Medien und deren Affectionen bilden eine neue Classe von Vorgängen, die in einem allgemeineren Sinne mechanisch sind, und wenn man das Licht in den brechenden Mitteln des Auges rein physikalisch behandelt, so kann man auch die Wirkungen auf die Netzhaut in analoger Art vorstellen. In der That berücksichtigt ja auch die Optik die lebendige Kraft, mit welcher der hypothetische Aether die Ausbreitung des Sehnerven erregt, und wenn auch diese gewöhnlich als physiologisch bezeichnete Seite des optischen Processes noch nicht besondere mechanische Aufklärungen gestatten mag, so müssen doch die Principien der Mechanik hier in demselben Sinne ausgedehnt werden können, wie es für alle Vorgänge, die man auf Aetherbewegungen zurück-

führt, mehr und mehr in Aussicht steht. Am allerwenigsten darf die Bewegungsfortpflanzung, die man in den Nerven als materiellen Trägern der Kraftaffectionen voraussetzen muss, den rein mechanischen Begriffen entfremdet werden. Auch fehlt es ja nicht gänzlich an Untersuchungen über die Fortpflanzung elektrischer Erregungen in den Nerven, und wenn man hiemit die neuern Ideen über einen gemeinsamen Charakter aller Naturkräfte verbindet, so ist die einstige bestimmtere Gestaltung der Mechanik in diesen Anwendungsgebieten im Allgemeinen schon einigermaassen abzusehen. Nur Eines darf hiebei nicht vergessen werden. Es ist nämlich die bewusste Empfindung nicht als solche, sondern äussersten Falles nur in ihrem äusserlichen Grunde oder, mit andern Worten, in der objectiv wahrnehmbar zu machenden Beschaffenheit der Nervenvorgänge als ein möglicher Gegenstand mechanischer Gesichtspunkte zu denken. Eine etwa eintretende Beziehung auf die Grösse des Empfindungsgefühls selbst, wie sie nach der vorher erwähnten, an sich selbst von den mechanischen Principien ganz unabhängigen Methode E. H. Webers experimentell bewerkstelligt worden ist, liesse sich auch in einer von den mechanischen Nervenvorgängen ausgehenden Ableitungsart denken, würde hiemit aber immer noch nicht die unmittelbare Anwendung mechanischer Principien auf die subjective Empfindung vorstellen. Eine solche Anwendung erscheint vielmehr als Unmöglichkeit, weil in dem Empfinden nichts ist, was ähnlich wie ein objectiver Gegenstand unmittelbar nach dem Gesichtspunkt von Materie und Bewegung aufgefasst werden könnte. Der Umstand, dass die Empfindung ein materielles Erzeugniss ist, steht hiemit nicht in Widerspruch; denn obwohl alle Wirklichkeit nur am Leitfaden der Materialität erkannt wird und nur als Materie existirt, so sind doch die einzelnen Productionen und Eigenschaften der Körper nicht mit dem fundamentalen Träger dieser Eigenschaften einerlei. Sie sind vielmehr weniger als dieser, und aus diesem Grunde ist es auch nicht zulässig, die Mechanik der Materie unmittelbar auf die an sich selbst betrachteten Bestandtheile des Bewusstseins zu übertragen.

Schluss.

Das Studium der mathematisch mechanischen Wissenschaften und die Lehren der Geschichte.

192. Nachdem die Tragweite der mechanischen Principien für das menschliche Wissen in einigen Grundzügen sichtbar gemacht und so der Ausblick auch auf fernere Forschungen eröffnet worden ist, dürfte noch die allgemeine Frage am Platze sein, was die Wissenschaftsgeschichte für die Forschung, namentlich aber für das Studium zu lehren vermöge. Zu den allgemeinen Gründen, welche eine derartige Erörterung der Studiengesichtspunkte rathsam und erspriesslich machen, kommt im vorliegenden Fall noch eine besondere, ja zunächst nur private Veranlassung. Von den verschiedensten Seiten hat die erste Auflage dieses Buchs eine Anzahl brieflicher Erkundigungen hervorgerufen, in denen man mich um Nachweisung des besten Wegs und der zweckmässigsten Hülfsmittel zur Selbsteinführung in die mathematisch mechanischen Wissenschaften ersuchte. Da diese Anfragen nicht blos von solchen Personen ausgingen, die ein fachmässiges Studium in Anlehnung an die gelehrten Anstalten betrieben, sondern auch von solchen, die blos gediegenere Grundlagen für ihre wissenschaftliche Bildung und Weltanschauung gewinnen wollten, so kam ich nicht selten in die Nothwendigkeit, mit den Winken über das rein Mathematische bis zu Fingerzeigen über Auffassung und Aneignung der Elemente zu gelangen. Aber nicht blos aus diesem Grunde wird eine zum Studium der Mathematik und Mechanik anleitende Skizze eine natürliche Ergänzung meiner geschichtlichen Arbeit bilden. Auch hievon ganz abgesehen, gestattet schon der innige Zusammenhang, in welchem Auffassung und Behandlungsart

der Mathematik mit der Gestaltung der mechanischen Theorie stehen, selbst in einer Darlegung, die nur die Mechanik und deren Studium zum Gegenstand hätte, keine vollständige Trennung beider Gebiete.

Seit in der zweiten Auflage dieser Schrift die auch die Mathematik mitberücksichtigende Studienanleitung zum mechanisch physikalischen Gebiet erschienen, hat die 1884 erfolgte Veröffentlichung des von mir und meinem Sohn verfassten Buchs der Neuen Grundmittel zur Analysis etc. die äusserliche Lage etwas verändert. In diesem ausschliesslich mathematischen Werk, welches sich grundsätzlich diesseits der Grenze der physischen, also auch der mechanischen Anwendungen hält, finden sich mit dem Hauptinhalt an Erweiterung und Vermehrung des bisherigen Wissens auch überall Gesichtspunkte zum Studium, zur Lehrart und zur Wissenschaftsreform verbunden. Ueberdies enthalten die letzten drei Capitel einen besondern Entwurf für das Lernen und Lehren der Mathematik. In diesem Entwurf, der eine selbständige Studienanleitung einschliesst, wurde das Vorhandensein dessen berücksichtigt, was in der zweiten Auflage der vorliegenden Schrift über das Studium der reinen Mathematik gesagt worden. Demgemäss sollten beide Anleitungen in gewissen Richtungen einander zur Ergänzung dienen, im Allgemeinen und in der Hauptsache aber auch jede selbständig brauchbar sein.

Dieses Verhältniss bleibt nun auch jetzt erhalten, ja wird sogar durch die hier vorgenommenen Verbesserungen noch vollkommener. In dem rein mathematischen Werk waren die äussersten Höhen der Mathematik mindestens ebenso wichtig als deren Grundlagen; hier aber, wo die Anwendungen den Hauptgesichtspunkt bilden, sind die Elemente und einfachsten Mittel, vermöge deren man mathematisch das Sachgebiet beherrscht, das vor allem Andern maassgebende Augenmerk. Der Ausdruck Anwendung ist daher nicht einmal ganz passend; denn man fragt nicht, wie vorhandene reine Mathematik im Sachlichen anzubringen sei, sondern man stellt umgekehrt vom Sachlichen her die Frage, wieviel reiner mathematischer Hülfsmittel man bedürfe. Die einfachsten Hülfsmittel sind nun die überall am meisten erforderlichen, so dass die principiellen Ansätze jeder Abtheilung und Stufe reiner Mathematik mehr praktische Bedeutung haben als die complicirteren Folgerungen oder gar Ausspinnungen. Im Zusammenhange dieser Schrift haben wir aber ganz besondere

Ursache, das Principielle in der Mathematik ähnlich hervorzuheben, wie das Principielle in der Mechanik.

Die Principien der Mathematik und die Principien der Mechanik finden sich stillschweigend überall verbunden, und auch ausdrücklich hat an verschiedenen Stellen dieser Schrift von rein mathematischen Grundfragen, wie beispielsweise von der Rolle des sogenannten Unendlichen, kritisch und berichtigend gehandelt werden müssen. Ueberdies wird aber der stoffliche Inhalt der Mechanik so sehr von den verschiedenen mathematischen Methoden gekreuzt, dass man schon um dieser Thatsache willen nicht darauf verzichten kann, mit der Orientirung über das mechanische Gebiet eine dazu passende über das gesammte Bereich der Mathematik zu verbinden. Der eben gebrauchte Ausdruck Principien der Mathematik deutet, wenn er in einem ähnlichen Sinne genommen wird, wie er in der Mechanik nach seinem weitesten Umfang Geltung hat, auf eine systematisch durchgearbeitete Zusammenfassung von Einsichten, wie sie in der gehörigen Form noch nicht existirt. Seit länger als zwei Jahrtausenden hat man Elemente der Geometrie; aber zu Elementen der gesammten Mathematik ist man zwar äusserlich und dem Namen nach, aber nicht innerlich und der Sache nach gelangt. Solche Elemente würden auch in der besondern Durcharbeitung der Einzelheiten ein gleichartig verschmolzenes System bilden. In ihnen würden Arithmetisches und Geometrisches stets an ihrem Platze sein, und was von der Geometrie auf rein zahlenmässige Nothwendigkeit oder auf die Gesetze allgemeiner Grössenbeziehungen zurückführbar ist, würde nicht noch einmal, grade als wenn es eine speciell geometrische Wahrheit wäre, in der Verwicklung mit geometrischen Gebilden auf geometrische Weise, sei diese nun altfränkisch oder neumodisch, dargethan werden. Die Elemente Euklids sind ihrer logischen und Systemform nach nicht mehr zu brauchen, sobald man dem Gedanken wirklicher Elemente oder, besser gesagt, Principien der gesammten Mathematik entsprechen will. Ueberdies dürfen die Principien, im Sinne eines Inbegriffs der charakteristischen Grundwahrheiten verstanden, nur das enthalten, was in einem Wissensgebiet als Ausgangspunkt oder Ergebniss von primitiver Art ist, und wozu sich alles Uebrige als handwerksmässige Ableitung verhält. Jede neue Wendung des Wissens, für welche der leitende Grundbegriff noch nicht aufgenommen war, muss ihrer Eigenthümlichkeit wegen als principieller Ansatz

berücksichtigt werden. So ist beispielsweise die Veränderung der Grössen in stetiger Weise, also die Vorstellung von einem mit der Zeit allmälig erfolgenden Wachsen und Abnehmen derselben, der entscheidende Grundbegriff der höhern Mathematik und zugleich der Anknüpfungspunkt für deren Bethätigung in der Mechanik. Eben diese Idee findet aber schon vielfache, wenn auch nicht deutlich hervorgehobene Anwendungen in Sätzen und Aufgaben der niedern Mathematik und würde dort noch nützlicher wirken, wenn sie mit vollem Bewusstsein schon in die ersten einfachen Grundlagen alles mathematischen Denkens eingeführt wäre. Aus diesen Andeutungen über die Gestaltung von allgemeinen Principien der Mathematik mag man ermessen, wie sich wirkliche Elemente der Wissenschaft ausnehmen müssten, und wie dieselben für unsere Zeit nicht blos an sich, sondern auch verhältnissmässig, weit mehr sein müssten, als die Euklidischen für die ihrige und bis in die neuern Jahrhunderte hinein gewesen sind.

Der Mangel eines Werks, in welchem die Principien der allgemeinen Mathematik in der angedeuteten verschmolzenen und streng systematischen Art dargestellt wären, bildet ein nicht geringes Hinderniss für das Studium. Für letzteres ist grade heute das erste Eintreten in die Behausung der Wissenschaft dadurch erschwert, dass der alte Hausrath von einst classischen Darstellungen heut nicht nur äusserst unbequem zu gebrauchen, sondern auch dem Bewusstsein von einer natürlichen Denkweise nicht entsprechend ist. Euklides und noch mehr Archimedes haben künstliche oder auch kunstvolle Nachweisungen fertiger Ergebnisse geliefert; aber sie sind nicht unmittelbare und eigentliche Lehrer der natürlichsten Art des mathematischen Denkens gewesen. Die neuere Zeit hat sich bekanntlich die Methoden der Auffindung der Ergebnisse und das bequemste Verfahren mit leitenden Ideen erst selbst wieder schaffen müssen, um auf eignen Füssen weitergelangen zu können. In der Erlernung der einfachsten Grundlagen haben sich aber die Künsteleien der Euklidischen Geometrie noch nie als bequem erwiesen, sondern im Gegentheil eine Hemmung gebildet, die nur bei besonders guten Anlagen darum nichts schadete, weil der gewandtere Schüler sich den Stoff nach Gesichtspunkten zu eigen machte, nach denen eine Annäherung an das natürliche Denken und eine entsprechende Verwandlung der Vorstellungen einigermaassen platzgriff.

193. Arithmetik und Algebra sind niemals, wie die Elemente der Geometrie, in einem gleich dem Euklidischen als mustergültig anerkannten Grundwerk dargestellt worden. Diese Thatsache, die bis auf den heutigen Tag fortbestanden hat und auch wohl nicht so bald beseitigt werden wird, ist insofern interessant, als sie lehrt, wie die moderneren, dem antiken oder wenigstens griechischen Geist weniger angehörigen Stoffe in der Systemform am rückständigsten geblieben sind. Bei ihnen stehen die materielle Bereicherung und die formelle Strenge des Wissens im umgekehrten Verhältniss. Man ist beispielsweise noch bis heute nicht dazu gelangt, die einfachsten Regeln über die Operationszeichen aus klaren Begriffen streng zu beweisen. Nicht einmal der Satz, dass die negativen Zeichen ein positives ergeben, wenn die mit ihnen behafteten Zahlen multiplicirt werden, ist zu einem völlig befriedigenden Beweise gelangt. Wohl hat man aber statt dessen die Grundbegriffe selbst und zwar meist durch falsche Verdinglichungen verdunkelt, unbrauchbarer gemacht und im letzten Menschenalter sogar bis zur Mystification verwirrt. So ist der Sinn der Operationszeichen zuerst durch die Erdichtung negativer Zahlen oder gar Grössen entstellt worden, und es war daher für die letzten Generationen nur ein Schritt weiter in dieser verkehrten Richtung erforderlich, um zu dem Negativen auch noch das Imaginäre als selbständig verdinglichte Wirklichkeit mit einigem Erfolg aufzutischen und ausser den einfachen Operationszeichen selbst auch noch die widersprechende Verbindung von zwei ganz ungleichartigen, nämlich das auf das Subtractive bezogene Quadratwurzelzeichen zu einer mysteriösen Existenz zu erheben, während das kritischere Zeitalter von Lagrange derartige äusserste Zumuthungen unbeachtet gelassen hatte. Welche Verwirrung jene, wie schon Nr. 183 erwähnt, besonders von Gauss wieder aufgefrischten Verunstaltungen der logischen Form der mathematischen Grundgedanken mit sich gebracht haben, wird der künftige Geschichtsschreiber im Contrast zu einer späteren klareren Epoche erst im ganzen Umfang sichtbar machen. Für heute mögen wir in diesen Missgriffen eben nur die Bestätigung davon sehen, dass Arithmetik und Algebra in ihren principiellen Grundlagen noch keine zureichend strenge Form angenommen haben, geschweige in einer mustergültigen Darstellung zugänglich sind. Unser Werk von den Neuen Grundmitteln hat in erster Linie höhere und wissenschaftserweiternde Ziele verfolgt, daneben aber auch die

nöthigen Hinweisungen aufgenommen, nach welchen sich für die Grundlagen und elementaren Ausgangspunkte völlige Klarheit herstellt. Es ist aber erforderlich, derartige fundamentale Angaben in danach ausgeführten Lehrmitteln für die besondern Mathematikabtheilungen zu verwerthen.

Nach dem vorher Gesagten steht es mit dem, was man herkömmlich niedere Mathematik nennt, und was auf Anstalten wie Gymnasien und Realschulen gelehrt zu werden pflegt, bezüglich einer so zu sagen classischen Zusammenfassung in System- und Lehrbuchform herzlich schlecht. Der einzige berühmtere Versuch, wenigstens in der Geometrie einen moderneren Ersatz für die Euklidischen Elemente zu schaffen, nämlich Legendres Elementargeometrie hat trotz der grossen Verdienste und der verhältnissmässigen Brauchbarkeit dieses Buchs doch nur gezeigt, wie das Unternehmen, an der Schwelle des 19. Jahrhunderts Elemente blosser Geometrie zusammenzustellen, doch etwas zu antik und nach Form und Stoff ein wenig veraltet gerathen musste. Seit Legendre ist nichts Aehnliches wieder zur Anerkennung gelangt, und die Kreuzung der früheren Stoffe mit neuen Versuchen und Ansätzen, wie besonders mit der projectivischen, wesentlich von Poncelet geschaffenen Geometrie hat vollends desorientirend gewirkt. Der Unterricht ist durch die willkürliche Mischung ungleichartiger Stoffe grade in der Geometrie noch schwankender geworden als zuvor, und in der Unzahl von Lehrbüchern, welche der Tag hervorbringt und wieder begräbt, kann man eben nur eine Bestätigung der zunehmenden Zerfahrenheit finden.

Es ist daher für das Studium auch heute ziemlich gleichgültig, wo man die Elemente der niedern Mathematik aufsuche. Man könnte bezüglich der Lehrbücher auch allenfalls das Loos entscheiden lassen; denn der Unterschied von Schaden und Vortheil ist in den Niederungen dieses Gebiets nicht sonderlich gross. Im Allgemeinen wird man aber annehmen können, dass die Elemente eine um so mehr verkehrte Behandlung erfahren, je mehr sie für eigentlich gelehrte Schulen zugeschnitten sind und von Personen bearbeitet werden, die dem lateinischen und griechischen Zuschnitt oder vielmehr dieser heutigen Verschnittenheit der Bildung angehören. Hiezu tritt auch wohl noch diejenige Verunstaltung, welche von schulmeisterlicher Beengtheit, pädagogischen Schrullen und verschrobener Scholarchenpedanterie ausgeht. Da purzeln denn beispielsweise manche der übergelehrten Quäler des

Knabengeistes in den tiefen Gedanken hinein, dass es auf die Aneignung von Wissen gar nicht ankomme, sondern dass die Uebung des Verstandes der einzige Zweck sei. Wenn nun auf Grund solcher Ansichten, nach denen man allenfalls auch das Schachspiel als Ersatz der Mathematik unterschieben könnte, nicht viel gelernt wird, und wenn die Lehrbücher solcher Richtungen nichts weniger als praktisch ausfallen, so mag man darin einen Fingerzeig erblicken, dass man sich nach etwas verhältnissmässig Besserem nur in denjenigen Sphären umzusehen habe, die dem moderneren Leben und Geiste näherstehen. In der That ist es nicht uninteressant, zu bemerken, dass die Lehrbuchliteratur, die von Schulen polytechnischer Art ausgeht und für solche Anstalten berechnet ist, manchmal ein wenig mehr praktisches Geschick und Gewandtheit im Darstellen und Lehren aufzuweisen hat. Auch die Militärschulen sind mit ihrer Art und Weise und mit ihrer Lehrbücherproduction nicht immer ganz so rückständig als die Gymnasien und Universitäten.

194. Sowenig das Essen dazu dienen soll, die Zähne im Kauen zu üben, ebensowenig hat die Aneignung des Wissenswerthen den Zweck, die Verstandesorgane Turnkünste verrichten zu lassen. Wenn Einer meint, es sei das Spiel der Kauwerkzeuge die Hauptsache, so mag er nach Herzenslust vorkauen, und es werden sich Unglückliche genug finden, die ihm freiwillig oder gezwungen nachkauen; nur möge er nicht glauben, dass der Schulunsinn für die praktische Auffassung maassgebend werden kann. Auch sind solche geistige Kauübungen die schlimmsten Feinde wahrer und höherer Wissenschaftlichkeit; denn das Ziel der Wissenschaft besteht eben im Wissen ihrer letzten, theoretisch und praktisch interessantesten Ergebnisse. Die niedern Stufen sind nur als Mittel zu schätzen, um zu den höheren und höchsten zu gelangen. Eine Behandlung der Studien, welche sich nach diesem Grundsatz richtet, wird die heutigen Niederungen der Mathematik, die in der Form nichts Anziehendes bieten, so rasch als möglich hinter sich bringen und weder in Arithmetik und Algebra noch in den geometrischen Gebieten länger als irgend nöthig verweilen. Die Erlernung der unentbehrlichsten Sätze und Verfahrungsarten wird das Hauptaugenmerk bleiben. Je kürzer eine Auswahl des Unumgänglichen hier ausfällt, um so willkommener wird sie sein. Man muss eben nur diejenigen Materialien benutzen, welche wirklich zur Aufführung des Gebäudes

dienen können, und man wird Alles als unnützes Gerölle und unwürdiges Spielwerk verwerfen, was sich nebenbei und oft genug mit der Anmaassung angefunden hat, bei der Ausstattung von Wichtigkeit zu sein. Man wird nie vergessen, dass man die Grundlagen nur braucht, um von ihnen etwas stützen zu lassen, was sich über ihnen und zwar bis zur äussersten möglichen Höhe erheben soll.

Bei dieser Betrachtungsart der mathematischen Studien bleibt schliesslich nicht einmal die Mathematik an sich selbst in ihrer Absonderung der maassgebende Gesichtspunkt, sondern Mechanik und Physik sind die ersten Naturwirklichkeiten, um deren Bedürfnisse man sich vornehmlich zu kümmern hat. Für die praktische Behandlung der Dinge unterliegt dies nicht dem mindesten Zweifel; aber auch das reine Bildungsinteresse, welches in einer strengen Welttheorie gipfelt, muss in der Benutzung der Mathematik zur Ergründung der Naturverfassung die beste Frucht jener rein abgezogenen und sich sonst speculativ verlierenden Erkenntniss sehen. Der Werth dessen, was man im engern Sinne des Worts Zahlentheorie nennt, ist darum so gering, weil die Formeigenschaften der Zahlen, mit denen sich diese neuerdings auf Universitäten sehr beliebte Abzweigung der Mathematik befasst, so äusserst wenig mit der Beschaffenheit der Dinge und mit den Problemen der Naturerklärung zu thun haben. Käme es nur darauf an, den Sinn mit einigen Sätzen über die Constitution der Zahlen zu vergnügen, so möchten einige Ergebnisse dieser Speculationsgattung auch immerhin in die ersten Elemente aufgenommen werden. Man würde so zu den überflüssigen Eigenschaften der Figuren auch noch einige überflüssige Beziehungen der Zahlen hinzufügen und sich nicht sonderlich Mehr zu Schulden kommen lassen, als eine übelangebrachte Fortsetzung der griechischen Art und Weise, die ja, da sie mit dem gewonnenen Maass von Mathematik oder vielmehr blosser Geometrie nicht viel anzufangen wusste, den Ton auf die blosse Speculation legte. Hätte der antike Standpunkt schon weitertragende Anwendungen auf die Natur in Sicht gebracht, so würden die speculativen Ausartungen der alten Mathematik vermieden und die Beschaffenheit der Grundwerke, ja die ganze Systemdarstellung auch in logischem Sinne eine andere geworden sein. Ein so künstliches Erzeugniss, wie das des ersten Alexandrinismus oder, mit andern Worten, die Elemente Euklids wären, wenigstens in ihrer bizarren, in die Be-

handlung der fünf regelmässigen Körper auslaufenden Anlage, eine Unmöglichkeit gewesen. Man hätte einen höhern Begriff von der Theorie gefasst, als den, welcher ihren Werth darein setzt, dass sie sich von der Wirklichkeit entfernt und in den engen Rahmen blosser Formvorstellungen des menschlichen Geistes gebannt halte. Wir, die wir uns thatsächlich nicht mehr in diesem engen Kreise drehen, haben die Folgerungen dieser Thatsache auch für die Werthbestimmung der Wissensbestandtheile zu ziehen, und brauchen uns auch nicht einmal im Anfange des Studiums durch eine falsche Würdigung des Umfangs der Elemente und des Dienstes, welchen sie leisten sollen, missleiten zu lassen.

Das ästhetische Vergnügen des Geistes an einer gewählten und logisch völlig befriedigenden Verkettung eines Wissensganzen ist grade in den mathematischen Elementen heute am wenigsten zu haben, und so fällt auch dieser Grund fort, sich etwa mit dem Fussgestell der Mathematik um seiner selbst willen zu befassen. Man wird vielmehr zusehen, wie man mit möglichst wenig Mühe und Unbequemlichkeit den Fuss darauf postire. Man wird also beispielsweise in der Arithmetik und Algebra die sogenannten sieben Rechnungsarten in ihrer buchstabenmässigen Allgemeinheit und alsdann die Gleichungen beider Grade einschliesslich der Proportionen derartig hinter sich bringen, dass man die Grundbegriffe, Verfahrungsarten und Hauptmittel zur Lösung von Aufgaben kennt, die Beweise aber meist in der Form einer natürlichen Entwicklung der zusammengesetzten Ueberzeugung aus einfacheren Bestandtheilen sich aneignet. Aller Anstoss, welchen der herkömmliche Leichtsinn in der analogen Ausdehnung der Grundbegriffe und die damit verbundene Ueberrumpelung des fremden Urtheils geben mag, muss bei einem solchen Studium vorläufig ertragen werden; denn eine strenge Rechenschaft über derartige Uebergänge und Verallgemeinerungen ist in den vorhandenen Lehrbüchern nicht zu haben. Auch würde eine kritische Auseinandersetzung mit solchen Bedenken heute noch zuviel Weitläufigkeit mit sich bringen und zuviel logisch subtile Untersuchung erfordern, als dass man eine solche Beschäftigung für den Anfang empfehlen könnte. Wäre ein streng mustergültiges Lehrbuch vorhanden, so würde der Lernende gar keinen Anstoss nehmen können und bei allen Abwegen vorbeigeführt werden. So aber ist der vorherrschende Ideengang selbst vielfach verdorben und in dieser Verdorbenheit derartig eingewurzelt, dass die kritische

Reinigungsbemühung eine Arbeit werden muss, mit der man den sich in die Elemente Einführenden nicht behelligen kann, ohne grade für ihn den nächsten Hauptzweck zu verfehlen.

195. Vergleicht man den Zustand der Algebra mit dem der Geometrie, so hat zwar ersteres Gebiet wenig von der antiken Strenge aufzuweisen, welche bei den alten Geometern vorherrscht; aber es kommt in seiner naturwüchsigen Gestalt einer natürlichen Entwicklung der Wahrheiten näher, als die an so vielen Verschrobenheiten der Anordnungs- und Beweismethoden leidende Theorie des Räumlichen. Sieht man über den Mangel strenger Bestimmung der Grundbegriffe und entsprechender Verkettung des Ganzen hinweg, so sind die isolirten Erkenntnisse der Arithmetik und Algebra von leidlich menschlichem Aussehen und prägen sich dem Geiste ein, ohne auf ihn einen unnatürlichen Zwang auszuüben. Namentlich ist die Verschmelzung der Beweise mit einer eigentlichen Entwicklung der Wahrheiten ein grosser Vortheil; denn bei dieser Art des Vorgehens steht jeder kleinste Operationsschritt sogleich, indem er gethan wird, auch als gerechtfertigt da, und man bedarf keiner besondern Nachschickung von getrennten und künstlich zugerüsteten Beweisen. Etwas Aehnliches würde auch für die Geometrie möglich sein, wenn man sie von vornherein als ein natürlich von Stufe zu Stufe fortschreitendes Operiren mit räumlichen Elementen betrachtete und die einzelnen auszuzeichnenden Wahrheiten im Laufe der Entwicklung gleichsam als Stationspunkte gewönne. Die besondern Ergebnisse würden alsdann durch die Sicherheit jedes kleinsten Schrittes verbürgt, der auf dem Wege zu ihnen gethan wäre, und man hätte den Vortheil, mit jeder Einsicht, sei sie nun erheblich oder unerheblich, den Beweis oder, besser gesagt, die Vergewisserung unmittelbar verschwistert einhergehen zu lassen.

Was hiebei vornehmlich gewinnen würde, wäre die Anschaulichkeit, deren naturgemässe Vermittlung gegenwärtig am meisten vermisst zu werden pflegt. Die Definitionen würden vorherrschend genetisch und construirend ausfallen, d. h. sie würden die Gebilde, die aus der Mannichfaltigkeit der Vorstellungen abgegrenzt und mit einem besondern Namen belegt werden sollen, im Gedanken wirklich entstehen lassen und so zugleich deren Möglichkeit sichtbar machen. Aber auch die zusammengesetztesten Wahrheiten würden aus aneinandergereihten Bestandstücken derartig evident hervorgehen, dass man in ihrer Anerkennung nichts mehr von

jenem Zwang und jener Aufdringlichkeit verspürte, über die schon mancher gute Kopf grade in der Geometrie zu klagen gehabt hat.

Da wir hier jedoch die Dinge für das heutige Studium so zu nehmen haben, wie sie sind, so können wir von der Vorstellung dessen, was bei anderer Behandlungsart möglich wäre, nur einen einzigen Vortheil ziehen. Man wird nämlich principiell darauf hinarbeiten, sich den von den Lehrbüchern gebotenen Stoff, möge er noch so unnatürlich gestaltet sein, selbst ein wenig zu gruppiren, und man wird hiebei in Ermangelung kunstvoll vorgethaner Arbeit, die einen ähnlichen Zweck verfolgte, die naturwüchsigen Gesichtspunkte walten lassen, zu denen sich die Geistesthätigkeit auch ohne besondere Hinweisung von selbst aufgelegt findet. Diese natürliche Selbsthülfe, die von mathematisch gut beanlagten Köpfen mit grossem Geschick ausgeführt zu werden pflegt, kann, wenn auch nur in einiger Annäherung, sogar von Seiten der Durchschnittsauffassung platzgreifen, sobald nur einmal die Einsicht verbreitet ist, dass man das künstlich verschobene und verschrobene Gefüge auf sich beruhen lassen müsse. Die einzelnen erheblichen Sätze werden alsdann möglichst einfach herausgehoben, natürlich gruppirt und zu einer Entwicklungsreihe vereinigt werden. Beispielsweise wird man von den Elementen der ebenen Geometrie zuerst Winkel, Winkelmessung und Parallelen, dann die Bestimmung eines Dreiecks aus Bestandstücken, ein paar Sätze von Winkeln in und am Kreise, einschliesslich der Tangentenlage, ferner die Inhaltsmessung der Figuren, einschliesslich des Kreises, und endlich die so äusserst wichtige Lehre abthun, wie die Abhängigkeit der Linienlängen von den Winkelgrössen zu bestimmen sei, wobei zunächst sich nur der Specialfall des Pythagoreischen Satzes, übrigens aber die Nothwendigkeit der eigentlichen Trigonometrie mit ihrem Haupthülfsbegriff des Sinus ergiebt. Die vornehm sogenannten Kreisfunctionen haben nämlich mit dem Kreise nicht mehr und nicht minder zu schaffen, als jeder an sich betrachtete Winkel, und die Geometrie gipfelt grade darin, den Uebergang von den Richtungsunterschieden zu den Linienausdehnungen quantitativ zu vermitteln, so dass die gegenseitige Abhängigkeit dieser beiden ungleichartigen Grössen zahlenmässig bestimmbar werde. Nebenbei bemerkt, erklärt sich auch hieraus der Umfang der Rolle, welche die Pythagoreische Beziehung zwischen den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks in der ganzen Mathematik spielt. Ihre Bedeutung stammt daher, dass

der Pythagoreische Satz in seinem Kern den Uebergang von einer Winkelgrösse zu einem davon abhängigen Linienverhältniss einschliesst.

Zur Ergänzung des beispielsweise Erwähnten muss nun aber bezüglich der Aneignungsart noch hinzugefügt werden, dass man sich um irgend eine verschrobene Definition des Winkels ebensowenig Sorge zu machen habe, wie um eine hypergeometrische Parallelentheorie. Die Frage ist hier einfach, ob man einen natürlichen Begriff von der Sache gewonnen habe oder nicht. Die Kunst, einen einfachen und richtigen Wortausdruck für eine zutreffende Abgrenzung des Gedankens zu gewinnen, ist nicht immer leicht; aber man darf keinen Anstoss daran nehmen, wenn man eine verschrobene Auslassungsart des Lehrbuchs auch nicht durch eine gewählte und vollkommene Fassung zu ersetzen vermag. Es ist vorläufig genug, wenn man richtig vorstellt und denkt. Man braucht sich daher nicht mit Ungeheuerlichkeiten über oder gegen die Wahrheit zu behelligen, dass Parallelen sich nicht schneiden und dass Nichtparallelen es thun. Linien, welche gleiche Richtung haben und daher keinen Winkel bilden, sind ebenso, wie Linien, welche in derselben Ebene ungleiche Richtung haben und demgemäss einen Winkel bilden, in sich genügende Grundanschauungen, deren Inhalt doppelt mit Worten zu formuliren und dann für jede Grundanschauung den angeblich zweiten Bestandtheil noch besonders beweisen zu wollen, schon zu den logischen Missgriffen des Alterthums gehört hat. Grade die wenigen Einsichten, welche über die Winkelgleichheit in Bezug auf Parallelen erforderlich sind, lassen sich auf die allereinfachste Weise aus dem blossen Begriff der Richtungsgleichheit gewinnen und können lehren, wie in der Geometrie der natürliche Weg und die Consequenz aus den Grundbegriffen den verschrobenen Conceptionen gegenüber eine grosse Erleichterung gewähren.

Auch sei nebenbei bemerkt, dass es sich für den gesund gebliebenen mathematischen Verstand noch nie an sich um die Wahrheit der Parallelensätze gehandelt hat. Im letzten Grunde und für uns, die wir das durchschauen, was den Streitenden unklar blieb, ist die Parallelenfrage nur eine der mathematischen Logik, bezieht sich also nur auf die Beweisbeschaffenheit und auf das, was dabei natürlicher- und zweckmässigerweise zum axiomatischen Ausgangspunkt zu machen ist. Wo man aber, wie der Professor Gauss,

den räumlichen Sachverhalt selber bezweifelt und angeblich durch eine andere Vorstellung ersetzt hat, da ist man widersinnig verfahren, und derartigen Erscheinungen gegenüber haben wir unsere Diagnose, die auf mathematische Verstandesverrückung lautet, noch nie zurückgehalten.

Im Studium wird man sich viel Mühe und Unsicherheit ersparen, wenn man uns bezüglich dieser und ähnlicher diagnostischer Kennzeichnungen vorläufig auch da folgt, wo man, wie bei den ersten Selbsteinführungen in das Gebiet, noch nicht dazu gelangt sein kann, unsere einschlagenden ausführlichen Begründungen und Charakteristiken eingehend zu würdigen.

196. Da die Maassbestimmungen der Ausdehnungsverhältnisse geometrischer Gestalten schliesslich das Hauptziel des ganzen betreffenden Gebiets bilden, so wird man in dieser Richtung viel unnütze Bemühungen ersparen, wenn man gleich von vornherein jenen natürlichen Weg einschlägt, der sonst fast nur in der höhern Geometrie betreten wird. Man muss sich nicht davor scheuen, die Grössen sofort durch die Häufung unbeschränkt kleiner Maasseinheiten zu bestimmen, also beispielsweise die Inhalte der Figuren aus Bestandtheilen zusammenzusetzen, in denen alle oder einzelne Dimensionen zunächst als sehr klein und überdies noch derartig gedacht werden, dass diese Kleinheit in beliebiger Grenzenlosigkeit gegen Null hin gesteigert werden könne. Auf diese Weise verfährt man nicht etwa nur im Sinne einer logisch zurechtgesetzten Cavallerischen Methode, sondern bethätigt das natürliche und in vielen Fällen für die Auffindung auch unumgängliche Princip, welches in der Geometrie der Curven längst Geltung hat und dort nur durch den Mangel einer strengen Logik des unbeschränkt Kleinen, d. h. durch die Einbildung des Unendlichkleinen verunstaltet wird. Sobald jene Logik in dem Sinne geordnet ist, über den wir uns in Nr. 138 ausgesprochen haben, kann nicht mehr davon die Rede sein, dass die Operation mit unbeschränkt kleinen Elementen der Grössen irgend einen Mangel habe und nicht die strenge Evidenz mit sich bringe, die in dem unmittelbaren Verfahren mit ganzen und bestimmten Grössen und Grössentheilen gewonnen wird. Der Unbegriff des Unendlichkleinen mit seiner Absurdität findet sich ja ausgemerzt, und er allein trug die Schuld der logischen Unsicherheit.

Die Einführung des unbeschränkt Kleinen in die ersten Grundlagen der Geometrie entspricht einem natürlichen Bedürfniss des

Denkens und trägt ausserdem dazu bei, die bis jetzt vermisste Einheit der Methode zwischen den niedern und höhern Gebieten der Mathematik herzustellen. Das Naturgemässe der Zerlegung der Grössen und Gebilde in solche kleine Bestandtheile, welche die Regel der Zusammensetzung und Veränderung erkennbar machen, ist ein Ausweg, zu dem der Verstand ganz unwillkürlich und vor allen andern Verfahrungsarten gelangt. Messen kann man eben nur mit Maasseinheiten, und wenn es sich um mehrere Dimensionen handelt, so muss man zuerst auf eine einzige achten und mithin eine Absonderung der in Frage kommenden Ausdehnungen vornehmen. Um mehrere Dimensionen handelt es sich aber nicht blos bei Flächen und Körpern, sondern auch im Laufe krummer Linien, und hier dient das Zurückgehen auf eine unbeschränkt kleine Maasseinheit dazu, um die Länge als solche in Absonderung von der Richtungsänderung erfassbar zu machen. Die kleinen, annähernd graden Elemente spielen also hier eine ähnliche Rolle, wie die linienartigen Parallelogramme oder Parallelepipeden bei der Inhaltsbestimmung der Flächen und Körper. Logisch vollkommen zulänglich wird aber diese natürliche Methode dadurch, dass sich einfürallemal feststellen lässt, wie eine solche Annäherung eine unbeschränkte sei, und so wird Mehr als die Strenge der alten Exhaustionsmethode mit dem Naturgemässen der unwillkürlichen Gedankenbewegung und mit einem zugleich äusserst abgekürzten Raisonnement vereinigt.

Uebrigens giebt es auch in der niedern Geometrie Fälle, in denen der natürliche Weg wohl durch irgend eine Verhüllung verleugnet, aber doch thatsächlich und in Wahrheit nicht umgangen wird. Man müsste beispielsweise die Längenbestimmung des Kreisumfanges oder die Inhaltsvergleichung von Kegel, Cylinder und Kugel aus der Elementargeometrie hinausweisen, wenn man von den unbeschränkt kleinen Elementen keinen Gebrauch machen wollte. Auch das Alterthum hat mit ihnen, wenn auch etwas unbehülflich, operiren müssen und jede zur Exhaustion bestimmte Theilung hat diesen Sinn gehabt. Man hat daher keinen Grund, die natürlichen Erleichterungen, die man bei schwierigeren und höheren Aufgaben als gute Wege gelten lassen muss, an der Schwelle der Mathematik zu ächten. Die Aechtung sollte sich lieber gegen das Unwesen kehren, welches mit den infinitesimalen Begriffen nach Leibniz' Vorgang getrieben worden ist.

Es sei noch bemerkt, dass die Benutzung der kleinen Be-

standtheile als Maasseinheiten schon einen Schritt mehr bedeutet und eine Abkürzung mehr ergiebt, als deren sonstige Rolle in der Eigenschaft gleichgültiger Hülfsgrössen. Da man mit jeder Einheit, wenigstens in Gedanken, messen kann, so darf man sie auch unbegrenzt klein setzen und hat hiedurch den Vortheil, alle Reste, die bei der Ausmessung bleiben mögen, ebenfalls unbeschränkt klein machen zu können und so die einfachste Einsicht in die unbeschränkte Genauigkeit der Erschöpfung der gegebenen Grössen zu gewinnen. Ein derartiges Verfahren gilt für alle Grössenarten und passt sich daher auch vortrefflich den analytischen Vorstellungen von der allmäligen Grössenveränderung und deren Häufung aus beliebig klein gewählten Elementen an. Niedere Mathematik und Analysis des Veränderlichen erhalten auf diese Weise einen gemeinsamen Ausgangspunkt, so dass nicht blos das Studium von vornherein erleichtert und abgekürzt, sondern auch ein wesentlicher Schritt zu einem stofflich und methodisch einheitlichen System von gleichartigen Principien und Elementen der gesammten Mathematik gethan wird.

197. Die Bewegung ist ein unentbehrliches Mittel der Veranschaulichung von Verhältnissen, die sonst in ihrer Starrheit kein lebendiges Verständniss, ja oft überhaupt kein Verständniss finden können. Man wird daher schon von vornherein in den geometrischen Grundlagen die stetige Ortsveränderung als Darstellungsmittel benutzen und sich durch die von keinen Scrupeln behinderte systematische Anwendung dieser grossen Hülfe den Weg ausserordentlich erleichtern können. Es versteht sich hiebei von selbst, dass die Bewegung hier noch nicht phoronomisch, also nicht mit Rücksicht auf bestimmte, ihr vorgeschriebene Geschwindigkeiten eine Rolle spielt. Es wird sich immer nur darum handeln, dass der Weg aus einer Lage in die andere irgendwie zurückgelegt werde, und es können als besondere Vorschriften für die Bewegung höchstens Gleichzeitigkeitsrücksichten, also doch im Grunde nur gleichzeitig festzuhaltende Lageverhältnisse der Gebildetheile in Frage kommen. Die Bewegung hat also hier stets nur die Bedeutung eines stetigen Ueberganges aus einer Lage in die andere. Erst mit der Ergänzung der eigentlichen Geometrie durch die rein mathematisch construirbare Bewegungslehre kommt die Zeit als vierte Dimension in Betracht, und es wird auf diese Weise die Mathematik des blos Räumlichen durch diejenige der auch zeitlich bestimmten Entstehung der Gebilde

abzuschliessen sein. Um diese Vollständigkeit in der Behandlung des gesammten von der Materie und den Kräften unabhängigen Gebiets vorzubereiten, ist die grundsätzliche Einführung der stetigen, aber nicht nach Geschwindigkeiten bestimmten Lageveränderungen in die ersten Grundlagen der Geometrie ein passendes Mittel. Jedoch auch ohne diesen entfernteren Zweck, der die Uebereinstimmung aller Theile des Systems fördert, würde schon an sich für die leichteste Art der Selbstvergewisserung die Bewegung nicht zu entbehren sein. Je unbefangener man daher mit diesem Mittel bei dem Hervorbringen und Beweisen operirt, um so leichter wird man sich das Verständniss und das Festhalten der erheblichsten Vorstellungen und Sätze zu machen vermögen.

Was im Räumlichen als Bewegung eine Rolle spielt, muss für Zahlen und für Grössen überhaupt ein Gegenstück erhalten. Dies ist die Veränderung, und man kann nicht früh genug jener Vorstellungsart huldigen, vermöge deren man alle Grössen als durch Häufung kleiner Theile entstanden ansieht. Wie die Zahl als Häufung von Einheiten zu begreifen ist, so muss die stetige Grösse, wenn wir das von ihr vorgestellte Ganze gehörig verstehen wollen, für den Gedanken abgestuft und so als Ergebniss eines Zuwachsens von Theilen aufgefasst werden. Die Zählung solcher Theile, die man beliebig und unbeschränkt klein wählen kann, ist die einzige klare Idee, durch welche das gehäufte Gleichartige, worin ja die Grösse überhaupt zu suchen ist, mit dem unmittelbar weit klareren Begriff der eigentlichen und ganzen Zahl in Beziehung tritt. Der nebelhafte Begriff einer Zahl überhaupt, welche einem in einer stetigen Grössenreihe gegebenen Werthe entspräche, ohne in Ziffern ausdrückbar zu sein, kann vor einer gründlichen Untersuchung nicht bestehen. Man wird sich daher nicht nur die Einsicht in die Elemente der Arithmetik erleichtern, sondern auch für alle späteren Conceptionen einen sichern Compass gewinnen, wenn man sofort davon ausgeht, dass beispielsweise der Begriff der Multiplication mit einem Bruch nicht anders einen klaren Sinn erhält, als wenn man darin eben nur die Verbindung von zwei Verfahrungsarten, nämlich der Multiplication und der Division, anerkennt. Statt dessen hat man sich bisher gewöhnt, in einem Bruch unmittelbar eine Zahl nach Art einer einheitlichen Grösse zu sehen, während er doch nichts weiter bedeutet, als die Theilung einer oder mehrerer Einheiten.

Da man schliesslich in der Wirklichkeit alle Brüche durch Einführung hinreichend kleiner Untereinheiten auf ganze Zahlen zurückführen könnte, so ist klar, was es mit dem nebelhaften Begriff einer Zahl, die das Stetige decke, und mit dem zugehörigen Unbegriff einer stetig interpolirten Zahlenreihe für eine Bewandtniss habe. Es ist hier einfach eine jener voreiligen Erdichtungen und Verdinglichungen im Spiele, zu welcher die Modernen, und zwar diesmal nicht nach dem Vorgang der Alten, sondern im Gegensatz zu den strengeren antiken Vorstellungsarten, auf Veranlassung oberflächlich aufgefasster Uebereinstimmungen des Rechnungsschematismus gelangt sind.

Jede Grösse ist entweder eine benannte oder eine blosse Zahlengrösse. Ein Drittes giebt es nicht, und hieraus folgt, dass man die Vorstellung aller stetigen Grössen auf einen anschaulichen Typus, also auf die Raumgrösse zurückführen müsse, da die Zahlen an sich selbst über das Wesen des Stetigen keinen Aufschluss geben. Von diesem Aufschluss abgesehen, wird aber die Zurückführung jeder Vorstellung von einem Grössenverhältniss auf eigentliche Zahlen das letzte Erforderniss sein, dem wenigstens mit unbeschränkter Annäherung stets zu entsprechen ist. Auf diese Weise werden Algebra und Analysis nicht nur zu Verallgemeinerungen der Arithmetik, sondern auch zu Deckungsmitteln aller wirklichen Zahlen- und Grössenbeziehungen, die man zunächst im Räumlichen und Zeitlichen und dann weiter im Materiellen und Mechanischen zu betrachten und zu zergliedern haben möge. Man könnte die Analysis eine Algebra des Veränderlichen nennen; denn der wesentliche Unterschied in dem Stufenfortschritt vom niedern zum höhern Calcül besteht darin, dass in dem letzteren gewisse Grössen zugleich eine unbeschränkte Zahl von Werthen oder, was noch mehr sagt, den ganzen Lauf denkbarer Veränderung vorstellen, während andere Grössen neben dieser Veränderung beständig denselben Werth behalten. Um nun den Schritt in dieses höhere Gebiet zu thun, braucht man weit weniger einen umfangreichen Stoff niederer Vorkenntnisse, als vielmehr die Gewöhnung an die neuen methodischen Grundvorstellungen, die freilich nach unserer Ansicht schon in die ersten Grundlagen der Mathematik eingeführt sein sollten. Man kann für blos praktische Zwecke die mehr speculativen Künste der Algebra getrost auf sich beruhen lassen; denn alles Praktische dieses Gebiets, wovon man in den Anwendungen häufigen Gebrauch

zu machen hat, beschränkt sich auf die Gleichungen des ersten und zweiten Grades und allenfalls noch auf eine Vorstellung von der allgemeinen, in Zahlen annäherungsweise ausführbaren Lösbarkeit aller Gleichungen durch eine Art systematisirter Versuchsmethode.

198. Für die höhere Analysis sind die Lehrmittel in einigen wesentlichen Richtungen etwas besser angethan, als in der niedern Mathematik. Man braucht hier nicht das Loos entscheiden zu lassen, welche Art von Buchcursus man zu Hülfe nehmen solle. Die Differential- und Integralrechnung ist von den Franzosen, unter dem ihnen geläufigen Titel eines Cursus der Analysis, in der That mit einigem Geschmack bearbeitet worden. Im Anschluss an die Bedürfnisse der Pariser polytechnischen Schule sind wenigstens leidliche und brauchbare Arbeiten geliefert worden. Die grossen Schulgründungen der ersten Revolution, von denen als eine Art Tradition die später immer mehr verstümmelte polytechnische Schule ausging, hatten nicht nur durch ihren allgemeinen Geist, sondern auch dadurch, dass Männer wie Monge und ein so seltenes Genie wie Lagrange ihnen ihre Kräfte widmeten, eine Ueberlieferung begründet, die selbst von den Rückläufigkeiten mehrerer Menschenalter nicht ganz hat zunicht gemacht werden können. Lagrange hatte der Analysis und der Mechanik in seinen Musterwerken eine so gewählte Form gegeben, wie sie noch niemals vorhanden gewesen war. Die weitschichtigen Werke Eulers, die bis dahin für das eingehendere Studium am ausgiebigsten gewesen waren, sahen sich hiedurch in die zweite Linie versetzt. Dieser Anstoss zum Bessern wirkte in der französischen Schule, wenn auch unter Abschwächungen, fort. Für den Durchschnittsbedarf des Unterrichts musste man Curse herstellen, in denen sich die älteren Gewohnheiten mit der neuen Formgebung vereinbarten, und in denen die individuelle Originalität von Lagranges Gedankengang zu einem erheblichen Theil abgestreift wurde. Es scheint so etwas das unvermeidliche Schicksal aller grossen Leistungen zu sein; aber in diesem besondern Falle mag es zur Entschuldigung dienen, dass in dem Vorbilde die Rücksicht auf die bequemere und übliche Zeichensprache sowie auf die gemeineren Veranschaulichungsbedürfnisse wenigstens zum Theil fehlte. Lagranges Theorie der analytischen Functionen und dessen zugehörige Vorträge über den Functionencalcül sind zwar noch heut die besten Grundbücher, um Differential- und Integral-

rechnung nebst deren Anwendung in der Geometrie und Mechanik tiefer zu studiren, lassen aber die Strenge, die ihnen auch jetzt noch ausschliesslich eigenthümlich geblieben ist, mit der Unbequemlichkeit erkaufen, die ein wenn auch nur vorläufiger Verzicht auf die gemeine Differentialnotation mit sich bringt. Hiedurch ist es spätern Lehrbüchern leicht gemacht worden, ungeachtet des niedern Ranges ihrer Bearbeitungsart, für den praktischen Lehrgebrauch denjenigen Platz einzunehmen, der sonst in grösserem Maasse den Werken des Genies hätte zufallen sollen. Für die mehr handwerksmässige Erlernung würden allerdings auch unter allen Umständen die schöpferischen Werke zuviel Hervorragendes enthalten, und es wird in dieser Beziehung daher wohl immer dabei bleiben, dass die gemeineren Zusammenstellungen von jener Menge goutirt werden, die nicht denken, sondern nur für Amt und Brod hinreichend gedrillt sein will. Trotzdem würde aber der Vertrieb der niedriger gearteten Lehrbücher nicht allen Raum einnehmen können, wenn die classischen Leistungen mehr Lehrrücksichten genommen und ihnen mit dem übrigen Inhalt auch ein bequemeres Schulungssystem gelungen wäre. Seien wir jedoch zufrieden, dass in Frankreich wenigstens eine mittelbare Wirkung von den Thaten Lagranges auch in den späteren Lehrbüchern der polytechnischen Schule zu verspüren gewesen ist. Ein Cursus der Analysis, wie derjenige Naviers, ist zwar eben nur ein Lehrbuch, aber doch eines von seltener Sorgfalt und Gediegenheit. Obwohl oder vielmehr weil es nicht zu den allerneusten gehört und durch manche überflüssige und verschrobene Kleinigkeit des Tages nicht verunziert werden konnte, zeichnet es sich vor neuern Concurrenten vortheilhaft aus. Es giebt andere ähnliche Curse der polytechnischen Schule, die bisweilen auch von gewissermaassen namhaften Mathematikern, wie beispielsweise von Sturm, herrühren; aber hier kann schon der einzige Umstand, dass nach dem Tode erst irgend ein Anderer die Formulirung besorgt und eine unbefriedigende Redaction geliefert hat, wenigstens formell die Waage nach der andern Seite ausschlagen lassen. Naviers Buch, welches in unmittelbarer Anlehnung an den Unterricht als Résumé de leçons entstanden war, ist deutsch unter dem Titel einer Differential- und Integralrechnung in 4. Aufl. Hannover 1875 und zwar mit solchen Anhängen des Uebersetzers erschienen, dass auch dem Liebhaber krauser, sich bis in die Gauss-Riemannsche Imaginärenconstruction verirrender Tagesmoden und Spielereien

nichts mehr zu wünschen übrigbleibt. An sich selbst hat der Text Naviers aber stets einen gesunden Geist und ist frei von unnatürlichen Geschraubtheiten der Auffassung und Verkünstelungen der Darstellung, denen man oft grade in neuern Erzeugnissen, wie beispielsweise in dem Cours d'analyse von Hermite (Bd. I, Paris 1873) am meisten begegnet.

Die deutsche Uebersetzung des Navierschen Cursus ist mit Recht wiederholt gedruckt und auf technischen Hochschulen gebraucht worden. Wer ein deutsch geschriebenes Buch haben muss, wird davon noch am besten befriedigt werden. Wem aber französische Darstellung keine Unbequemlichkeit verursacht und wer zugleich handgreiflich praktische Vortheile, wie die Beifügung eines kurz gefassten Repetitorium, mitberücksichtigen will, wird die grade laufende neuste Auflage des Sturmschen Cursus vorziehen. Was es mit diesem auf sich hat, welche Zeit und welchen Standpunkt er vertritt, darüber finden sich nähere Angaben sowie anderes Charakteristische in unsern „Neuen Grundmitteln".

199. Die besondern Eigenschaften der vorher angedeuteten Art neuerer französischer Lehrcurse lassen natürlich viel zu wünschen übrig, und namentlich stimmen sie nicht nur mit allen Lehrbüchern, sondern auch mit allen sonstigen Gesammtabhandlungen des Gebiets dahin zusammen, dass man in Grundlegung und Ausführung keine exacte Logik des Infinitesimalen antrifft. Wie sollte dies auch der Fall sein, da selbst Lagrange den Begriff des Unbeschränktkleinen nur umgangen hatte und sonst ja überhaupt kein späterer unter den wenigen maassgebenden Mathematikern sich um die Erledigung der fraglichen Schwierigkeiten irgend welche Sorge, geschweige eine erfolgreiche Sorge gemacht hat. Die Cauchy, Gauss und Jacobi haben überhaupt nur in Einzelheiten gearbeitet und es hat ihnen jener Sinn für logische und systematische Eleganz gefehlt, der in einem Lagrange die Beschränkung auf Stückwerk überwand und ihn für die antike Strenge eintreten liess. Ja es hat ihnen überall der Geist des 18. Jahrhunderts mit seiner logisch aufklärenden Richtung gefehlt; denn der Legitimist und Jesuitenlehrer Cauchy und der religiös beengte, auf Fürstenprotection und den Hofrathstitel eitle Maurersohn Gauss stellten wahrlich keine Typen im Sinne des 18. Jahrhunderts vor. Bei dem Hebräer Jacobi aber stand die Neigung für einzelne isolirte Verästelungen, um nicht zu sagen für das Abgerissene der Wissenschaft, dem abschliessenden Denken, wie

es ein Lagrange geübt hatte, antipathisch entgegen, und es dürfte kein geringer Theil hievon auf die Raceneigenschaft zu verrechnen sein, obwohl diese bei einer Capacität nicht so übel wirken konnte, wie bei den stark jüdisch gemischten Epigonen von heute, unter denen der Sinn für das Ganze, für strenge Grundlegung und für klare Begriffsfassung vollends abhanden gekommen ist. In der That ist die gesammte Art, die Dinge zu betrachten und zu behandeln, möge sie nun günstig in der Geisteshaltung einer Epoche wurzeln oder in angestammten und ererbten Neigungen eine Missleitung erfahren, keineswegs für die Mathematik gleichgültig. Der Charakter der Denkweise lässt sich nicht derartig theilen, dass die Rückständigkeiten oder Rückläufigkeiten in der einen Richtung das Verhalten in einer andern völlig unberührt liessen, und so kann denn überhaupt das 19. Jahrhundert auch in der formellen Behandlung der Mathematik als eine Zeit des Rückschlags gegen bessere Bestrebungen und als eine Phase der Erschlaffung des logischen und systematischen Geistes angesehen werden. Der vorangehende Aufschwung, wie er besonders durch Lagrange vorgestellt ist, hatte das Ziel noch nicht völlig erreicht, und da man nichts unmittelbar Uebernehmbares blos weiter zu geben hatte, so ist man natürlich wieder nach rückwärts gelangt.

Dieser Rückgang zeigte sich nun in der von den französischen Lehrbüchern am meisten befolgten Methode noch am erträglichsten. Er verleugnete zwar die volle Höhe und Schärfe der Betrachtungsart von Lagrange; aber er führte doch wenigstens zu nichts Schlimmerem als zu einer unexacten Newton-d'Alembertschen Grenzmethode, mit welcher sich der Verstand durch Beseitigung der falschen Bestandtheile allenfalls zurechtzusetzen vermöchte. Fast in allen Cursen der angedeuteten Art, einschliesslich des Navierschen und des Sturmschen, findet man eine Zurüstung sogenannter endlicher Differenzen an die Spitze der Nachweisungen gestellt. Diese bestimmten Differenzen, die gewöhnlich mit dem grossen Delta bezeichnet werden, unterliegen nach der Aufstellung der Formeln einer unbeschränkten Verkleinerung, indem sie, wie man sich ausdrückt, im Uebergange zur Grenze Null verschwinden. Für diesen Act des Verschwindens werden sie dann durch die eigentlichen Differentialzeichen ersetzt. Dieses ganze Verfahren bleibt mehr oder minder unexact, obwohl es den Versuch macht, die Erdichtung des Unendlichkleinen abzuthun. Jene Differenzen,

von denen man ausging, werden nämlich nichts, was sie nicht schon waren; denn zwischen ihnen und der strengen Null giebt es kein Mittelding. Wenn sie verschwunden sind, so ist auch kein eigentliches Differential mehr vorhanden. Man würde daher viel deutlicher sein, wenn man die kleinen Differenzen sofort mit dem Differentialzeichen einführte und dann nichts weiter darlegte, als dass diese kleinen Differenzen mit der Eigenschaft gedacht werden sollen, eine unbeschränkte Verkleinerung gegen Null hin erfahren zu können. In der Hinzufügung dieser Eigenschaft liegt der ganze Charakter des Differentials; übrigens ist es nur eine kleine Differenz. Die mystische Zuflucht zum Acte des Verschwindens, zum Uebergang zur Grenze, oder wie man sonst die vermeintliche Station vor dem Eintreffen bei Null oder vor dem strengen Zusammenfallen mit der Grenze nennen mag, — dieser ganze Absurditätenkram wird alsdann beseitigt, und schon die Symbolik des Raisonnements zeigt dann in ihrer Einfachheit nicht mehr jene unlogische Doppelvorstellung. Allerdings wird man im eigentlichen Calcül mit bestimmten Differenzen, bei welchen die unbeschränkte Verkleinerung eben ausgeschlossen sein soll, zur Unterscheidung auch eine andere Notation brauchen; aber es ist eine Thorheit, in der Differentialrechnung die kleinen Grössen oder Strecken nicht gleich mit der Eigenschaft zu denken, blos beliebige Repräsentanten für beliebig kleiner wählbare Elemente zu sein. Eine derartige Correctur der sogenannten Grenzmethode ist also nöthig, um die Grundentwicklungen der betreffenden Lehrbücher logisch einigermaassen zurechtzustutzen, und der Studirende selbst wird zu seiner eignen Orientirung diese Verbesserung vornehmen müssen.

Der Cardinalfehler der Grenzmethode ist schon bei d'Alembert selbst in seinem Encyklopädie-Artikel „Différentiel“ recht sichtbar, obwohl er sich nun schon weit länger als ein Jahrhundert immer wieder erneut. Er besteht einfach darin, die dem Nullfall entsprechende Grenze dem Differentialquotienten streng gleich zu setzen, also in der überlieferten Notation die Gleichung $lim \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{dy}{dx}$ für eine Lösung der Schwierigkeit zu halten, während grade sie den Widerspruch und das Falsche einschliesst. Lagrange, der vom Begriff der Grenze hier nichts wissen wollte, beging dennoch in seiner zweiten Auflage der Functionentheorie denselben Fehler; denn seine abgeleitete Function y' ist nichts

Anderes als die scharfe Grenze, und dennoch gestattet er sich bei Vergleichung seiner Functionenrechnung mit der Differentialrechnung die Vertauschbarkeit von y' mit $\frac{dy}{dx}$ als Folge quantitativer Gleichheit beider Ausdrücke hinzustellen. Nun ist aber die Gleichung $y' = \frac{dy}{dx}$ thatsächlich dieselbe wie $lim \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{dy}{dx}$ und beide sind unrichtig. Nur unter einer einzigen Voraussetzung, die aber nicht statthat, würden sie richtig sein, wenn nämlich $dy = 0$ und $dx = 0$ wären. Dies können sie aber nie sein, solange sie überhaupt noch Grössen und differentielle Elemente bleiben. Die richtige Gleichung ist daher $y' = lim \frac{dy}{dx}$. Ein $\triangle y$ hat nur dann einen Sinn, wenn es nicht unbeschränkt abnehmen darf; sonst ist es keine beschränkt kleine Differenz mehr, und die Anweisung einer bestimmten Grösse steht im Widerspruch mit der thatsächlich als beliebig vorgestellten Verkleinerung gegen die Nullgrenze. Alsdann ist es aber auch verkehrt, die Bezeichnung $\triangle y$ anzuwenden. Es ist dann eben nichts weiter als richtig, von vornherein dy zu schreiben, indem man hiebei an eine Differenz denkt, die mit der Eigenschaft behaftet ist, jeglichen Grad von Kleinheit ohne jede Beschränkung vertreten zu können und zu sollen. Es ist also dy eine ganz gemeine Differenz von irgend einer Grösse, die man nur aus Zweckmässigkeitsgründen gleich verhältnissmässig klein ansetzt, um annähernd sichtbar zu machen, dass es ausser der gemeinen Differenzeigenschaft sich um jene schrankenlose Verkleinerbarkeit handeln soll. Eine richtige Gleichung, welche das partielle Hängenbleiben Lagranges in einem Stück verkehrter Ueberlieferung verbessert, und natürlich zugleich den d'Alembertschen Fehler der Grenzmethode mitausmerzt, ist demnach $y' = \frac{dy}{dx} - \varepsilon$, wo ε eine Kleinheit von unbeschränkter Art bezeichnet. Die grundsätzliche Grenzmethode aber würde sich dadurch berichtigen können, dass sie $lim \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} - \varepsilon$ schriebe; andernfalls behält sie zwei Grenzbegriffe, einen scharfen und einen stumpfen, wie wenn die Geometrie die wahre und unzweideutige Linie von einer Dimension mit einer solchen gleichsetzen wollte, bei der auch nebenbei Breite und Dicke in Anschlag kommen.

200. Mit der blossen Rationalisirung einer schief gerathenen Grenzmethode ist jedoch für die Klarheit der Auffassung noch nicht Alles erreicht. Der Lernende muss noch daran gehen, nach unsern oben erwähnten Auseinandersetzungen sich zwei Systeme der Behandlung verständlich zu machen, deren Beisammen erst eine vollständig genügende Logik der Differential- und Functionenrechnung liefert. Das Verfahren mit eigentlichen Differentialen muss als eine Abkürzungsmethode angesehen werden. Mit dem viel zu unbestimmten Begriff Carnots von unvollkommenen Gleichungen kommt man aber nicht aus. Carnot hat allerdings das Verdienst, den Versuch gemacht zu haben, die unmittelbar mit Differentialien operirende Rechnung dadurch zu rechtfertigen, dass er sozusagen hinkende Gleichungen annahm. Zu völlig scharfen und zulänglichen Begriffsfassungen gelangte er aber nicht; ja er wusste sich nicht einmal mit der Eulerschen Meinung abzufinden, nach welcher man sich die Differentiale auch als strenge Nullen denken dürfte. Ein derartig schwankendes Verhalten ist nun aber mit entschiedenen und klaren Begriffen unvereinbar. Man muss die Differenzen nehmen, wie sie auch praktisch in den Anwendungen vorkommen. Die thatsächliche Rechnung kürzt bald ab, bald lässt sie die Zeichen ohne Veränderung, also auch in ihrem ursprünglichen Sinne stehen. Der Werth des wirklich berechneten Differentialquotienten von x^2 ist $2x$, also durch Weglassung abgekürzt. Schreibt man nun aber in diesem Falle $\frac{dy}{dx} = 2x$, so ist an $\frac{dy}{dx}$ nichts verändert und nichts abgekürzt. Die strenge Gleichung wäre $lim \frac{dy}{dx} = 2x$. Auf der Vernachlässigung dieses Unterschiedes beruht die hiedurch selber zweideutig gewordene Zeichensprache aller Differentialgleichungen.

Um in diese Doppeldeutigkeit der Zeichen Klarheit, also streng zutreffende Gegenseitigkeit des Sinnes zu bringen, kann man unmittelbar das Gleichheitszeichen in diesen Fällen als das Zeichen einer unbeschränkten Annäherung an die Gleichheit betrachten und demgemäss mit einer abändernden Markirung versehen denken. Alsdann lässt sich einfürallemal nachweisen, wie das Raisonnement und die Gesetze der Operationen ebenso durch unbeschränkt kleine Ungleichheiten wie durch strenge Gleichungen vermittelt werden können. So bleibt das Wesen der unmittelbaren Rechnung mit eigentlichen Differentialien gewahrt, und

hier hat man sich nicht zu scheuen, sondern im Gegentheil daran zu gewöhnen, die kleinen Elemente selbst ins Auge zu fassen. Man muss sich von der durch die Lehrbücher verbreiteten Beengtheit losmachen, die Differentiale nur in Quotienten oder nur als Factoren solcher Quotienten annehmbar zu finden. Der gründlich Lernende muss sich durch eigne Nachhülfen und Berichtigungen über die Schranken der lehrbuchmässigen Vorstellungsart hinwegheben, so dass ihm das Verfahren mit jedem isolirten Differential geläufig und die Veranschaulichung des Differentials durch eine Zahleneinheit oder durch einen Bruch, in geometrischer Anwendung aber durch ein räumliches Theilchengebilde, zur Hand ist. Wenn man nämlich die Zahlenreihe unbeschränkt ins Auge fasst und die veränderlichen Grössen in einer Lage denkt, wo sie schon hohe Zahlenwerthe vorstellen, so kann man die Einheit, natürlich mit Rücksicht auf deren mögliche Untertheilung, als eine geeignete Veranschaulichung eines differentiellen Theils der Gesammtgrösse sehr wohl brauchen, und diese Betrachtungsart hat den Vortheil, ganz abstract zu sein. Doch bleibt die räumliche Veranschaulichung das einzige unmittelbar für die Stetigkeit der Verkleinerungen und der Grössenhäufungen zureichende Bild. Allerdings ist die Stetigkeit keine unmittelbare Voraussetzung; denn es ist nichts weiter nöthig, als dass man sich jede der Einheiten der Zahlenreihe ins Unbeschränkte untergetheilt, also aus beliebig kleinen Brucheinheiten zusammengesetzt denken dürfe. Diese rein aus dem Gedanken gesetzte, unbegrenzte Einschaltbarkeit von Brucheinheiten genügt, um für die Differentialrechnung einen angemessenen Zahlenstoff zu liefern, und man würde auch übrigens logisch sicherer gehen, wenn man im Räumlichen und Zeitlichen sowie in allen Anwendungen auf die Wirklichkeit an Stelle des oft umnebelten Begriffs der Stetigkeit nur denjenigen einer im Gedanken zunächst unbeschränkten Theilbarkeit und Untertheilbarkeit, also der Setzung von Maasseinheiten und Untereinheiten zuliesse. Doch hievon hängt die Hauptsache, die uns hier vornehmlich angeht, nicht ab. Es war nur darzuthun, dass man sich unter allen Umständen die isolirten Differentiale auch wirklich vorstellen könne und müsse.

Das zweite System, durch welches die erste, an sich selbst genugsame Verfahrungsart eine für besondere Zwecke wichtige Ergänzung und Erweiterung erfährt, ist dasjenige, in welchem die Differentiale als blosse Hülfsgrössen zum wirklichen Verschwinden

gebracht und nur völlig bestimmte Functionen ohne jegliches Annäherungselement übriggelassen werden. Es ist dies die ungemischte Functionenrechnung, d. h. das Operiren mit abgeleiteten und mit Stammfunctionen. Lagrange hat dieses strenge System geschaffen und durchgeführt, jedoch ohne die nachbarlichen Beziehungen zu dem andern System in richtiger Weise zu kennzeichnen. Er hat es nämlich nicht sichtbar werden lassen, dass ohne eigentliche, aber richtig gedachte Differentialien die ganze Rechnung mit abgeleiteten Functionen nicht vorbereitet und mithin auch nicht ausgeführt werden kann. Nicht darauf kommt es an, ob man von der Reihenentwicklung der Functionen ausgehe, sondern darauf, dass man in der Reihe oder in jeder andern Functionsform Hülfsgrössen anwenden muss, welche unter allen Umständen Differenzen sind, an deren Stelle man schliesslich Nullen setzt. Solche Differenzen, die Null werden können, sind aber, solange sie noch nicht Null sind, nichts Anderes als Differentiale, mögen sie nun so gross oder so klein gedacht werden als sie wollen; denn nach Seiten der Vergrösserung kann nur die Natur der Function selbst oder der Zweck, ihren Lauf gehörig zu zergliedern, Grenzen setzen. Wenn also hienach zur Differentialrechnung die Berechnung der abgeleiteten Functionen gleichsam hinzutritt, und wenn ebenso der Integralrechnung die Ermittlung der Stammfunctionen aus den abgeleiteten entspricht, so ist dies eben keine überflüssige Verdoppelung, sondern ausser dem Gemeinschaftlichen, was beide Systeme enthalten, ein wirklich neuer Gewinn. Es ist nämlich gar nicht möglich, mit den eigentlichen Differentialien die rein punktuellen Begriffe der Geometrie und Mechanik zu decken. Die Tangente im antiken Sinne und die einem ausdehnungslosen Zeitpunkt entsprechende Geschwindigkeit lassen sich nicht durch Annäherungen exact definiren, und man müsste erst alle geometrischen und mechanischen Begriffe selbst mit entsprechenden geometrisch differentiellen Annäherungsbegriffen vertauschen, damit die Unbestimmtheit des Calcüls mit der Unbestimmtheit der Anwendungsgegenstände zusammenträfe. Dies hat man auch beispielsweise gethan, indem man die Tangente als die Verlängerung eines Curvenelements definirte, und man muss gestehen, dass man nur die Wahl hat, alle Sehnen, welche durch das Curvenelement von dessen einem Endpunkt gezogen werden können, summarisch so zu sagen als Tangentiale gelten zu lassen, oder aber die Analysis durch strenge Benutzung der

eigentlichen Functionenrechnung fähig zu machen, den genauen und völlig bestimmten Begriffen der alten Geometrie und den analog sich aufdrängenden Begriffen der Mechanik zu entsprechen.

Hier ist nun der Punkt, wo das Studium von Lagranges Functionentheorie und von dessen Functionencalcül zur unumgänglichen Nothwendigkeit wird. Wenn man nämlich auch die Hülfsgrössen ausmerzen und so von den Differentialquotienten den strengen Uebergang zu den ungemischten Functionen machen und in dieser Beziehung die besondern Wendungen Lagranges entbehren kann, so bedarf man doch einer Nachweisung, wie die strengen Begriffe der Geometrie und Mechanik grade nur den von den unbeschränkt kleinen Grössen befreiten Functionen entsprechen. Eine derartig durchgeführte Nachweisung ist aber überhaupt, geschweige in classischer Form, nur in der „Theorie der analytischen Functionen" anzutreffen. Dieses Grundwerk liefert eine vollständige Darlegung aller wesentlichen Functionenbeziehungen nebst den hauptsächlichsten Anwendungen auf die Grundbegriffe der höhern Geometrie und Mechanik. Die Ausschliessung der Differentialnotation ist in ihm wesentlich; und der Text verliert alle Harmonie mit den Formeln, wenn man, wie der deutsche Uebersetzer Crelle (der unter dem ungeschickt irreführenden Titel „Lagranges mathematische Werke", 3 Bde. Berlin 1823—24, die Functionentheorie, den Functionencalcül und die Schrift über die Zahlengleichungen, aber nicht die Mechanik lieferte) die gewählte Zeichensprache des Verfassers mit der gemeinen des gewöhnlichen Differentialcalcüls vertauscht. Diese Abstumpfung, welche noch durch die komische Anmaassung vermehrt wurde, dass der Uebersetzer seine vermeintlich erläuternden Ausführungen mitten in den Text von Lagrange einschaltete, macht den Gebrauch der Uebersetzung in diesem Fall zu einem widerwärtigen Nothbehelf und für Diejenigen, welche der Sprachbequemlichkeit wegen nicht von vornherein das Original lesen, wenigstens den Mitgebrauch desselben zur Einsicht der Formeln wünschenswerth. Ohne diese Ergänzung würde nicht etwa blos der ästhetische Eindruck der zweckmässigen Zeichensprache, sondern auch der nur durch die letztere scharf ausgedrückte und gehörig sichtbar gemachte genaue Sinn der Sache eine erhebliche Beeinträchtigung erfahren, die nur schwer dadurch aufzuwiegen wäre, dass der Leser von selbst seine Vorstellungen im Wider-

spruch mit der untergeschobenen alten Symbolik an die neuen, feiner unterscheidenden Begriffe gewöhnte.

Etwas in jeder Beziehung Vollkommenes ist freilich durch das äusserliche Zusammennehmen der Darstellungen Lagranges mit den Nothwendigkeiten einer unmittelbaren aber rationalisirten Differentialrechnung nicht sofort gegeben. Man vergleiche unsere ausführliche Behandlung derselben Frage im Werk über die Grundmittel, sowie auch nebenbei die dort dargelegte Möglichkeit, wenn man will, sogar von der Nullsetzung durch Anwendung einer erweiterten Analogie unserer Werthigkeitsrechnung Abstand zu nehmen. Obwohl man grade auf letzteres Nebenspiel unserer methodischen Wendungen besonderes Gewicht gelegt und es zum Ausgangspunkt von Ausarbeitungen der Hauptpunkte der Differentialrechnung gemacht hat, so sind wir selber doch weit davon entfernt gewesen, es als eine praktische Handhabe zu empfehlen. Wir vertreten vielmehr ein unmittelbares und einheitliches System, in welchem zweierlei Begriffe so zusammen gehören, dass die eine Art von der andern gradezu gefordert wird. Niemand kann nämlich einen richtigen Begriff vom Differential und vom Differentialquotienten haben, wenn er nicht zugleich den vom reinen Coefficienten oder ungemischten Werthe hat. Diese ungemischte Function, die einen festen Werth hat, während die kleinen Differenzen verschiedentlich wählbar sind, heisse nun Grenze oder abgeleitete Function, — sie und nicht der speciellere Gesichtspunkt, der ihr den Namen giebt, ist es, was man braucht. Ohne sie bleibt alles Andere schwankend und vieldeutig. Mit ihr verglichen und von ihr sorgfältig unterschieden, erhalten aber die Differentialquotienten erst ihren wahren, von metaphysischen Erdichtungen befreiten Sinn.

Hienach ist, wie es auch dem automatischen, aber metaphysisch umnebelt gewesenen Gange in der Geschichte der Sache entspricht, dem theoretischen wie dem praktischen Bedürfniss nur dadurch zu genügen, dass man unmittelbar bei den Differentialen bleibt, aber als unentbehrliches Zubehör die ungemischten und festen Werthe einführt. So ergiebt sich eine Rechnung, die nicht einseitig ist, sondern sowohl im Annäherungsstadium als auch mit den festen Werthen operirt. Oft werden grade praktische Ergebnisse in physikalischen Anwendungen nur dadurch zu erzielen sein, dass man in dieselbe Gleichung neben dem reinen Grenzbegriff auch noch den Differentialbegriff einführt und auf den

Unterschied beider voneinander die Schlüsse gründet. Ein solches feineres analytisches Mittel fehlt in allem Bisherigen und musste auch bei Lagrange fehlen. Die Stärke des letzteren bestand in der Umgehung des Differentials und zeigte sich ungemischt nur in der ersten Auflage seiner Functionentheorie, in welcher er nichts von Beziehungen zu unmittelbaren Differentialen aussagte. Unmittelbar vom Differential hatte er nie einen rationellen Begriff, sondern den einer metaphysischen Hypothese. Nun ist aber nach unsern hier und anderwärts gegebenen Beleuchtungen wohl hinreichend sichtbar gemacht, dass man in rein mathematischen sowie in sachlichen Begriffen beiderlei Rechnungsbeziehungen und Positionen, die der unbeschränkt annäherungsfähigen Vorstadien und die der Nullfallswerthe, zusammen und zugleich zu berücksichtigen hat. Ohne eine solche Combination bleibt die differentielle Rechnungsart, oder wie man das Gesammtgebiet sonst nennen möge, etwas theoretisch Unvollständiges und praktisch Unzureichendes.

201. Je rascher man sich von einem Lehrbuch gewöhnlicher Art losmacht, um dann zu einem genialen Grundwerk überzugehen, um so besser wird man für seine feinere Ausbildung sorgen. Es würde ein Ideal für die Lernweise sein, wenn eine solche Trennung von gemeinem Lehrbuch und genialem Grundwerk gar nicht statthätte. Der gute Kopf wird gemeine Lehrbücher nur zu Rathe ziehen, um sich das Gemeine in der üblichsten Gestalt nach Maassgabe des richtigen oder falschen Herkommens geläufig zu machen und diejenigen Ergänzungen zur Hand zu haben, die ein lehrhaft eingerichteter Cursus auch aus den benachbarten Gebieten und unter Umständen aus mehr elementaren Hülfsdisciplinen in Erinnerung bringt. So sind die Curse der Pariser polytechnischen Schule beispielsweise verständlich, wenn auch von der analytischen Geometrie zuvor nur die allereinfachsten Grundvorstellungen erlernt sind. Von diesem geringen Maass abgesehen, enthalten sie selbst die wichtigsten Bethätigungen der Analysis an der Geometrie. Wenn es sich nun aber auch mit einem Grundwerk, wie dasjenige Lagranges ist, insofern ähnlich verhält, als es auch hier nicht an den elementaren Anwendungen fehlt, so ist doch dessen Gangart und Form zu systematisch, als dass es aus blossen Nützlichkeitsrücksichten für das Studium gelegentlich ungleichartige Nebenlehren einflechten oder sich mit einer ausführlichen Erinnerung an analytisch geometrische Vorkenntnisse abgeben könnte. Diese

Umstände würden weniger erheblich sein, wenn man ein entsprechendes modernes Grundwerk über die ersten Fundamente der analytischen Geometrie hätte. So aber wird nur in seltenen Fällen bei vorzüglichen Anlagen der Versuch glücken, gewöhnliche Lehrbücher und Curse ganz zu umgehen und sich von vornherein ohne Weiteres in eigentliche Grundwerke einzuführen. In andern Fällen wird aber auch der Grundsatz wohlthätig wirken, aus dem gewöhnlichen Lehrbuch so rasch wie möglich nur die allernothwendigsten Elementarbegriffe zu entnehmen und sich dann zu den ursprünglicheren Quellen des Wissens zu begeben.

Die Grundwerke vertreten allerdings mit ihrem System oft nur eine einzige Anschauungsweise und vernachlässigen eine andere, ebenfalls nützliche. Dies bringt die von ihnen vertretene Richtung mit sich, und man darf sich nicht darüber wundern, dass ein bedeutender Geist nicht gern die Einheit stört, durch welche eine Gruppe seiner Conceptionen zu einem gleichartigen Ganzen wird. Das Integral blos als primitive Function und das bestimmte Integral als Differenz zweier Werthe dieser Stammfunction vorstellen, heisst auf den natürlichsten Ausgangsbegriff, nämlich auf den eines aus Theilchen summirten Ganzen verzichten. Lagrange, dem dieser letztere Begriff in allen praktischen Anwendungen der geläufigste war, legte sich in der Functionentheorie absichtlich den Zwang auf, ihn zur Seite zu lassen; denn nur so glaubte er ein völlig strenges System liefern zu können. Wenn nun aber die gemeinen Lehrbücher nur nebenbei davon Notiz nehmen, wie das Integralzeichen seinem Ursprung nach ein Summenzeichen und das Integral auch als Summe aufgefasst werden könne, so liegt hierin ein fast völliges Vergessen der wirklich praktischen Methoden und Vorstellungsarten. Ueberhaupt ist es schon eine voreilige Voraussetzung, die allgemeinen Integrale für den natürlichen Ausgangs- und Entstehungspunkt des Integralbegriffs zu halten. Dieser hat vielmehr im Bereich der bestimmten Integrale gelegen. Alle Aufgaben der Wirklichkeit bieten sich als bestimmte Summationsprobleme dar, und der ganze Calcül ist geschichtlich aus der Entwicklung derartiger Nothwendigkeiten nach und nach erwachsen. Man beraubt sich also grade derjenigen Vorstellung, welche die Integralrechnung unmittelbar zu Anwendungen geeignet macht, wenn man nicht von vornherein den Begriff der Summirung aller zwischen zwei Grenzen vorhandenen differentiellen Elemente sorgfältig nach allen Richtungen einübt. In dieser

Beziehung haben aber, wie schon angedeutet, die Lehrbücher die natürliche Tradition fast verloren, und es bleibt beinahe ausschliesslich dem eignen Geschick des Lernenden überlassen, sich im Bedürfnissfalle bei Anwendungen diese unentbehrliche Vorstellung selbst auszubilden. Vollends ist aber der Gedanke, dass die bestimmten Integrale den Kern und natürlichen Ausgangspunkt der ganzen Theorie repräsentiren, eine zwar in der Sache und deren Geschichte wohlbegründete, aber doch neue Einsicht, und da grade das Grundwerk Lagranges ihr gar nicht entgegenkommt, so kann sie zu einer Frucht für das Studium nur dadurch führen, dass der Lernende selbst sich bei jedem entsprechenden Stoff ihrer erinnert und sie überall grundsätzlich in erster Linie zu bethätigen sucht. Es hat mit ihr eine ähnliche Bewandtniss, wie mit der Idee, dass die partiellen und nicht die totalen Differentiale die eigentliche und natürliche Abstraction vertreten, um welche es sich bei der Untersuchung mehrerer, ihre Veränderungen combinirender Grössen handelt; denn beispielsweise will in der Geometrie jede Dimension für sich betrachtet sein, und der Begriff eines blos aus einem Gesichtspunkt erfolgenden Zuwachses enthält einen höhern Grad von Theilung und Abstraction, als die Vorstellung des nicht unterschiedenen Zusammen der vollständigen Zunahme. Die heutigen Lehrbücher lassen aber keine Ahnung davon aufkommen, dass die Verhältnisse der Wirklichkeit sich in Gestalt bestimmter und zwischen natürlichen Grenzen genommener Integrale und partieller Differentialbeziehungen darbieten, und dass die allgemeinen Integrale nur nachträgliche besondere Schöpfungen der verallgemeinernden, hiemit aber auch die Begriffe immer leerer machenden Theorie sind. Dies kommt daher, dass sie die Vorstellung der Elementensummen vernachlässigen; denn das Integral als Summe von differentiellen Elementen verlangt eine bestimmte natürliche Begrenzung, da diejenige, welche man etwa stillschweigend bei dem allgemeinen Integral zwischen dem für dessen Nullwerth statthabenden und einem beliebigen Werth der Veränderlichen hinzudenken möchte, eine durchaus künstliche ist. Hienach ist der Begriff des allgemeinen Integrals selbst ein abgeleiteter und derjenige des bestimmten Integrals der ursprüngliche. Uebrigens ist es auch allein die Vorstellung des Integrals als eines Summationsergebnisses, welche in die Rechnung mit eigentlichen Differentialien gehörig hineinpasst. Die Scheu vor den unmittelbaren Differentialien mag daher auch wohl das ebenso

ungerechtfertigte Zurücktreten der Vorstellung von ihren Gesammtsummen erklären.

Um zu dem in der vorigen Nummer Gesagten hier noch das Entsprechende über den Integralbegriff zu ergänzen und so die Summationsidee noch mehr auszuzeichnen, sei Folgendes noch besonders hervorgehoben. Für das Integral im herkömmlichen Sinne besteht dieselbe Doppeldeutigkeit, wie für das Differential, und zwar sind die beiden unterschiedenen Grössen, jede für sich, am schärfsten kenntlich zu machen, wenn man von der Summation ausgeht. Die Summe aller unabgekürzten Differenzen, gleichviel ob beschränkt oder unbeschränkt kleiner, ist immer genau das Ganze (integrum) der Veränderung zwischen den zwei Grössenstationen, innerhalb deren die Differenzirungen gedacht und gehäuft werden. Thatsächlich ist aber das Integral, entsprechend dem Differential, etwas Abgekürztes. Es ist von jener Summe um ein Integral einer Differenz zweiter Ordnung, also um ein Kleines von unbeschränkter Bestimmbarkeit verschieden. Beispielsweise ist $\int_0^x 2x\,dx = x^2$ keine exacte Gleichung, sondern eine unbeschränkt geringe Abweichung von der Gleichheit oder, wenn man will, eine unbeschränkt kleine Unexactheit. Ohne Abkürzung der Gleichung, beziehungsweise des Integrals, muss man $\eta + \int_0^x 2x\,dx = x^2$ oder aber, mit beiderseitiger Abkürzung, $\int_0^x 2x\,dx = x^2 - \eta$ schreiben. Die Abweichung η des eigentlichen Integrals von seinem Grenzwerth, d. h. der Werthgrenze für den Nullfall des Differentials, diese Abweichung η ist eine Function der Abweichung ω, um welche sich das zu integrirende Differential von seinem nicht abgekürzten Ausdruck unterscheidet. In unserm einfachen Beispiel ist die unabgekürzte Differenz $2x\,dx + dx^2$, also $\omega = dx^2$ und $\eta = \int_0^x dx^2 = x\,dx$. Wäre das Summenzeichen von vornherein auf unabgekürzte Differenzen bezogen worden, also $\int_0^x (2x\,dx + dx^2)$ genommen, so hätte man auch den Integralausdruck damit genau bestimmt und zwar für alle Werthe von dx, gleichviel ob diese gross oder unbeschränkt klein vorausgesetzt werden.

In der Werthgrenze für den Nullfall von dx macht der Umstand, ob Abkürzung vorhanden oder nicht, keinen Unterschied mehr. Da man nun $\lim \int_0^x (2xdx + dx^2) = \int_0^x (2xdx + dx^2)$ hat, indem, wie gesagt, der Werth der letzteren Summe für jede Grösse von dx constant bleibt, und da ausserdem, dem vorher Gesagten entsprechend, $\lim \int_0^x 2xdx = \lim \int_0^x (2xdx + dx^2)$, so ergiebt sich $\lim \int_0^x 2xdx = \int_0^x (2xdx + dx^2)$. Der Grenzwerth der Function, d. h. ihr Werth für den Nullfall des Differentials, ist also einem unabgekürzten Summenausdruck gleich, in welchem das unabhängige Differential jeden Grössenwerth haben kann, der mit der Constitution und dem Lauf der Function überhaupt noch verträglich bleibt. An dieser Thatsache ist der Umstand interessant, dass man die scharfe Integralgrenze vermittelst der Hülfsgrössen genau ausdrücken kann, während sie von den Hülfsgrössen effectiv unabhängig ist. Uebrigens hat das Gleiche auch für die Grenze des Differentialquotienten statt, so dass in allen Grenzwerthen der Functionen die Nebengrössen sich bei genauer Rechnung gegenseitig exact aufheben, welche Werthe man ihnen auch beilegen möge. Der unbeschränkten Annäherung an die Grenze bedarf man daher nur, um zu zeigen, wie sich die abgekürzten Ausdrücke verhalten.

Am Integral als einer Elementensumme zeigte sich nun letztere Hauptsache am handgreiflichsten, und da wir die Ungenauigkeit und Oberflächlichkeit der Lehrcurse in den Grundvorstellungen besonders zu markiren hatten, so bot sich die Hinweisung auf genaue Unterscheidungen der Integralbegriffe als ein Mittel dar, die Mängel der üblichen Darstellung ohne weitere Vergleichung kenntlich zu machen. Man sehe sich in der bisherigen Schultheorie um, und man wird zwar ein Zeichen $\lim \Sigma$ angewendet, aber keine Kennzeichnung eines abgekürzten Werths des eigentlichen Integrals, also der abgekürzten Elementensumme als solcher, antreffen. Die Anzahl der Elemente ist unbeschränkt gross, aber trotzdem bleibt die Summe stets hinter dem Grenzwerth zurück. Um zu letzterem zu gelangen, ist ein Sprung vom Grössenfall zum Nullfall nothwendig, womit denn die Begriffe von Differenz und Differential, Summe und Integral aufhören, einen

Sinn zu haben. Diese Begriffe müssen hier aufgegeben werden, weil sie mit dem Nullwerth in Widerspruch stehen. Eben deswegen ist es aber nothwendig, eine Rechnung zu haben, die unter verschiedenen Zeichen mit beiderlei Grössen, den festen Grenzgrössen und den Nebengrössen, in zweckmässiger Vereinigung operirt.

202. Alle Anwendungen der Analysis auf die Naturwirklichkeit gehen durch die Geometrie, indem sie zunächst Anwendungen auf die räumlichen Gebilde voraussetzen. Was man nun analytische Geometrie nennt, ist im weitern Sinne eine Bethätigung der gesammten Analysis an räumlichen Verhältnissen. In diesem weitern Sinne bildet sie herkömmlich einen Bestandtheil der Curse der Analysis selbst, da ohne die Verwerthungen in der höhern Geometrie der Calcül für das Lernen zu unanschaulich abstract ausfallen würde, und da die Analysis nicht um ihrer selbst willen da ist, sondern als Untersuchungsmittel der Grössen doch irgend eine besondere Grössenart zum nächsten Untersuchungsgegenstand haben muss. Im engern Sinne begreift die analytische Geometrie aber nur die allgemeinen Grundsätze, nach welchen die Verhältnisse geometrischer Gebilde auf algebraische Ausdrücke gebracht werden können. Eine krumme Linie im Sinne der Alten als den allgemeinen Ort eines Punktes auffassen, dessen Lage jedesmal einem bestimmten Inbegriff von Vorschriften entspricht, und was für den so zu sagen allgemeinen Punkt dieser krummen Linie an Bestimmungsverhältnissen gegeben ist, in allgemeinen Grössenzeichen durch algebraische Combinationen ausdrücken, — das sind zwei einander ziemlich naheliegende Gedanken. Der wesentliche Schritt zur analytischen Geometrie fand sich im Eingang der neuern Zeit schon durch jene Oertervorstellung vorbereitet. Was Descartes und die Modernen hinzugefügt haben, ist die Uebersetzung in die Sprache der algebraischen Symbole. Hat man einmal die Gleichung einer Curve, so lässt sich vermittelst derselben Allerlei zur Entwicklung einer Einsicht in die Curveneigenschaften und zwar um so mehr vornehmen, je weiter Algebra und Analysis entwickelt sind. Die analytische Geometrie ist also nicht sowohl eine selbständige Wissenschaft als vielmehr eine eigenthümliche Methode, und der Eingang in diese Methode ist es, den sich der Lernende auf eine möglichst einfache Weise zu eröffnen hat. Die Beziehung auf Coordinaten, der Ausdruck in Gleichungen und die Bearbeitung der letztern sowie die Rückübersetzung der symbo-

lischen Ergebnisse in das anschaulich Räumliche sind hier die Hauptpunkte. Man braucht diese Methode zunächst nur am Kreise und an den übrigen Kegelschnitten zu studiren, um sich ihre allgemeinen Wendungen anzueignen und das Uebrige dann in dem herkömmlichen Zusammenhang der höhern Analysis, also nach Anleitung der früher erwähnten Curse, zu erledigen. Lehrbücher, welche den ganzen Stoff, etwa gar bis zu Specialitäten über Flächen dritten Grades, beispielsweise nach Art des Salmonschen, zusammentragen oder, um ein anderes Beispiel zu nennen, wie die schwerfällig pedantischen Vorlesungen von O. Hesse, wenigstens einen grössern Theil des Stoffes vorführen, bringen eigentlich nur Ablenkungen und Ueberlastungen des Studiums zu Wege. Derartige Ausspinnungen sind nichts Wesentliches, und auch ohne Massenanhäufungen von analytisch geometrischem Stoff kann der Studirende alle mathematischen Hauptmittel beherrschen lernen. Man beschränke sich daher zunächst auf die Grundsätze der Methode, wie sie sich unter den einfacheren Verhältnissen bethätigen lässt, und suche alsdann in der eigentlichen Analysis fortzuschreiten, an welche sich die höheren Anwendungen auf die Geometrie ungezwungen anschliessen und nicht erst noch in anderartigen Lehrbüchern aufzusuchen sind. Freilich wird man für jene sogenannten Elemente, die man von der analytischen Geometrie zuallererst braucht, bezüglich der Lehrmittel wieder, wie bei den Elementen der niedern Mathematik, getrost in die Urne greifen können, ohne besorgen zu dürfen, dadurch sonderlich übler anzukommen, als ohnedies unter allen Umständen der Fall sein würde.

203. In den gesammten Anwendungen von Algebra und Analysis auf Geometrie hat der Studirende besonders zwei Angelegenheiten im Auge zu behalten, nämlich die wahre Bedeutung des Minuszeichens und die Art, wie man von vornherein zu den analytischen Ausdrücken für die Raumgebilde gelangt. Was zunächst den geometrischen Sinn des Subtractionszeichens oder, um vorläufig im falschen modernen Stil zu reden, der negativen Grössen und namentlich der negativen Ausdehnungen betrifft, so muss man hier schon in den elementaren Grundlagen reinen Tisch machen. Auch handelt es sich hier um einen der wichtigsten Gegenstände, dessen Tragweite derjenigen der Lehre vom Unbeschränktkleinen gleichkommt. Logische Strenge ist in der Mathematik nicht möglich, wenn der Sinn, den die Vorzeichen haben, ursprünglich und in den Anwendungen in Nebeln verbleibt

oder ganz willkürlich und äusserlich empirisch bestimmt wird. Man muss diesen Sinn aus einem einzigen Grundbegriff ableiten, mag es sich nun um trigonometrische Functionen in den Elementen der Trigonometrie oder um eigentliche analytische Geometrie handeln. Ist hier der Grund sicher gelegt, so kann man getrost allen algebraischen und analytischen Combinationen, einschliesslich der imaginären, entgegensehen, ohne Verlegenheiten oder Mysticismus in der Deutung befürchten zu dürfen.

Wir haben schon angedeutet, dass es in der gesammten Mathematik keine befriedigende logische Ordnung geben könne, wenn man sich jemals verleiten lässt, das Subtractionszeichen noch für etwas Anderes gelten zu lassen, als es ursprünglich ist. Der falsche Sinn, in welchem man negative Grössen eingeführt hat, war in der Geschichte die erste Selbsttäuschung. Anstatt dieses Täuschungssystem bis in die sogenannten complexen Gebilde hinein mit neuen falschen Verdinglichungen fortzusetzen, muss man vielmehr den ersten Schritt selbst zurückthun. Eine negative Zahl ist nichts Anderes, als eine absolute Zahl, deren Einheiten in irgend einem Zusammenhang zu subtrahiren sein würden, wenn die besondere Art der Verbindung es mit sich brächte. Diese Eigenschaft bleibt nicht nur im Laufe der Operationen maassgebend, sondern kann auch als Ausgangspunkt oder Ergebniss einen selbständigen Sinn, nämlich denjenigen des Abzählens anstatt des Zuzählens haben. Die negative Zahl beruht also nicht wesentlich darauf, dass eine unmögliche Subtraction, nämlich diejenige des Grössern vom Kleinern vorgelegen hat, sondern darauf, dass die Ausführung der angedeuteten Subtraction eventuell in Frage kommen, also möglich werden kann. Die absolute Zahl ist mit einer Operation behaftet, die eventuell ausgeführt werden soll, und in diesem Behaftetsein liegt die ganze Negativität. Wenn man glaubt, wie es heut die vorherrschende Meinung ist, für die geometrische Deutung des Negativen noch eines besondern Begriffs, nämlich desjenigen des Richtungsgegensatzes, zu bedürfen, so liegt hierin eben das Unlogische und die empirische Zufälligkeit der Ansicht. Man hat durch eine Art Induction festgestellt, dass, wenn die eine Richtung der Coordinaten als positiv gilt, die entgegengesetzten Abtragungen auf der andern Seite des Ausgangspunkts negativ zu nehmen seien, wenn nämlich die vollständige Correspondenz mit den algebraischen Operationsbeziehungen gewahrt bleiben und die in den Wurzeln der Gleichungen vor-

handenen verschiedenen Vorzeichen einen geometrischen Sinn erhalten sollen. Ein solches Verfahren ist aber willkürlich und dunkel; denn man beweist hiebei nicht, wie der Richtungsgegensatz dazu komme, durch den Gegensatz von positiv und negativ, d. h. nach unserer Grundansicht durch den Gegensatz von Addiren und Subtrahiren gedeckt zu werden. Nun ist eine arithmetische oder algebraische Operation stets dieselbe, mag sie sich an abstracten Zahleneinheiten oder an realen Grösseneinheiten bethätigen. Sie kann in beiden Fällen nicht Zweierlei bedeuten, und das Subtrahiren von Längeneinheiten ist offenbar ebensogut ein Subtrahiren wie dasjenige von blossen Zahlen. Die operativen Beziehungen können daher durch die ganze Mathematik hindurch nur einen einzigen Sinn haben, und das Negative nirgend etwas Anderes sein, als die Andeutung einer eventuellen Subtraction. Es ist daher unmittelbar kein Gegensatz der Richtungen, sondern ein Gegensatz der algebraischen Operationen, welcher es gestattet, von vornherein die eine Coordinatenrichtung immer negativ zu setzen. Führt man diese Möglichkeit aber ohne Beweis ein, so sieht der ganze Sachverhalt wie eine aus der Luft gegriffene Behauptung aus, für die man allenfalls auf eine inductive Bewahrheitung durch die Bewährung bei allem späteren Gebrauch zu rechnen habe. Eine solche Manier der Einführung von Erkenntnissen ist aber das Widerspiel mathematischer Strenge und Deduction.

Dem gekennzeichneten Uebelstande kann nun vermittelst der durchgängigen Geltendmachung einer einfachen Regel abgeholfen und so nicht nur die logische Verfassung der Mathematik, sondern auch die Methode des Lernens verbessert werden. Man gehe von vornherein davon aus, dass die Abstände eines Punktes von Coordinaten nur dann stets in derselben Art, d. h. durch einfache Angabe von Entfernungseinheiten bestimmt werden können, wenn die Coordinaten weit genug abliegen, damit sich der Punkt in jeder Lage nur auf einer Seite der Coordinaten befinden könne. Dies wird aber immer der Fall sein, wenn man die Coordinaten unbeschränkt weit abliegend wählen darf. Nach dem gemeinen Jargon zu reden, können die Coordinaten nun immer im Unendlichen liegen oder, wie wir uns exacter ausdrücken, sie können stets unbeschränkt entfernt angenommen werden. Alsdann kommt aber ein Unterschied von positiv und negativ bei den stets absoluten Abständen gar nicht in Frage. Um jedoch das Verhältniss

für die Anschauung zu vereinfachen, möge zu einem gegebenen Coordinatensystem mit doppelter Richtung eben nur ein hinreichend entferntes und demgemäss so umfassendes hinzugedacht werden, dass alle Entfernungsbestimmungen des Punktes nur eindeutig ausfallen können. Ja es mag sich nur um eine einzige Coordinatenaxe und um einen Punkt auf derselben handeln, der seinen Ort ändert; denn an dieser einfachen Vorstellung lässt sich alles Wesentliche darthun. Man hat dann nur den nahen und den entfernten Ausgangspunkt der Abstandsmessung zu berücksichtigen. Diese beiden festen Punkte haben selbst einen festen Abstand, und will man von der Beziehung auf den nahen zu derjenigen auf den entfernten Ausgangspunkt übergehen, so muss man die nach dem entfernten hin liegenden Distanzen von dem festen Abstand subtrahiren. Hienach sind die Distanzen der fraglichen Richtung als mit der Eigenschaft behaftet anzusehen, eventuell subtrahirt werden zu müssen. Wäre man umgekehrt verfahren, so würde sich gezeigt haben, dass die Subtraction des festen Abstandes von einer kleineren Länge, da sie nur zum Theil ausführbar ist, ein Stück des Subtrahendus übriglässt, welches mit der Eigenschaft, eventuell subtrahirt zu werden, behaftet bleibt und den Sinn dieser Eigenschaft auch in einer neuen Rückumkehrung wieder bekundet. In dieser Gegenseitigkeit der Beziehungen und in nichts Anderem hat die Negativität an sich absoluter Grössen einen nachweisbaren Sinn. Eine recht einfache praktische Erläuterung dieser gegenseitigen Beziehungen liefert die Thermometerscala, wenn man ihren Nullpunkt im Sinne der steigenden oder der sinkenden Wärme um eine beliebige Anzahl Grade verlegt denkt. Aber auch sonst kann es im Bereich der räumlich ausdrückbaren Verhältnisse keinen Fall geben, in welchem unsere Herleitungsart der besondern Bedeutung des Negativen nicht durchführbar bliebe. Wie beispielsweise bei den Sinus und den übrigen Winkelfunctionen, bei denen die Vorzeichen nach unserer Regel leicht zu erläutern sind, wird man auch sonst durch Beziehung auf andere Coordinatenaxen die erforderlichen Nachweisungen leicht und schlüssig geben können. Was aber in der analytischen Geometrie die Correspondenz mit den Gleichungswurzeln betrifft, so würden auch die letzteren rein algebraisch unerklärt bleiben, wenn man nicht zugleich nachwiese, dass die an ihnen auszuführenden Systeme von Operationen ihren Sinn deutlich bekunden, wenn man an Stelle der negativen

Wurzel eine Differenz absoluter Zahlen mit grösserm Subtrahendus setzt.

In dem Werk von den neuen Grundmitteln ist für die neue Sinnesbestimmung des Negativen von der reinen Analysis und den Gleichungen ausgegangen, und der Sinn für die Geometrie und die Anwendungen ergiebt sich alsdann von selbst. Jede ausschliesslich negative Lösung bedeutet, dass die zu Grunde gelegte Gleichungsform für eine Lösung in absoluten Grössen nicht geeignet ist, und dass man in der Signirung ihrer Glieder etwas abändern müsste. Das Minuszeichen in der Lösung ist die Hinweisung darauf, unter welcher Abänderung die Gleichung passt. Das Wesentliche in der neuen Auffassung besteht hienach darin, dass im Minuszeichen vor einer Grösse immer eine Regel gesehen wird, vermöge deren ein anderweitiger Rechnungszusammenhang durch die Substitution der signirten Grösse eine Abänderung erfährt. Aus diesem Gesichtspunkt tritt am deutlichsten hervor, wie es immer nur ein abstract analytischer Rechnungszusammenhang sein könne, auf den ausdrücklich oder stillschweigend bezogen, die Vorzeichen isolirter Grössen einen Sinn erhalten. Um die ganze Tragweite der Consequenzen hievon ermessen zu lassen, müssten wir die Ausführungen des erwähnten Werks hier im Auszuge wiederholen, was aber, auch von der Schwierigkeit kurzer und doch genügender Darstellung abgesehen, mit unserm leitenden, vorwiegend praktischen, auf die sachlichen Anwendungen gerichteten Zweck nicht sonderlich harmoniren würde. Wer daher theoretisch noch weiter eindringen will, möge sich die betreffenden Lehren jenes rein mathematischen Grundwerks geläufig machen.

204. Ist man einmal mit dem Negativen im Reinen, so wird das Imaginäre, dieses Schoosskind complexer Mystik, keinen Widerstand mehr leisten. Man hat nur nöthig, hier ebenso davon auszugehen, dass es angedeutete, aber in diesem neuen Fall zwei widersprechend angedeutete Operationen sind, deren Unvollziehbarkeit und Widerspruch in den Unmöglichkeiten geometrischer oder sonst sachlicher Combinationen ein Gegenstück haben muss. In den realen Unmöglichkeiten liegt die Parallele zu den logisch algebraischen. Man kann in den Wurzeln einer in Buchstaben ausgedrückten quadratischen Gleichung das Imaginäre derartig antreffen, dass es nur unter der Voraussetzung platzgreift, dass einer der Coefficienten gegenüber dem andern eine bestimmte

Grösse annimmt, welche die Differenz unter dem Wurzelzeichen negativ macht. In einem solchen Falle ist es recht deutlich, dass die Formel, welche die Gleichungswurzeln ausdrückt oder, mit andern Worten, die Abfolge von algebraischen Operationen, deren Bethätigung oder Andeutung das allgemeine Lösungsergebniss sichtbar macht, an sich selbst bezüglich des Gegensatzes von Reell und Imaginär gleichgültig bleibt. Dieselbe Formel erhält eine reelle oder eine imaginäre Bedeutung, je nachdem man den in ihr gegebenen Grössen verschiedene absolute Werthe beilegt, so dass wir hier einen ähnlichen Fall haben, wie bei jeder einfachen in Buchstaben ausgedrückten Differenz, die ebenfalls je nach Verhältniss des Minuend und des Subtrahend sowohl ein positives als auch ein negatives Resultat einschliesst. Wenn dem nun so ist, dass der Normalfall der natürlichen Entstehung imaginärer Werthe in der symbolischen Allgemeinheit des Formelausdrucks gar keinen Unterschied gegen den Fall des Reellen darzubieten braucht, so bestätigt sich, was übrigens von vornherein klar ist, dass man nämlich in der Combination der Operationen ohne Scheu nach denselben Grundsätzen verfahren kann, gleichviel, ob es sich um zufällig reell oder imaginär werdende Zusammenstellungen handle. Sobald aber das Imaginäre auch als solches sichtbar wird, ist seine Zulassung und Bearbeitung nichts weiter als ein hypothetisches Operiren mit dem Unmöglichen, und der ganze Calcül dieser Art wird zu dem, was man logisch eine Durchführung des Raisonnements durch das Absurde nennen muss. Die hypothetische Voraussetzung des Absurden ist aber ein mächtiges Mittel und eine völlig correcte Methode; denn man darf nicht vergessen, dass die Unmöglichkeiten eben hier als solche und nicht etwa als Möglichkeiten angenommen und behandelt werden.

Hienach hat man nicht den geringsten Grund, sich vor dem Imaginären und sogenannten Complexen zu scheuen, sondern man wird im Gegentheil die freiste Operation mit diesen Gebilden nach Maassgabe der allgemeinen Rechnungsregeln als einen Triumph der logischen Consequenz anzusehen haben. Wovor man sich aber wirklich zu scheuen hat, ist die vermeintliche Nachweisung einer Realität im Geometrischen, durch welche das Imaginäre auf reelle Weise gedeckt werden soll. Diese seltsame, zwar ziemlich alte, aber zuerst wieder von Gauss in Gang gebrachte Unterstellung gehört in dieselbe Kategorie, zu der man auch die Anregung einer

nichteuklidischen Hypergeometrie durch denselben Mathematiker rechnen muss. Sie gehört in jene transcendente Ueberwissenschaft, in welcher der Cultus der Einbildungen mit Sinnbildern aus der Welt der realen Mathematik betrieben und zu dem Glauben an eine transcendente Mathematik potenzirt wird. Einige Notizen über diese imaginären Spielereien haben wir schon Nr. 183 beigebracht.

Der Ausdruck unmögliche Wurzeln, welcher das Widersprechende in den Operationszeichen mit dem richtigen Namen benennt, wurde beispielsweise noch von Lagrange in dessen Schrift über die Zahlengleichungen für die imaginären Wurzeln durchgängig gebraucht, und er ist nur deshalb als technische Bezeichnung nicht zweckmässig, weil es in der Verbindungsweise der Grössen und bezüglich ihrer Veränderung vielerlei Arten von Unmöglichkeiten giebt. Auch das Abziehen des Grössern vom Kleinern ist theilweise eine Unmöglichkeit, weil ein unabziehbarer Rest übrigbleibt. Ein solcher Rest giebt in der Geometrie beispielsweise eine reelle Linie, die aber nicht etwa die unmögliche Subtraction als vollzogen, sondern im Gegentheil deren Unvollziehbarkeit darstellt und eben mit der Erinnerung an den Operationenzusammenhang, aus dem sie hervorging und daher mit dem negativen Zeichen, d. h. mit einer eventuellen, in einem andern Zusammenhang und unter andern Bedingungen wieder vollziehbaren Operation behaftet zu denken ist. Im Imaginären liegt nun aber die Unmöglichkeit nicht blos in der Beziehung eines einzigen Operationszeichens auf einen Zusammenhang absoluter Grössen, sondern in der Verbindung von zwei antinomischen Operationen, deren Setzung wohl rückgängig gemacht, aber unter keinerlei Umständen an sich selbst ausführbar werden kann. Das Negative selbst muss erst verschwinden, damit die Quadratwurzel einen reellen Sinn erhalte.

Die wirkliche Bedeutung der mit der imaginären Operationsverbindung behafteten und an sich selbst reellen Einheit oder sonstigen Grösse im Geometrischen ist die Anzeige von etwas Absurdem, nämlich dass jenes Imaginäre die Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks sein müsste, in welchem die Hypotenuse Null und die andere Kathete die reelle Einheit oder sonstige Grösse wäre. Man kann nun die reelle Einheit oder sonstige Grösse als mit diesem geometrisch absurden Constructionsverfahren behaftet ansehen, und dieser Nichtsinn ist der einzige Sinn, in welchem

von einer geometrischen Construction oder vielmehr Nichtconstruction des Imaginären die Rede sein kann. Wohl aber kann man das Reelle, welches imaginär afficirt ist, an sich, d. h. in Absonderung von dieser Affection construiren, und thut man dies, so wird man auch die Verwandlung räumlicher Gebilde ineinander durch verwandte Zwischengebilde da gleichsam überbrücken und die Stetigkeit des imaginären Uebergangs bemerklich machen können, wo sonst der einheitliche Leitfaden abreisst. Geht man beispielsweise von einem Kreise und zwar am einfachsten von dessen Mittelpunktsgleichung für rechtwinklige Coordinaten aus, so wird für eine Abscisse, die grösser als der Halbmesser ist, die Ordinate imaginär. Construirt man nun für diese Ordinate den reellen Factor der imaginär afficirten Einheit, verfährt man also in der Construction so, als wenn die Wurzel der negativen Einheit gar nicht in der Formel stände, so erhält man eine Hyperbel. Die letztere ist durch eine ganz reelle Gleichung ausgedrückt, die sich von derjenigen des Kreises nur dadurch unterscheidet, dass für das zweite quadratische Glied eine Umkehrung des Vorzeichens eingetreten ist. Der umgekehrte Gang von der reellen Gleichung einer solchen Hyperbel führt nach dem andern Zweig hin durch das Imaginäre und zwar vermittelst eben jenes reellen Kreises, von dem vorher ausgegangen wurde. Das Beispiel würde an Einfachheit verloren haben, wenn die allgemeine Hyperbel mit der die Art der imaginären Stetigkeitsunterbrechung sichtbar machenden reellen Ellipse anstatt des besondern Falles des Kreises gewählt worden wäre.

Behält man in der Erinnerung, wie der Kreis durch imaginär vermittelte Beziehung aus jener besondern Hyperbel entstand, und kommt man nun zu der andern Seite, wo er selbst wiederum nur durch imaginäre Fortsetzung in den andern Hyperbelzweig verwandelt werden kann, so wird die erste imaginäre Behaftung durch eine zweite rückgängig. Im Hinblick auf solche und ähnliche Gegenseitigkeiten darf man, um die durch das Imaginäre veranlasste Constructionsregel eines so eng als möglich verwandten Gebildes mitanzudeuten, allenfalls abkürzungsweise von einem imaginären Kreis oder einer imaginären Hyperbel sprechen. Es ist aber hiemit nicht das Imaginäre constructiv verwirklicht, sondern nur der Inbegriff aller punktuellen Fälle seiner Unmöglichkeit verbildlicht. Ueber den Lauf der Function kann durch solche Veranschaulichung ihrer reellen Theile geurtheilt, und ihre

derartige Fortsetzung durch das Imaginäre wie die Abänderung in Folge eines Zeichenwechsels angesehen werden.

205. Der völlig rationelle Sinn, in welchem unser Beispiel die Logik des Imaginären sichtbar macht und zugleich ein wichtiges Princip für fruchtbare Entwicklungen liefert, gestattet nicht nur analytisch, sondern auch geometrisch das freiste und sicherste Operiren mit den reellen Voraussetzungen und Ausgangspunkten der imaginären Unmöglichkeiten. Angesichts dieser positiven Nachweisung fallen nun aber alle jene Willkürlichkeiten, Unrichtigkeiten und mysteriösen Erdichtungen zusammen, vermöge deren das bisherige Operiren mit dem Imaginären in allen seinen übrigen sehr unterschiedenen Spielarten den Charakter der fable convenue und des nebelhaft Unlogischen an der Stirn trug.

Man vergleiche hiezu oben Nr. 183 Anmerkung und unsere umfassende Theorie des Imaginären in den Grundmitteln. Der Ausdruck „Construction des Imaginären" ist an sich nicht nur unschuldig, sondern auch nützlich, wenn man ihn im Sinne unseres mathematischen Grundwerks versteht. Wir haben ihn dort absichtlich adoptirt, um ihm seinen wahren Sinn zu geben und ihn blosser Graphik entgegenzusetzen. Beseitigt man nämlich die Gaussischen Absurditäten und Nebeleien, so bleibt von den früher sogenannten Constructionen der Kern übrig, und dieser ist nichts als eine willkürliche Graphik für rein analytische Zwecke, die mit der Geometrie als solcher nichts zu schaffen hat. Unser Kreis- und Hyperbelschema, wie es hier zuerst im Keim in obiger Weise angedeutet, in den Grundmitteln aber entwickelt worden, ist aber keine Graphik, sondern schliesst ein neues Stück analytischer Geometrie ein. Auch für die dritte Dimension ergiebt sich ein entsprechender Entwurf, indem unter die Kugelgleichung auch zwei gleichaxige Hyperboloide mit einer, beziehungsweise zwei imaginären Ordinaten gehören. Doch über alle solche Erweiterungen, sowie auch über den für die geometrische Verfolgung der Sache erforderlich werdenden Begriff des Imaginativen giebt das Grundwerk ausführliche Rechenschaft. Dort wird man finden, was es überhaupt heissen kann, signirte Grössen, seien sie nun negativ oder imaginär signirt, — construiren. Dort wird man aber auch überdies sich von dem weit wichtigeren Umstande überzeugen können, dass sich das Problem des Imaginären unmittelbar im rein analytischen Gebiet stellt, wenn man nur die Wurzeln seines geometrischen und sachlichen Charakters blosgelegt und als

blosse Beziehungen auf einen Rechnungs- und Gleichungszusammenhang erkannt hat.

Die gewöhnlich Gauss zugeschriebene Graphik, d. h. seine vermeintliche Construction, aber entkleidet von all seinen metaphysischen Nebeln, logischen Widersprüchen und mathematischen Ungereimtheiten ist in dieser Säuberung als Entwurf reeller Bestandtheile an sich nichts Falsches, aber eine überflüssige und unschöne Krücke der Analysis. Sie ist aus einer Schwäche hervorgegangen, in dem ein Verbildlichungsbedürfniss sich da regte, wo es nicht hingehört und wo es von starken und gesunden Geistern nicht empfunden wird. Ein grosser, ja nur ein ernsthafter Analytiker hätte sich zu einer solchen Procedur, wie die imaginäre Graphik ist, nicht versucht finden können. Er würde die modulirte Form der allgemeinen, imaginär gemischten Grösse $\varrho\,(cos\,\varphi + im\,sin\,\varphi)$ stets unmittelbar verwerthet haben, anstatt sie erst vermittelst eines geometrischen Bildes ihrer reellen Theile zu behandeln. Ein solches Bild lag wohl so nahe wie möglich; denn sich $\varrho\,cos\,\varphi$ und $\varrho\,sin\,\varphi$ durch Winkel, Cosinuslinie und Sinuslinie und hiemit auch ϱ als Radiuslänge zu construiren, musste für Denjenigen Sache blosser Maschinenhaftigkeit sein, der für blosse Zahlen nach geometrischen Bildern suchte. Dies war speciell der Fall jenes Gauss, der von der Zahlentheorie und den Gleichungen der Kreistheilung ausging. Allein so automatisch sich diese Verbildlichung auch einstellte, so war und ist sie doch nur ein Zeichen unmittelbar analytischer Unfähigkeit, überdies aber mathematischer Disharmonie des Denkens. Sie ist nämlich für Grössen und deren gehäufte Dimensionen im Allgemeinen unbrauchbar; schon bei der Quadrirung jener modulirten Form versagt sie; denn ϱ^2 lässt sich nur unter der Voraussetzung verbildlichen, dass ϱ von vornherein als nichts denn als Zahl gegeben sein und gelten soll. Ist ϱ wirklich eine Länge, so kann ϱ^2 nach der Gaussischen Manier gar nicht und könnte, wenn man die Gaussische Krücke verbessern wollte, nur in einer dritten Dimension als Quadratfläche entworfen werden. Für weitere Potenzen und der Allgemeinheit der Analysis gegenüber fällt überhaupt von vornherein jede Construirbarkeit fort, gleichviel ob es sich um Imaginäres handle oder nicht. Was übrig bleibt, ist also blosse Graphik, d. h. uneigentliche Verbildlichung blosser Zahlen; denn die Zahl als solche und überhaupt genommen hat immer nur eine Dimension und diese auch nur in ihrer Art, da sie nach

Art sachlicher Grössen gar keine hat. Aus letzterem Grunde sind es an den sachlichen Grössen unmittelbar nur die Zahlen, die man bei jeglicher graphischer Darstellung, diene diese der abstracten Analysis oder der Physik, ins Räumliche übersetzt, also zunächst als ein Vielfaches von Längeneinheiten sichtbar macht.

Erst wenn man die Graphik des Analytischen, d. h. die imaginäre Graphik von Gauss, als falsche Krücke einfürallemal bei Seite wirft und hiemit die willkürliche Abtragung von Längen um die Ecke eines rechten Winkels nicht mehr für eine Construction von geometrischem Sinne hält, wird man begreifen, dass es ein völlig anderes und gediegenes Gebiet eigentlicher Construction gebe. Diese eigentliche Construction wirft ihr Licht auch auf den Sinn, in welchem von einem Construiren negativer Grössen die Rede sein kann. Das Negative wird so wenig wie das Imaginäre räumlich dargestellt; denn es ist nur eine auf absolute Grössen bezogene und ihnen als Vorzeichen beigegebene Rechnungsregel. Die Gleichung zusammen mit dieser in der Signirung enthaltenen Rechnungsregel stellt das System von Rechnungsbeziehungen oder, anders ausgedrückt, von Operationen dar, durch welches die absoluten Grössen voneinander abhängig sein sollen.

Man kann hienach die Aufgabe umkehren und, was natürlicher ist, anstatt nach einer Construction von etwas Analytischem, welches in seiner speciellen Gestaltung auch für eine geometrische Sinnesbestimmung geeignet ist, nach einem analytischen Ausdruck für eine gegebene Construction fragen. Hier sind nun, streng überlegt, immer nur absolute Grössen gegeben. Diese können nun einfach durch eine Gleichung ohne Weiteres oder aber dadurch aufeinander bezogen sein, dass ausser und zu der Gleichung auch noch Rechnungssignirungen, die man an den Grössen selbst anmerkt, für die ganze functionelle Beziehung der absoluten Grössen maassgebend sind. Werden also beispielsweise die gegebenen reellen Beziehungen der unmittelbar vorliegenden Constructionsgrössen durch den zweifachen Bestimmungsgrund, die imaginäre Signirung gewisser Linien oder Linienstücke einerseits und durch eine Gleichung andererseits, analytisch ausgedrückt, so heisst dies, für ein reelles Gebilde einen imaginär vermittelten analytischen Ausdruck auffinden. Die Gleichung für sich allein ist in einem solchen Falle unpassend, ja absurd; sie schliesst einen Widerspruch oder eine entsprechende Unmöglichkeit ein.

Durch die Einsetzung der imaginären Signirung aber geht die Gleichung in eine passende über; denn nur unmittelbar auf die absoluten Grössen bezogen, bedeutete sie etwas Widersinniges. Die Setzung des hypothetisch Absurden hebt sich hienach wieder auf, oder vielmehr, es liegt in dieser von vornherein mit einer Rückgängigmachung behafteten Setzung keine Ungereimtheit, sondern eine ganz reelle Beziehung. Alle unmittelbar imaginären Beziehungen sind hienach nur isolirte Stücke aus einem umfassenderen Rechnungsmechanismus, die in den vollständigen Beziehungen wirklicher Grössen, sei es durch Aufhebung, sei es durch Elimination, verschwinden. Einen imaginär vermittelten analytischen Ausdruck für eine vorliegende reelle Beziehung suchen, ist nun offenbar ein Verfahren, welches man nur umzukehren braucht, um sich ohne jeden mathematischen Aberglauben vorstellig zu machen, was es heissen könne, eine imaginäre Grösse geometrisch construiren oder sonst im Sachlichen sichtbar machen. Unser Begriff von imaginären Grössen ist nämlich seiner Natur nach nicht auf das Geometrische beschränkt, sondern kann in allen Sachgebieten seine Rolle spielen; denn das Imaginäre haftet nicht den Dingen, sondern den Rechnungsbeziehungen an.

206. Ausser der Orientirung über die Vorzeichen ist für das Studium der nach analytischer Methode behandelten Theile der Geometrie besonders die Rücksicht auf den ersten Ursprung ihrer Gebilde zu empfehlen. Die Art, wie man beispielsweise zu den verschiedenen krummen Linien kommt, ist durchaus nicht gleichgültig. Geht man von einer rein geometrischen Definition aus, so muss vermittelst derselben und etwa auch durch Hülfsconstructionen die Gleichung erst gewonnen werden, und dies ist auch der natürliche und geschichtliche Weg gewesen, auf dem man die Geometrie durch die Analysis gefördert hat. Man kann aber auch von vornherein eine beliebige algebraische Beziehung, also etwa eine Gleichung zweiten Grades, zum Ausgangspunkt machen, und unter der Voraussetzung, dass die in ihr enthaltenen Veränderlichen die Coordinaten bedeuten sollen, zusehen, welche Gruppe von Gebilden durch diesen analytischen Ausdruck bestimmt werde. Hier ist die Definition in der Gleichung selbst enthalten, und man erfährt erst später, was sie geometrisch bedeute. Diese Art, analytische Geometrie zu machen, ist nun zwar recht abstract und zeichnet sich dadurch aus, dass sie von der anschaulichen Geometrie soweit als möglich fernbleibt; aber sie

hat den Nachtheil, durch das allzu souveräne Verfahren den Blick für die natürlichen Nothwendigkeiten in der Auswahl der Gebilde zu behindern. Auch verirrt sie sich zu sehr in leere Allgemeinheiten und überflüssige, oft gar nicht zu bewältigende Massen von Combinationen. Sie ist für einfachere Verhältnisse recht schön, um die Erschöpfung aller Möglichkeiten darzuthun und beispielsweise zu zeigen, dass die bekannten Kegelschnitte die einzigen Curven zweiten Grades seien. Trotzdem ist es aber nicht rathsam, jenen rein analytischen Ausgangspunkt, durch welchen sich etwas, was doch stets eine blosse Methode bleiben muss, zum Schein einer Wissenschaft mit selbständigem Inhalt aufstutzen möchte, zur Hauptsache werden zu lassen. Geschieht nämlich Letzteres, so wird man unfehlbar immer mehr in das unfruchtbar Unanschauliche gerathen und so zu sagen die Fühlung mit der eigentlichen Geometrie so ziemlich verlieren. Ein solcher Verlust hat nun die Modernen bereits in dem Maasse getroffen, dass gegen die sich in ihrer Isolirung selbstgenugsam fühlende, aber nach dem Durchlaufen des formalistischen Feldes geometrisch nichts mehr hervorbringende Analysis ein Rückschlag eingetreten ist. So eigenartig und zum Theil seltsam sich auch diese Gegenbewegung unter dem Namen der synthetischen Geometrie bisweilen ausnehmen mochte, so lag in dieser neuen Wendung doch wenigstens eine Erinnerung, dass die analytische Methode sich ihrer geometrischen Voraussetzung deutlicher bewusst werden müsse. Man hätte sich ebensogut den gewöhnlichen anschaulichen Methoden der Geometrie wieder zuwenden und etwa noch die Bewegung als grundsätzliches Hülfsmittel einführen können, und man würde auf diese Weise ebenfalls zu einer Berichtigung der analytischen Einseitigkeiten gelangt sein, ja vielleicht praktisch für das Studium der Mathematik und ihrer Anwendungen mehr erzielt haben, als auf dem sogenannten synthetischen oder, besser gesagt, projectivischen Wege gelungen ist. Wir haben hier indessen nicht die, wenigstens in einem Hauptpunkt wohlthätige Thatsache der Geschichte zu bemängeln, sondern nur die Aufmerksamkeit darauf zu lenken, dass es unter allen Umständen erspriesslich ist, über der analytischen Methode nicht den wesentlich anschaulichen Charakter der Geometrie zu vergessen.

Was in dieser Hinsicht für das Studium nicht genug empfohlen werden kann, ist die Regel, sich von jedem geometrischen Gebilde, welches in den Anwendungen auf die Natur eine Rolle spielen

kann, die allergenaueste anschaulich geometrische Rechenschaft zu geben. Letzteres kann auf verschiedene Weise geschehen; aber im Allgemeinen wird das Zurückgreifen auf Bewegungen, durch welche man die Gebilde zu erzeugen vermag, das natürlichste und bequemste Mittel sein. Für das fruchtbare Denken kann die Gleichung das Gebilde selbst nicht ersetzen, und alle Künsteleien der neusten, auf den Cultus der Determinanten eitlen Epigonenalgebra werden die anschauliche Beherrschung des Stoffes nicht ersetzen. Die Geometrie muss eben wesentlich eine unmittelbare Lehre von Raumgebilden bleiben, und die analytischen Operationen sind eben nur als dienende Hülfsmittel am Platze. Man wird es sich daher für das Studium zur Regel machen müssen, mindestens die Ausgangspunkte und Definitionen erst rein geometrisch in Ordnung zu bringen, ehe man sich auf die blossen Consequenzen des Calcüls einlässt. Die Brücke von den geometrischen Gebilden zu den analytischen Ausdrücken muss überall geschlagen werden, auch wenn man sie logisch entbehren und durch eine sofortige rein analytische Bestimmung ersetzen könnte. Aber auch umgekehrt muss der Uebergang vom abstracten analytischen Verfahren mit blossen Gleichungen zur anschaulichen Vorstellung der entsprechenden Raumgebilde jederzeit gemacht, ja durch die grundsätzliche Festhaltung der Parallele zwischen dem anschaulichen Gegenstande und seinem Formelgegenstück auch ein leitender Einfluss auf den Gang der Operationen geübt werden können.

207. Die synthetische oder vielmehr projectivische Geometrie, die im 19. Jahrhundert an die Seite der analytischen getreten ist, kann ebenfalls nur als eine Methode und zwar nur als solche gelten, die sich auf eine bestimmte Gruppe geometrischer Eigenschaften beschränkt. Sie ist von ihrem Hauptbegründer, dem General Poncelet, umfassend und geistreich eingeführt und in einem wahrhaft originalen Werke, dem Tractat von den projectivischen Eigenschaften der Figuren (Traité des propriétés projectives des figures, zuerst 1822, 2. Aufl. 2 Bde. Paris 1865—66) niedergelegt worden. Sie hat heilsam gewirkt, indem sie zu der falschen Selbstgenugsamkeit einer allzu isolirten Analysis ein Gegenstück bildete. Ungeachtet dieses Vortheils bedarf es für ein umsichtiges Studium besonderer Grundsätze, um auf dieses speculativ immerhin interessante und methodisch wenigstens in einigen Richtungen nützliche Gebiet nicht unverhältnissmässige

Kraft zu verwenden. Man würde sich sonst enttäuscht finden, und es ist daher besser, gleich im Anfange zu wissen, was man im günstigsten Falle zu gewärtigen habe.

Dieser für das Studium günstigste Fall tritt nämlich dann ein, wenn man sofort das bahnbrechende Werk selbst studirt. In Deutschland sind nicht etwa blos, wie in andern Ländern, untergeordnete Erzeugnisse mathematischer Professoren zur Hand, welche sich als alleinige Depositare der Wissenschaft aufdrängen, sondern es steht auch der Ruf eines bedeutenden Namens dem Einschlagen des besten Studienweges entgegen. Die Einzelverdienste Steiners in der Fortführung und Bethätigung der Ponceletschen Methoden unterliegen keinem Zweifel; aber man darf nicht übersehen, dass der deutsche Mathematiker mit dem Ansatz zu einer, noch überdies völlig Fragment gebliebenen Systemdarstellung (nämlich mit seiner „Abhängigkeit geometrischer Gestalten“, Berlin 1832) nicht nur ein Jahrzehnt später gekommen, sondern auch, was die Darstellungsform und Abrundung des Stoffes betrifft, hinter seinem Vorgänger gar sehr zurückgeblieben ist. Vollends sind nun aber sogenannte Steinersche Vorlesungen, die man lange nach seinem Tode unter der Fahne der nun schon gewachsenen Autorität des Namens hat erscheinen lassen, ein schlechtes Ersatzmittel für Originalwerke; denn sie sind eingeständlich von Andern abgefasst, und man hat es daher bei ihnen im besten Falle mit subjectiven Aufzeichnungen und Erinnerungen von Lehrauslassungen des Meisters, aber nicht mit etwas Autentischem zu thun. Auch kann eine Vergleichung lehren, dass es entschieden vortheilhafter sein würde, die eigne Schrift des Urhebers zu studiren und an der Jahreszahl 1832 keinen Anstoss zu nehmen. Um die Ergebnisse von einzelnen Abhandlungen ist es zunächst ja nicht zu thun, und übrigens enthalten auch die sogenannten Vorlesungen, die sich auf den elementaren grundlegenden Umkreis beschränken, ebenfalls nichts davon, so dass die Differenz von einem Menschenalter in der Erscheinungszeit zur Sache nichts thut. Wohl aber hat Poncelet, der ein hohes Alter erreichte, seine 2. Auflage noch selbst bereichert und namentlich mit historischen und kritischen Winken über das inzwischen Geschehene derartig ausgestattet, dass grade hier die Führung auch für das zweckmässigste Studium der Specialitäten, mehr als irgendwo sonst, zu suchen ist.

Ueberdies trägt die Ponceletsche Arbeit nicht blos das

Gepräge des Schöpferischen in ihrem Inhalt, sondern auch dasjenige des geistvoll Anregenden in ihrer Darstellungsart. Nimmt man noch die Vollständigkeit und Weite des Ausblicks hinzu, die nicht etwa blos bei den Kegelschnitten verbleibt, so hat man einen Grund mehr, in jener Arbeit nicht nur das Fundament, sondern auch das Gebäude der projectivischen Geometrie vorauszusetzen und auf das Studium oder vielmehr die Kenntnissnahme dieses Monuments alle Kraft zu concentriren, die man überhaupt auf Projectivik verwenden will. Man wird alsdann finden, dass man gewisse übereinstimmende Eigenschaften der gesetzmässig entworfenen Raumgebilde dadurch festzustellen vermag, dass man untersucht, welche Gestaltungen perspectivisch oder, mit andern Worten, in der centralen Projection zusammengehören, wie beispielsweise alle Kegelschnitte. Von der Spitze des Kegels aus gesehen, ist die Ellipse nur eine centrale Projection des Kreises und umgekehrt, so dass man für alle Kegelschnittscurven auch die besondern Verhältnisse und Eigenschaften derselben projectivisch verfolgen und, was von dem einen Gebilde gilt, gleichsam am Leitfaden der Projection auf das andere übertragen kann. Es ist klar, dass durch eine derartige Betrachtungsweise Zusammengehörigkeiten und Gruppen von gemeinsamen Eigenschaften verhältnissmässig einfach nachweisbar werden. Auch liegt hier der Nerv der neuen Methode; denn das Steinersche Verfahren mit getrennten Strahlenbüscheln, die aber in ihrem Verhältniss projectivische Eigenschaften beibehalten, ist nur eine Weiterentwicklung der ursprünglichen Auffassungsart. Ebenso schliessen sich alle andern Wendungen an jenen Hauptgesichtspunkt an, und der Name einer projectivischen Geometrie für die früher nur in Einzelansätzen, seit Poncelet aber in umfassender Darstellung vorhandene Auffassungsart ist zugleich der kürzeste und bezeichnendste.

208. Was der junge französische Officier 1813—14 in russischer Gefangenschaft zu Saratoff ohne Bücher, ja fast ohne Erinnerungen von den in ihm verbleichten Schulcursen der Analysis und Mechanik, auf eigne Hand erdachte, und was in der ursprünglichen Gestalt in seinen „Applications d'analyse et de géométrie“ erst 1862—64 veröffentlicht wurde, ist allerdings etwas gewesen, was über die hölzern und äusserlich handwerksmässig gewordene Art der algebraischen Geometrie hinweghilft und dem Geist eine Nahrung schafft, die seinen natürlichen Neigungen mehr

zusagt. Dennoch ist die Ponceletsche oder, sagen wir mit Rücksicht auf einige Specialabhandlungen immerhin, die Poncelet-Steinersche Geometrie eben nur die Bethätigung eines einzigen Gesichtspunkts, zu dem man bei dem Suchen nach anschaulichen Methoden zuerst gelangte, der aber nicht darauf Anspruch machen kann, das Bereich der ihrem Grundcharakter nach in allen Richtungen auf Anschaulichkeit angelegten Geometrie zu erschöpfen. Was man von diesem neuen Standpunkt her, der eingestandenermaassen verwandter Spuren im Alterthum nicht einmal gänzlich ermangelt, gegen die „schwerfällige" Synthese der Alten gesagt hat, mag immerhin voll und ganz von der antiken Beweisart, kann aber nicht gegen die natürlicheren Methoden gelten, die bei der Auffindung der Sätze und bei dem wirklichen unwillkürlichen Denken mitgewirkt haben. Die Spuren dieser natürlichen Methoden sind oft genug durch die künstlich angelegten Beweise hindurch wahrzunehmen, und man hat daher kein Recht, die gewöhnliche anschauliche Geometrie der naturwüchsigen Art für überwunden zu halten. Die projectivische Geometrie ist keine selbstgenugsame und allumfassende Methode, durch welche Probleme jeder Art lösbar wären. Sie hat sich beispielsweise im Bereich der Krümmungsbestimmungen und zwar namentlich bei Gelegenheit der Flächen dritten Grades als ungeeignet erwiesen, diese Art von Aufgaben zu bemeistern, und sie ist überhaupt ihrem Wesen nach nur darauf angelegt, über diejenigen Eigenschaften zu entscheiden, welche unmittelbar die projectivischen Beziehungen betreffen. Jede weitere Ausdehnung legt ihr einen unnatürlichen Zwang auf, mischt sie unwillkürlich mit fremdartigen Gesichtspunkten und macht das Verfahren, wo nicht etwa auch diese Mischung unzulänglich bleibt, mindestens unbequem und unschön. Der Studirende hat sich daher zu hüten, auf diese ungleichartigen, ja oft ungeheuerlichen Mischungen, auf die sich besonders die Professoren mit ihren Zusammenwürfelungsneigungen verlegt haben, seine Kräfte zu vergeuden, und er wird dieser Gefahr am sichersten dadurch vorbeugen, dass er sich in freier Weise mit dem Geist der originalen Grundlegung selbst erfüllt. Das Genie selbst kennt gewöhnlich auch die Schranken der neuen Wendungen, zu denen es gelangt; es hält überdies auf Reinheit der Gattungen und lässt sich zu keinen widerwärtigen Kreuzungen herbei, in denen die Abfälle aller Methoden unter den Händen gemeiner Synkretisten die bekannten Missgeburten des Tages veranlassen. Man verthue

daher seine Zeit nicht mit professoralen Erzeugnissen nach Art derjenigen eines Plücker, dessen diffuse und confuse Art und Weise, nebenbei bemerkt, auch von Poncelet bescheinigt worden ist, aber auch ohne einen solchen Armuthsschein jedem Unbefangenen einleuchten wird, welcher nach der Lectüre eines Poncelet oder auch nur Steiner in den zusammengeschleppten Schutt jenes mathematischen Caliban geräth. Unbefangen wird freilich nur Derjenige über solche wüste Mischmaschproductionen urtheilen, welcher die Manier kennt, in der die blossen Universitätsautoritätchen auch im mathematischen Fache aufgestutzt und im Kreis gleich bedürftiger oder noch bedürftigerer Collegen den Studenten und dem Publicum als alleinige Grössen aufgetischt werden, neben welchen die wirklichen Schöpfer oder Förderer des Faches gar nicht oder kaum zur Erwähnung gelangen. Wer diese Manier nicht kennt, ist, wie es meist dem Publicum ergeht, in Gefahr, sich durch die Reclame des blossen Scholarchenthums imponiren zu lassen und im günstigsten Falle erst nach erheblichen Opfern an Zeit und Geld dahinter zu kommen, um welchen Schlag von Wissenschaftspflegern es sich gehandelt habe. In Deutschland hat die Erkenntniss dieser Manier in einigen andern Wissenschaftsrichtungen schon öffentliche Fortschritte gemacht, und da wir auf diesen Punkt noch im Allgemeinen zurückzukommen haben, so mag für den heimischen Boden jener Professor Plücker als Typus meist noch schlechterer Varianten vorläufig genügen und zunächst erst noch an einen französischen, wenn auch anders gearteten, doch in der Hauptsache ähnlichen Skandalfall erinnert werden, dessen Beachtung grade bei dem Studium der Projectivik von Nutzen sein oder vielmehr beträchtlichen Schaden abwenden kann.

209. In Frankreich, dem Geburtslande selbst, hat die projectivische Geometrie Poncelets von vornherein mit akademischen Intriguen zu kämpfen gehabt, in denen der Analytiker Cauchy eine besondere Rolle spielte. Weit mehr sind ihr aber noch einzelne unzulängliche Breittreter der bereits gewonnenen synthetischen Wahrheiten hinderlich gewesen, deren Eitelkeit sich ebenfalls breit und schliesslich so breit auszulegen verstand, dass man für sie endlich eigne neue Professuren der sogenannten höheren Geometrie beschaffte. In diesem Falle hat sich namentlich Herr Chasles befunden, der, im Besitz der neuen Pariser Hauptprofessur, auch die Schwachheit hatte, sich für das Haupt der synthetischen

Geometrie zu halten und das Publicum mit einem recht platten Lehrbuch heimzusuchen, in welchem nichts von dem lebendigen Geist der neuen Methode, wohl aber recht viel Gewöhnlichkeit und so zu sagen eine Geometrie des Sumpfes anzutreffen ist. Zwar unterscheiden sich die Chaslesschen Erzeugnisse von den erwähnten Plückerschen dadurch, dass sie keinen Bastard von analytischer und projectivischer Methode erzeugen wollen; sie sollen vielmehr rein synthetisch sein, aber sie gerathen so sehr in die Niederungen des blossen Ausspinnens unerheblicher Sätze, dass sie das von höheren Geistern Errungene mit ihrem Schutt von Gleichgültigkeiten und Trivialitäten eher wieder unsichtbar machen, als wirklich verbreiten. Es ist daher auch sehr begreiflich, dass ein Professor wie Herr Chasles schon in seinen früheren geschichtlichen Arbeiten darauf ausgegangen ist, die wahren Urheber der neuen geometrischen Methoden zu verdecken. Diese Art von Fälschung der Geschichte, die er in einer auf Kosten der belgischen Akademie gedruckten Arbeit zuerst in einem grösseren Maassstabe unternahm, stimmt ganz zu seiner übrigen Rolle; denn es gehört eine arge Anmaassung dazu, die Accaparirung einer Professur mit sehr gewöhnlichen Mitteln für eine grössere Errungenschaft zu halten, als die Entdeckungen des Genies, und hierauf hin mit dem eignen dürftigen Trippeln den stolzen und kühnen Gang grosser Schriftsteller in Vergessenheit bringen zu wollen. In der That hätte es bei Herrn Chasles nicht erst eines gewitzten Betrügers bedürfen sollen, der die Eitelkeit des Professors aus dessen Geldbeutel für gefälschte Handschriften tüchtig zahlen liess; auch ohne die Niaiserie, den Ursprung der Gravitationstheorie in die französische Literatur verlegen zu wollen, hätte Herr Chasles bei den Gelehrten schon früher die richtige Würdigung finden müssen, wenn die Collegen in der Nähe und Ferne nicht zum grossen Theil von einem ähnlichen Schlage wären.

Wenn wir daher einige Sätze verloren haben, um eine an sich selbst ganz untergeordnete, aber durch die bekannte Art des Gelehrtenurtheils zu ansehnlicher Geltung gelangte Erscheinung mit ein paar Strichen kenntlich zu machen, so ist dies nicht blos im Interesse des besondern Studiums der synthetischen Methoden, sondern für einen weit umfassenderen Zweck geschehen. Was nämlich in jenem persönlichen Fall einmal recht greifbar vorliegt, ist mit geringen Abweichungen das gewöhnliche, ja man könnte

fast sagen normale Verhältniss. Es ist stets das Schicksal der bedeutenden und bahnbrechenden, vom Stempel des Genies gezeichneten Geister und Bücher, dass sich an ihrer Stelle der elende Wust Derjenigen breit macht, denen kein anderer Stempel und Charakter als der ihrer Amtsverrichtungen aufgedrückt ist. Unter diesem Stempel gehen die sogenannten Grössen der akademischen Anstalten dahin wie sie gekommen sind, und nachdem ein paar Geschlechter solcher staatlichen Abstempelungserzeugnisse spurlos verschwunden, pflegen dann auch die schöpferischen Geisteswerke einigermaassen in ihre wenn auch noch immer verkürzten Rechte einzutreten; denn sie sind dann nicht mehr so unmittelbar zu fürchten, und es lässt sich von ihnen ein discreter unschädlicher Gebrauch machen. Man spricht von ihnen mit Ehrerbietung, bleibt aber auch in einem andern Sinne in ehrerbietiger Ferne, indem man sich auch dann noch hütet, sie als die einfachsten Mittel zu einer gründlichen Erlernung der Wissenschaft zu empfehlen.

Wie übrigens die höhere, d. h. über das gewöhnliche professorale Maass, wenn auch nur etwas, hinausreichende Begabung auch im Bereich deutscher Förderung der projectivischen Geometrie alle jene Hemmungen zu erproben hatte, die wir vorher signalisirt haben, ist an der Person Steiners deutlich geworden. Dieser in seiner Art bedeutende Mathematiker, der nächst Poncelet an der neuern Geometrie den grössten Antheil hat, musste sich ungeachtet dieser Leistungen als blos ausserordentlicher und mithin ausserhalb der Facultät belassener Professor behelfen, da die Berliner Universität für ihn keinen ordentlichen Platz übrig hatte oder vielmehr keinen übrig haben wollte; und doch hat diese Universität in ihrem ganzen bisherigen Dasein, wenn man nicht etwa den vorübergehenden Aufenthalt Dirichlets in Rechnung bringen will, in ihren ordentlichen Professuren nicht nur keinen einzigen Namen, der auch nur entfernt mit dem Steiners verglichen werden könnte, sondern sogar überhaupt keine Namen aufzuweisen gehabt, deren Klang jemals mehr als ein blosses Echo der Professur und des Einflusses derselben auf die Stellenbesetzung und sonstige Patronage gewesen wäre. Steiner war nicht der Mann gewesen, derartige Autoritätchen sonderlich zu honoriren, und auch jetzt noch haben überhaupt die Erben seiner ursprünglichen Feinde nicht aufgehört, sich, so gut es gehen will, gegen die Consequenzen seines Geistes zu verschanzen. Man hat dies am besten

dadurch zu bewerkstelligen geglaubt, dass man sich den Anschein gab, die neue Geometrie an die Analysis gleichsam zu annectiren, um so das Publicum glauben zu machen, man vertrete eben dasselbe, was die reinen Synthetiker treiben, und ausserdem noch weit mehr, nämlich die Macht der Analysis. In Wahrheit ist aber diese von den Analytikern beliebte Annexion in eine äusserst zerfahrene Anarchie ausgeschlagen. Sie sollte ein pfiffiges Mittel sein, das, was man nicht hatte am Aufkommen verhindern können, nun dem eignen Monopol zu unterstellen und sich selbst damit breit zu machen, und sie hat doch nur gezeigt und wird fernerhin noch mehr zeigen, dass die Mischlingsproceduren und äusserlichen Verkoppelungen nur dazu dienen können, beide Methoden zu verunstalten, zwei Fehler zu häufen und eine verworrene Haltungslosigkeit vorherrschen zu lassen. So hat denn auch der von Steiner gestiftete Preis für synthetische, nach seinen Principien und Methoden zu behandelnde Geometrie bald das gewöhnliche Schicksal der meisten Preisstiftungen gehabt; denn unter den Händen der Berliner Akademie ist es rasch dahin gekommen, dass auf die von ihr gestellten nach jenen Methoden praktisch unlösbaren Aufgaben begreiflicherweise wiederholt gar keine Arbeiten eingingen. Hiemit trat der nicht von Steiner, sondern nachträglich Seitens der Akademie in die Uebernahmebedingungen der testamentarischen Stiftung vorsorglich aufgenommene Fall einer anderweitigen Vergebung der ausgeschriebenen Preise ein, so dass nach Belieben schon gedruckte Literaturerzeugnisse prämiirt wurden, wobei denn auch eine billige Rücksicht auf Personen, wie den oben erwähnten O. Hesse, nicht ausblieb, deren literarische Hauptbeschäftigung nicht die synthetische, sondern die analytische Geometrie gewesen war. Auch sonst hat überall die Mathematik des jüngsten Professorengeschlechts in der Berücksichtigungsart der neuen Materialien und Methoden ihren Charakter oder vielmehr ihre Charakterlosigkeit verrathen. Für das freie Selbststudium wird es daher um so mehr gerathen bleiben, die Methoden da aufzusuchen, wo sie in ihrer Ursprünglichkeit und Reinheit anzutreffen sind und demgemäss ihre ganze Kraft mitzutheilen vermögen. Die Durcheinanderwürfelung aller mathematischen Stilgattungen, die heute an der Tagesordnung ist, kann als ein sicheres Zeichen des entschiedensten Verfalls der monopolistischen Gelehrtensphäre gelten, in welcher dieses Mischlingswesen um sich gegriffen hat, — eines Verfalls, der sich auch darin bekundet,

dass der jüngste Nachwuchs kaum noch den Stoff für eine doch nur nach gewöhnlichem Maass erfolgende Recrutirung der mathematischen Professuren liefert.

210. Das krause Nebeneinander oder gar Durcheinander der sich in ihrer Absonderung ausschliesslich als analytisch oder ausschliesslich als construirend ausgebenden Verfahrungsarten kann nur verschwinden und einer natürlichen, über beide hinausragenden Einheitlichkeit der Betrachtung Platz machen, wenn einerseits gewisse natürliche Berechtigungen der abstracten Analysis geltend gemacht und andererseits die Beengtheit der geometristischen Reactionserscheinungen unseres Jahrhunderts tiefer erkannt wird. Für Beides sind in unsern Grundmitteln die Hauptlinien verzeichnet, und mit dieser Ergänzung und Begrenzung erhält das, was im Zusammenhange des vorliegenden Buchs kurz und praktisch angegeben wird, eine völlig exacte Sinnesbestimmung, welche in keinerlei Richtung einer Einseitigkeit Raum giebt. Das 19. Jahrhundert hat mit Ausnahme seiner Technik überall eine reactionäre Farbe getragen, und diese Eigenschaft hat sich eben auch darin nicht verleugnet, dass die Analysis, die im 18. Jahrhundert durch Lagrange eine verhältnissmässig klare und elegante Gestalt erhielt, im 19. meist wieder den Stempel der gemeinen Handwerksentartung annahm, während neben dieser Entartung eine eigentliche, wenn auch theilweise berechtigte Reaction, die geometristische, mit entgegengesetzten Fehlern und Beschränktheiten Fuss fasste.

Wer das gehörig würdigt, was im letzten Capitel unseres mathematischen Grundwerks über die natürliche Abstufung der Methoden entwickelt und an Aufklärungen über Projectivik und sonstige Synthese sowie über Hauptpfleger derselben beigebracht ist, wird einen über die gemeine heutige Methodendivergenz oder aber Methodenconfusion erhabenen Standort erreichen können. Ist er erst einmal auf diesem angelangt, so wird er sich nicht mehr versucht finden, irgend welchen Künstlichkeiten oder Uebertriebenheiten zu huldigen, gleichviel in welchem Methodenbereich sich diese Ungehörigkeiten oder Beschränktheiten betreffen lassen mögen. Die Abneigung gegen falschen analytischen Luxus wird ihn nicht bestimmen, dafür Projectivik oder Synthetik in den Kauf zu nehmen, wo diese nur eine andere Art unnützer Luxusverschnörkelung vorstellt. Gradezu aber mit Humor wird er die Reinheits- und Entlehnungsfragen abthun können; denn haben

untergeordnete Analytiker auch immerhin die modernen Geometristen in Einzelheiten bestohlen, so haben die Häupter der letzteren, wie wir im Grundwerk zuerst sichtbar gemacht haben, bei der Analysis im Allgemeinen und zwar grade in den wesentlichsten Punkten Anleihen gemacht, deren sie sich nur theilweise nicht bewusst waren.

Was aber die Fähigkeitsfrage anbelangt, so haben grosse Analytiker, wie namentlich Lagrange, denn doch unvergleichlich über den projectivistischen oder sonst synthetischen Capacitäten, also der Poncelet oder gar Steiner und eines Poinsot erhaben gestanden. Bezüglich des Letzteren, der sogar in seiner geometrisch mechanischen Art die beiden Projectiviker an Gediegenheit übertraf, kann nicht genug daran erinnert werden, welcher für den Mangel an Denkgewandtheit charakteristische Fehler desselben, nachdem er Generationen hindurch als Poinsotsche Entdeckung eines angeblichen Lagrangeschen Fehlers gegolten hat, durch unsere Untersuchung in dem angeführten Capitel der Grundmittel blosgestellt worden ist. Dieser Fehler gehört grade in die synthetische Geometrie; denn er beruhte darauf, dass Poinsot eine Coordinatenanordnung in der analytischen Mechanik Lagranges nicht verstand. Dort waren nämlich lothrechte Abstände von schiefen Axen zu Grunde gelegt; Poinsot aber bildete sich nach der beschränkten Schulschablone auch schiefe Abstände ein, verzerrte dadurch die zugehörigen analytischen Sätze von Lagrange erst selber zu Fehlern und schrieb zur vermeintlichen Berichtigung eine ganze Abhandlung, die schliesslich durch die Niaiserie der Epigonenmathematiker in der dritten Ausgabe von Lagranges Werk selbst noch gar als berichtigende Ergänzung abgedruckt wurde.

Derartig enthüllte Fähigkeitsproben haben nur noch gefehlt, um vollends die reactionärerseits erhobenen Ansprüche zurückzuweisen, das Anschauungsinteresse sachgemäss zu vertreten. Lagrange hatte es in jenem Fall trotz vorherrschender Analysis besser vertreten, als der hervorragendste Synthetiker, der sich nicht einmal zu orientiren wusste und seine geometrischen Fehler dem grossen Analytiker als Schwächen der Analysis andichtete. Um nun aber wirklich den Gegensatz unleugbarer Einseitigkeiten auszugleichen, ist von der Projectivik und namentlich ihrem erkünstelten Ausgangspunkt hybrider Art, dem anharmonischen Doppelverhältniss, ganz abzusehen. Derartiges ist pures Neben-

spiel und hat nicht einmal soviel Werth, wie die unmittelbar aus der centralen Projection folgenden anschaulichen Schlüsse über Gestalteigenschaften der Gebilde. Die Hauptfrage muss aus einem weitertragenden Gesichtspunkte gestellt werden; sie bezieht sich auf die natürliche Geschichte und die nothwendigen Entwicklungsstadien der Mathematik. Sie lautet ganz allgemein: Welchen Antheil hat die Rechnung und welchen die Construction in Anspruch zu nehmen?

An dieser Stelle haben wir die anderweitig gegebene Beantwortung nicht zu wiederholen, sondern nur durch ein paar Bemerkungen und Markirungen theils in Bezug zu nehmen, theils zu ergänzen. Unter den Beweisen ist immer derjenige der vollkommenere, der mit dem geringern Maass unmittelbarer Geometrie geführt wird. Was zu dem nothwendigen Abstracten der allgemeinen Rechnung noch an concreten Anschauungen hinzugefügt wird, ist als unwesentliche Zufälligkeit etwas Ungehöriges und entspricht einem abstractionsunfähigen Kinderstandpunkt. Wo daher die analytische Geometrie wirklich am Platze ist, hat die sozusagen geometrische Geometrie ausgelebt, gleichviel ob die in todten Sprachen abgefasste oder diejenige der modernen nach der Zeit Monges aufgekommenen Künste in Frage ist. Ein Minimum von Geometrie ist daher das leitende Princip der beweisenden Darstellung. Die Analysis selbst wird sicherer und anschaulicher, indem sie sich des Minimums von geometrischen Voraussetzungen und Vermittelungen bewusst wird, dessen sie bedarf. Für die geometrischen Zwecke verschwindet aber der überschüssige Ballast unmittelbar geometrischer und construirender Methoden, indem er durch die Angabe tieferer Gründe, d. h. der festgestellten Rechnungsbeziehungen entbehrlich wird.

Was für den Beweis und die Systemdarstellung eine Vollkommenheit ist, braucht es weder für die praktischen Lernzwecke noch für das Interesse an der Mannichfaltigkeit der Erfindungswege zu sein. Hier wird man oft Doppelwege gleichzeitig berücksichtigen und die unmittelbare Anschauung wird manchen Fingerzeig geben, der bei einem von vornherein abstracteren Verhalten ausbleiben müsste. Allein auch umgekehrt hat der allgemeine analytische Symbolismus für den, welcher ihn gehörig zu verwerthen versteht, in seinen Mitteln eine Erfindungstragweite eigner und selbständiger Art, wie sie sich in der räumlichen Anschauung nicht findet. Beide Quellen sind also zusammen,

aber nicht etwa confus, sondern jede für das, was sie ihrer Eigenthümlichkeit nach liefern kann, sowohl für die Forschung als auch für die blosse Orientirung zu benützen. Zu der Forderung eines Minimums von Geometrie für die Beweise und für das Gesammtsystem, ja, soweit es sein kann, auch für das Lernen und für die Erfindung, muss aber noch diejenige eines Minimums von Analysis hinzutreten. Der rein begriffliche Leitfaden bewegt sich nämlich noch um eine Stufe höher in der Abstraction als der analytische, und die Natur der Aufgabe wird jedesmal den nöthigen Stoff an abstracten sachlichen Ausgangsbegriffen liefern.

Analytischer Automatismus ist, soweit wirklich etwas Sachliches geschafft wird, keine ehrliche Thatsache, sondern ein täuschender Schein. Nur insoweit reine Rechnungszwecke als solche ins Auge gefasst werden, braucht bei dem Vorhandensein der zureichenden Gleichung nichts weiter zu geschehen, als die analytisch algebraische Operationsmaschine ins Spiel zu setzen. Dagegen ist schon die Bestimmung der Richtung und des Zweckes etwas Sachliches. Man muss von den Angaben des sachlichen Compass, auf den man blickt, ausdrücklich Rechenschaft geben; sonst bleibt der Entschluss und Uebergang zu gewissen analytischen Operationen unmotivirt. Für den besondern Fall der Geometrie wird es häufig, braucht aber nicht immer die räumliche Anschauung zu sein, aus welcher die sachlichen Motive der analytischen Aufstellungen und der analytischen Operationsverkettung entspringen. Sachlich und räumlich braucht hier nicht dasselbe zu bedeuten; denn beispielsweise enthalten Begriffe, wie Aehnlichkeit, Symmetrie, Ebenmaass u. dgl. einen Kern, der sachlich, aber nicht nur abstracter als die Anschauung ist, sondern auch noch innerlicher ist als die analytischen Rechnungsvorstellungen, von denen er gleichsam umhüllt wird.

Zu dem Kern, d. h. zu den principiell leitenden Sachbegriffen muss man vordringen, um das rechte Maass analytischer Zurüstung und construirender Anschaulichkeit bestimmen zu können. Dabei ist noch besonders der Aberglaube neuster Gaussischer Mode zu vermeiden, dass die algebraische Symbolverbindung es nur mit Zahlen zu thun habe. Letztere Annahme ist so falsch, dass man sich ihr gegenüber fragen muss, ob für die analytischen Formeln die Zahl das in erster Linie Wesentliche sei. Dies ist nicht der Fall; denn bestimmte Grössenarten, also Raumgrössen, werden als solche, d. h. ohne Rücksicht auf eine Trennung von Einheit

und Benennung, in Verhältniss und Gleichung gesetzt. Dabei sind z. B. die sachlichen Dimensionen auch in den analytischen Zeichen mitgedacht und werden in den Operationen combinirt. Blosse Zahlenrechnung würde immer nur sachlich dimensionslose Zahlen liefern. Es kann also in der Constitution analytischer Ausdrücke noch etwas mehr gefunden werden, als Regeln für blosse Zahlenrechnung, und in diesem höhern, auf die sachliche Natur der Grösse bezogenen Sinn ist die allgemeine symbolische Analysis mit dem Functionsbegriff als dem leitenden die erste Grundgestalt, in der alle sachliche Untersuchung sich ausprägen muss. Allein die sachliche Untersuchung selbst muss offenbar ihrer Ausprägung voranstehen, und dieses Princip genügt, um den scholastisch hohlen Gebrauch und überhaupt den Missbrauch analytisch symbolischer sowie auch unmittelbar anschaulicher Mittel, also die zweierlei Abwege zugleich auszuschliessen.

211. Manche Uebelstände in der Behandlungsart der Mathematik haben auch noch einen tiefern Grund als den in der vorvorigen Nummer berührten allgemeinen Verfall der mittelalterlich gearteten gelehrten Anstalten. Sie beruhen sichtlich genug auf der Thatsache, dass die Mathematik in mehreren Zweigen sozusagen erschöpft ist, d. h. ein gewisses Feld von Fortschritten durchlaufen hat und nun bei Punkten angekommen ist, über die sich wenigstens in den alten Richtungen nicht weiter hinausgelangen lässt. Wo gleichsam der Strom der Fortschritte versandet, da machen sich nur zu leicht allerlei überflüssige Künste breit, welche für den Mangel des wirklichen Fortschritts einen Ersatz gewähren oder vielmehr diesen Mangel durch den Schein von Neuheiten hinwegtäuschen sollen. Auf dieses Zubehör der Stauungserscheinungen in einzelnen Gebietstheilen wollen wir jedoch erst näher eingehen, nachdem wir mit unserer Uebersicht über die mathematisch mechanischen Wissenschaften weiter vorgedrungen und uns namentlich über den Charakter der analytischen Mechanik und der zugehörigen Lehrmittel orientirt haben werden. Vorläufig aber mag noch die auch grade für letzteres Gebiet besonders gültige Bemerkung Platz finden, dass da, wo ein Wissensstoff in den bisherigen Richtungen erschöpft zu sein scheint, anstatt müssiger Künsteleien wohl besser die Sorge für immer gewähltere Fassungen und Darstellungsarten am Orte wäre.

In der Mechanik ist die analytische Behandlung mit dem 18. Jahrhundert eine so überwiegende, ja man könnte fast sagen

eine so ausschliessliche geworden, dass man seitdem unter dem Ausdruck analytische Mechanik überhaupt die ganze höhere Mechanik versteht. Hienach ist die analytische Mechanik ebensowohl ein Bethätigungszweig allgemeiner mathematischer Theorien, als auch eine Abtheilung der realen Wissenschaft. Völlig klar wird man sich aber über diese doppelte Rolle derselben nur werden, wenn man sofort davon ausgeht, dass die fragliche Benennung, die eine besondere Wissenschaft anzeigen soll, doch in Wahrheit nur eine Abkürzung ist, die den Gegenstand der Anwendungen der analytischen Mittel bezeichnet. Wir können daher von der analytischen Mechanik dasselbe sagen, was uns von der analytischen Geometrie feststeht. Beide sind nur besondere Methoden, aber nicht eigentliche und selbständige Wissenschaften mit einem eigenthümlichen Gegenstande als Stoff. Wie die analytische Geometrie eine Anwendung der Analysis auf Geometrie überhaupt ist, so kann auch die analytische Mechanik nur als eine Bethätigung der Analysis an der allgemeinen Mechanik gelten. Die analytischen Verfahrungsarten sind eben nur dienende Hülfsmittel, und die Systemverfassung der gesammten Mechanik darf nicht durch ein blos dienstbares Element bestimmt werden. Es ist daher auch der Ausdruck rationelle Mechanik für den streng deducirbaren, d. h. auf letzte einfache Principien zurückführbaren Theil des übrigens oft nur praktisch empirischen Wissens vorzuziehen, sobald es gilt, den Inhalt einer selbständigen Wissenschaft und nicht blos die aus dem Gesichtspunkte der analytischen Methode gruppirten Wahrheiten gehörig zu bezeichnen.

Unter dieser Verwahrung können wir uns nun der Grundgestalt zuwenden, in welcher die analytische Mechanik in der Literatur ihre Existenz hat. Zunächst ist sie in dem monumentalen Grundwerk von Lagrange vorhanden, welches in unserer Schrift ausführlich gekennzeichnet, aber freilich in seinen Beziehungen zu dem Studium noch nicht gewürdigt ist. Es hat nicht in seiner Gesammtanlage, wohl aber in wesentlichen Theilen der Auffassungs- und Darstellungsart über die Form der spätern Lehrweise und über die Einrichtung der französischen und hiemit zugleich der noch bis heut maassgebend gebliebenen Lehrbücher entschieden. Nur ihm ist es zuzuschreiben, dass man von den Franzosen sagen kann, sie hätten mit ihren Cursen und ihrer Lehrbuchliteratur die wissenschaftliche Constitution sowie Form und Stoff des mechanischen Unterrichts auch für andere Völker

mitbestimmt. Ist auch die Entwicklung am Leitfaden einer Gesammtformel in der vorherrschenden Lehrweise als zu speculativ nicht angenommen worden, so sind doch übrigens die Curse der polytechnischen Schule, die hier maassgebend werden mussten, den einzelnen Schritten der Gangart von Lagrange vielfach gefolgt, und die meisten in den Lehrbüchern gewählten Wendungen würden dort nie einen Platz oder wenigstens nicht eine gleich vollkommene Gestaltung erhalten haben, wenn das Grundwerk und die von ihm her durch mannichfaltige Canäle vermittelte Ueberlieferung nicht vorangegangen wären. Ein letztes, in alle Feinheiten eingehendes Specialstudium der analytischen Mechanik ist heute noch nicht anders möglich, als durch ein Zurückgreifen auf jenes Grundwerk, welches der Sache selbst nicht nur den Namen gegeben, sondern auch einen grossen Theil des Stoffs überhaupt erst geliefert hat. Ja nicht blos für ein letztes Specialstudium, sondern auch für eine frühere Einführung in die allgemeinen Lehren und Gesichtspunkte möchten die Hauptcapitel und Hauptnummern von Lagranges Analytischer Mechanik das beste Orientirungsmittel Derjenigen bilden, die sich von vornherein Etwas zutrauen und nach der ersten Kenntnissnahme von den Grundbegriffen im Stande sind, sich die wichtigeren Lehren selbst herauszusuchen. Im letzten Grunde spricht ein überlegener und seinen Gegenstand schöpferisch beherrschender Geist nicht blos unvergleichlich zutreffender, sondern auch einfacher und verständlicher, als ein gemeines Lehrbuch, bei welchem an Stelle der Klarheit denn doch oft nur Plattheit zu finden ist. Der Vortheil, den das Studium eines Grundwerks jederzeit hat, wird in unserm besondern Fall noch dadurch gesteigert, dass seit dem Erscheinen der Lagrangeschen Arbeit erhebliche Erweiterungen der analytischen Mechanik gar nicht, beachtenswerthe Varianten nach Art der Hamiltonschen Speculation aber nur ganz vereinzelt vorgekommen sind.

212. Da jedoch nicht Jeder, der analytische Mechanik nach dem Schulherkommen treiben oder zu seiner Ausbildung studiren will, sofort die ausschliessliche Beschränkung auf die analytischen Mittel ohne ausdrückliche Veranschaulichung und ohne breitere Einmischung der elementar-mechanischen Grundlehren für sich passend finden mag, so wird die Wahl eines neuern Lehrbuchs meist eine praktisch wichtige Angelegenheit, bei welcher auch die Kürze und die hiedurch mögliche Schonung von Zeit und Geld

nicht erst in zweiter Linie maassgebend sein darf. Das nur einen mässigen Band umfassende Delaunaysche Buch, welches sich im Original als rationelle Mechanik bezeichnet, in der deutschen Uebersetzung aber nach Maassgabe des Hauptinhalts unter dem gewöhnlichen Titel einer analytischen Mechanik (Wiesbaden 1868) erschienen ist, hat mancherlei Vorzüge vor frühern oder gegenwärtigen Concurrenten. In der Erläuterung der Grundbegriffe verfährt es sorgfältig und häuft den blossen Calcül nicht mehr an, als es eine analytische Mechanik durchaus mit sich bringt. Wenn man nicht zuviel Zeit auf die vorausgeschickte, etwas zu breit behandelte Kinematik verwendet, so wird der Gebrauch dieses Lehrbuchs eine bequeme und zulängliche Einführung in das Gebiet vermitteln können. Wenigstens wird man Mehr, als die Delaunaysche Darstellung leistet, von eigentlichen Lehrbüchern nie zu erwarten haben. In früherer Zeit und zum Theil noch bis heute ist das umfangreichere Duhamelsche Lehrbuch in Frankreich und Deutschland gangbar gewesen, ohne dass man jedoch dessen Häufung des Stoffes oder die Darstellungsart sonderlich rühmen könnte. Vielleicht hat der Umstand, dass die weitschichtige, zweibändige Mechanik Poissons, die weder Grundwerk noch Lehrbuch, sondern ein auf Zusammenstellung und Ueberarbeitung beruhender Gesammttractat war, später als praktisches Erlernungsmittel der Wissenschaft ganz in den Hintergrund trat, dazu beigetragen, der in der Ausführung gar nicht vergleichbaren, aber mehr auf das durchschnittliche Bedürfniss berechneten Arbeit des Akademikers Duhamel einen Platz und nicht schwer verdienten Ruf zu verschaffen. Hat doch der letztere Gelehrte schliesslich im vierten, eigens der Mechanik gewidmeten, 1870 erschienenen Band seiner Arbeit über die Methoden der schliessenden Wissenschaften (Des méthodes dans les sciences de raisonnement) die dürftige Art noch besonders blosgestellt, in welcher er sich mit den Grundbegriffen und mit der Systematik abfand. Wäre Naviers oben erwähnter gediegener Cursus nicht grade in seinem dritten, die Mechanik behandelnden und auch deutsch (Hannover 1858) abgesondert erschienenen Bande für Manche etwas zu gedrängt, so würde er nicht etwa nur vor dem Duhamelschen Lehrbuch unbedingt den Vorzug verdient haben, sondern auch noch heute als zweckmässigstes Lernmittel an erster Stelle zu nennen sein. So aber wird für die Meisten das gekennzeichnete Lehrbuch Delaunays am ehesten zu empfehlen sein, um dem Anfänger die

Wege zu ebnen und besonders das geläufig zu machen, was aus der analytischen Formelzurüstung erforderlich ist. Will man aber an einem Beispiel sehen, wie sich in ausführlicheren Tractaten die Mechanik einschliesslich der Wärmemechanik in leidlicher Weise mit besonderer Rücksicht auf Kinematik und nicht allzu fern von der technischen Denkart dargestellt findet, so mag man allenfalls die zwei oder auch drei ersten Bände von Resals Mécanique générale (Paris 1873—75) namentlich für neuere Einzelheiten gelegentlich mit Nutzen nachschlagen.

Handelt es sich aber um einen eigentlichen Lehrcursus, so ist der traditionelle der Pariser polytechnischen Schule noch immer der verhältnissmässig beste geblieben, und wem die französische Sprache geläufig ist, mag nicht blos für die Analysis, sondern auch für die analytische Mechanik die für letztere ausführliche Form benützen, welche der erwähnte Naviersche Entwurf in der Schulentwicklung der nächsten Generation angenommen hat. Die fragliche Darstellung der Mechanik in zwei Bänden trägt den Namen des Navierschen Professurnachfolgers Sturm an der Stirn, muss aber als Collectiverzeugniss der polytechnischen Schule betrachtet werden und ist übrigens von einem Repetenten zurechtgeschnitten. Auch ist die hinzugefügte besondere repetitorische Zusammenfassung nicht ihr geringster Vorzug; denn bei Arbeiten des Lehrhandwerks und Darstellungen, die sonst keinen eignen wissenschaftlichen Werth haben, müssen solche Umstände für die Empfehlung entscheiden. Natürlich halte man bei solchen Büchern sich immer an die neuste Auflage, die bei laufend gebrauchten Schulbüchern meist nur eine geringe Anzahl Jahre hinter dem jedesmaligen Augenblick zurückdatiren wird. Man ist dann wenigstens sicher, ausser dem Text, der mehr als eine Generation alt ist, noch hinten so etwas wie die repetitorischen Hülfsmittel, Uebungsaufgaben und einige, wenn auch dürftige, auf manche Neuerungen bezügliche Zusätze, — kurz alle die praktischen Kleinigkeiten vorzufinden, ohne die ein derartiges Buchproduct noch weniger Werth haben würde, als schon so der Fall ist. Man muss nämlich immer davon ausgehen, dass der unter Umständen aus praktischen Rücksichten erforderliche Gebrauch untergeordneter Arbeiten, gleich demjenigen von Compilationen überhaupt, immer verhältnissmässig ein Uebel, wenn auch ein bisweilen unvermeidliches, sein wird.

Die Deutschen, welche bisher und zwar nicht blos in der

analytischen Mechanik wesentlich auf französische Werke und Lehrbücher angewiesen waren, haben nach dem Kriege von 1870, wie in allen so auch in der hier fraglichen Richtung, ihr Selbstgefühl aufgeregt gefunden, und eine Art rivalisirender Eitelkeit möchte gern den unleugbaren Sachverhalt vertuscht sehen. Die Rücksichten auf Wissenschaft und Studium gestatten aber glücklicherweise nicht, die Lücken, welche eine nationale Literatur gelassen hat, mit blosser Eitelkeit auszufüllen. So wird es denn auch vorläufig noch dabei sein Bewenden haben müssen, dass bei den Franzosen nicht blos die Form der analytischen Mechanik festgestellt worden ist, sondern dass auch von ihnen die sich durch Brauchbarkeit und formelles Geschick auszeichnenden Lehrcurse herstammen. Die inzwischen wieder gemachten Versuche, eigne deutsche Lehrbücher, die nicht blos Uebersetzungen oder Bearbeitungen sind, herzustellen, lassen nicht darauf schliessen, dass der gewünschte Ersatz allzubald geschafft werden dürfte. Es fehlt sichtlich an der Feinheit und an dem Geschick zur praktischen Auswahl des Stoffes. Die Beweglichkeit in leichten, nicht pedantischen Lehrwendungen, die an sich der Genauigkeit und Schärfe nichts zu vergeben brauchen, ist eine Eigenschaft, die auf dem Boden unserer Nachbarn zeitig ausgebildet und durch eine ganze, das Jahrhundert andauernde Schultradition grade in den mathematischen und verwandten Wissenschaften besonders cultivirt wurde.

Auch hat der Versuch eines selbständigen deutschen Lehrbuchs von G. Kirchhoff (unter dem Titel von „Vorlesungen über mathematische Physik; Mechanik“, Leipzig 1876) unsere Ansicht bestätigt; denn obwohl dieses Buch bisweilen unmittelbarer auf Lagrange zurückgreift, so ist es doch nicht die Darstellungsart, in welcher es auch nur an die Lehrbücher der Franzosen irgend heranreichte. Durch die Schwerfälligkeit seines Ganges und eine von vornherein allzu hochgeschraubte Art und Weise macht es dem Lernenden unnütze Schwierigkeiten und auf einen Leser, der das Gebiet kennt, sofort einen unharmonischen Eindruck. Für ein Lehrbuch ist es nicht nur mit hydrodynamischen und andern Lieblingsspecialitäten des Verfassers und überhaupt mit unfruchtbaren Speculationen unnütz überladen, sondern auch in der Production des Calcüls so ausschliesslich, dass es von vornherein jeder Anschauungshülfe ermangelt, die Grundbegriffe, in denen sich der Verfasser selbst nicht klar geworden ist, trotz gelegentlicher

Mischung der letzten Ergebnisse mit dem Elementarsten, nicht hervortreten und die Systematik des Stoffes kaum sichtbar werden lässt. Das Verdienst, ein paar überdies noch überschätzte, neuere Varianten der analytischen Mechanik, wie namentlich das Hamiltonsche sogenannte Princip, mitzuenthalten, kann nicht über die sonstige, dem Lehrzweck wenig entgegenkommende Art der Stoffauswahl und der Darstellungsform hinweghelfen. Grade weil die Unternehmung zu den fachmässig fundirteren ihrer Art gehört und wir uns demgemäss das Eingehen auf andere Versuche erlassen können, ist sichere Aussicht vorhanden, dass die Situation in Rücksicht auf die französischen Lehrbücher sich vorläufig nicht verändern werde. Sollte sich auch ein Theil des Publicums der Universitäten, etwa für Examina, darein finden müssen, schwerfälligere Lehrbücher durchzuarbeiten, so wird es doch zur gewandteren Aushülfe den privaten Gebrauch der französischen Lehrmittel nicht ganz entbehren können. Auf den deutschen polytechnischen und ähnlichen Schulen aber, denen eine freiere und praktischere Behandlung der Mathematik und Mechanik Lebensprincip ihrer nicht blos auf das Wiederlehren sondern auf die Anwendung berechneten Studienerfolge ist, — in dieser moderneren Sphäre wird man sich vollends an solche Lehrmittel halten müssen, welche sich in Stoffauswahl und Behandlungsart durch Lehrgeschick und etwas Geschmack auszeichnen. Uebrigens kann man mit einem Zehntel der Mühe, die ein unbehülfliches Lehrbuch begrifflos analytischer Art auferlegt, sich auch von vornherein den Eingang in ein Grundwerk bahnen und das Verständniss seines für die erste Aneignung der Wissenschaft wichtigsten Inhalts vermitteln. Man hat also gar keinen Grund, das unmittelbare Studium von Hauptabschnitten des Lagrangeschen Werks hinauszuschieben, wenn man sich die erste Einführung in die Wissenschaft nicht wirklich durch einen seinem Namen entsprechenden Lehrcursus d. h. durch eine zweckmässig vorgetragene Auswahl der elementarsten Stoffe und Wendungen erleichtern lässt.

213. Die Mechanik ist keine blosse Bethätigung von Mathematik, sondern beruht wesentlich auf realen Thatsachen. Allerdings kann sie schon bei den ersten Schritten in der Verarbeitung dieser Thatsachen die Mathematik nicht entbehren; aber es sind, wie die Geschichte der Sache gezeigt hat, verhältnissmässig sehr einfache mathematische Hülfsmittel gewesen, mit denen man am

meisten vorwärts gekommen und fast zu allen Hauptwahrheiten gelangt ist. Die hinterher angewendete analytische Methode hat auch in ihrer Art manche Vortheile mit sich gebracht, aber in ihren allzu weiten Ausspinnungen auch manches ursprünglich klarere Verhältniss gleichsam mit Calcülgerölle verschüttet. Wer ausschliesslich das Analytische an der Mechanik studirt und seine Aufmerksamkeit nur auf Hülfsmittel richtet, welche die Anwendung des Calcüls zum Hauptzweck haben, wird in Gefahr kommen, die natürlichsten Grundlagen der Sache zu vernachlässigen und sich so das Verständniss zu erschweren. Ein gutes Gegenmittel gegen diese einseitige Ablenkung und zugleich eine praktische Hülfe zur ersten Orientirung wäre die Berücksichtigung von dem, was in besseren Lehrbüchern der gesammten Physik von den Grundlagen der Mechanik dargestellt werden sollte. Hier muss nämlich der Ausgangspunkt ein experimenteller sein, und die mathematischen Entwicklungen, die sich gewöhnlich auf das Einfache und am meisten Praktische beschränken, dürfen nur die Rolle von dienenden Hülfsmitteln spielen. Diese Behandlungsart bringt in das Ganze mehr Natürlichkeit und lässt die erfahrungsmässigen Beziehungen anschaulicher hervortreten.

Wenn es sich nun aber gegenwärtig um die Wahl eines ausgiebigen physikalischen Lehrcursus handelt, so ist zuvor zu bedenken, dass ein eigentliches Grundwerk, welches mehr als ein seiner Art nach ja immer auf Zusammenstellung beruhendes Lehrbuch wäre, für die gesammte Physik noch nie existirt hat. Dieser Umstand lässt einerseits die Anforderungen an ein heutiges Lehrwerk nicht zu hoch spannen und erleichtert andererseits die Entschliessung, mit dem, was geboten wird, vorlieb zu nehmen, wenn es nur dem Lehrzweck in einigermaassen gewählter Weise entspricht. Letztere Eigenschaft hat nun in einem gewissen Maasse wiederum ein Cursus der Pariser polytechnischen Schule, nämlich Jamins Cours de physique. Verhältnissmässig die meisten Vorzüge hatte er in seiner ursprünglichen, ihm noch ausschliesslich vom genannten Verfasser selbst gegebenen Gestalt, in welcher er von Ende der fünfziger bis Mitte der sechziger Jahre erschien. Doch kann es nichts nützen, von dieser bessern Anlage jetzt noch weiter zu sprechen. Bei Lehrbüchern, zumal bei ausführlichen oder solchen mit dem Charakter von Handbüchern, in denen die Haupteinzelheiten und laufenden Vorkommnisse der Wissenschaft vereinigt werden, sind einige oder gar ein paar Jahrzehnte

genügend, sie veralten zu lassen und praktisch unbrauchbar zu machen. Ein solches Veralten tritt aber im höchsten Grade für Uebergangsperioden von Erfahrungswissenschaften ein, wenn die Auffassungen sich wesentlich ändern und zugleich die Stoffe sich erheblich häufen. Schon die dritte Auflage des erwähnten, gewissermaassen auch als ein Erzeugniss des Pariser polytechnischen Unterrichts anzusehenden Cursus, die um die achtziger Jahre erschien, hat sich in vier zum Theil starke Bände verbreitert, was von der Aufnahme und Ausspinnung von Uebergangstheorien, vom falschen Cultus der Erzeugnisse der Tagesautoritätchen und überhaupt von kritischer Unzulänglichkeit herrührt. Kann letztere nun auch bei einem Gesammtlehrbuch, Angesichts unserer Zeit und des Zustandes der Physik, nicht überraschen, so hindert sie doch die für den Lernzweck so nöthige Concentration und beeinträchtigt die Consequenz im Zusammenhang aller Bestandtheile.

Dennoch bleiben dem fraglichen Werk gewisse alte Vorzüge des Geschmacks, der Ordnung und eines verdienstlichen Maasses eigentlicher Lehrroutine, die beispielsweise seiner deutschen Nachahmung abgehen. Letztere, nämlich das Wüllnersche Lehrbuch, war ursprünglich gradezu nach dem ersten Jaminschen Cursus gearbeitet, hat aber mehr den Charakter eines Handbuchs und noch dazu eines unbehülflichen angenommen, welches mit seiner noch grössern Weitschichtigkeit im besten Falle die Eigenschaft verbindet, gelegentlich eine reichhaltige, wenn auch äusserst unkritische Materialiensammlung vorzustellen. Um jedoch auf unsern besondern Ausgangspunkt zurückzukommen, so wird für den Anfänger die Kenntnissnahme von den experimentellen und mathematisch einfachen Grundlagen der Mechanik, wie sie in einem Lehrbuch der Physik enthalten sind, nur dann eine nützliche Vorstufe für die specifisch analytischen Lehren, wenn sie zugleich eine Erinnerung daran ist, dass die Wissenschaft auch bei Anwendung höherer analytischer Kunstmittel ihren Ursprung nicht vergessen und ihre anschaulichen Ausgangspunkte nicht verleugnen soll. Die steigende Tendenz mathematistischer Art hat jedoch auch in den Lehrbüchern der Physik die Erfahrungsgrundlagen der Mechanik bereits allzusehr in den Hintergrund gedrängt und den analytischen Rahmen fälschlich als Hauptsache erscheinen lassen. Dies ist auch schon stark in der neuen Gestalt des erwähnten physikalischen Cursus der Fall, während beispielsweise die Behandlung der Mechanik in dem Wüllnerschen Physiklehr-

buch auch sonst überhaupt nicht in Frage kommen kann, weil sie nicht blos ungelenk, sondern veraltet ist.

Für ein richtigeres Maassverhältniss des Experimentellen und Mathematischen, sowie auch sonst in der Darstellungsform war einst Biots grösseres und umfassendes Werk von 1816 in seiner Art und für seine Zeit weit besser gerathen als das Jaminsche. Sein Verfasser war aber schon mit jener Generation ein junger Mann gewesen, die an den vollsten und thatsächlichsten Wirkungen vom Geiste des 18. Jahrhunderts theilhatte. Seitdem hat sich geistige Reaction und Umnebelung früherer Klarheit auch im Gelehrtenthum, begünstigt von rückläufigen Staats- und Gesellschaftselementen, immer breiter auslegen und die gesunde Form der Wissenschaft beeinträchtigen können. Wahre Wissenschaft ist zu jeder Zeit geistig revolutionär gewesen, und will man ihre lebensvollen Ansätze und Wendungen in sich aufnehmen, so muss man meistens auf die einfache Gestalt zurückgreifen, in welcher die neuen Wahrheiten bei ihrer Auffindung hervortraten.

Die moderne Mechanik ist nun als ein Stück Physik in das Dasein getreten, und wer da glaubt, die eigensten Galileischen Wendungen oder diejenigen von Huyghens heut entbehren zu können, wird vom tiefern Geiste der Sache nicht viel in sich aufnehmen. Die Mechanik will als ein zugleich experimenteller und rationeller, sozusagen allgemeiner Theil der Physik studirt sein, und wenn es einmal zur Ausarbeitung eines bessern Grundwerks der gesammten Physik kommt, so wird die Artung und Fassung seines allgemein mechanischen Theils nicht blos die Schwächen der bisherigen Physiklehrbücher, sondern auch die Einseitigkeit der analytischen Mechanikdarstellungen auch im Einzelnen erkennen lassen.

214. Das Bedürfniss, welches sich dem ausschliesslichen Calcül gegenüber im Studium überall fühlbar macht, hat sich in der mechanischen Forschung selbst schon einigermaassen zur Geltung gebracht. Der Rückschlag gegen die blosse Analysis, welchen Poinsot mit seinen verhältnissmässig klaren und anschaulichen Abhandlungen in der Mechanik vertrat, ist eine ähnliche Erscheinung, wie im Gebiet der reinen Mathematik die projectivische Geometrie. Nur sind die Ansätze zu einer synthetischen Mechanik einfacher ausgefallen und weit weniger, als jener neue geometrische Gesichtspunkt, auf den Kreis bestimmter Verhältnisse und Aufgaben eingeschränkt. Das Poinsotsche Verfahren ist im

Grunde nichts weiter als ein Stück Wiedereinsetzung des natürlichen Denkens in seine Rechte. Nicht die Poinsotsche Statik selbst, bei der man doch gar zu sehr an Euklidische Beweisformen erinnert wird, und auch nicht die Einführung der Kräftepaare an sich selbst sind etwa die Thatsachen, in denen man die Verkörperung der neuen Methode zu suchen hat. Auch die Bereicherung der Rotationstheorie mit neuen eleganten Wendungen ist nicht das in unserer besondern Frage Entscheidende. Es ist vielmehr ganz im Allgemeinen die in den Poinsotschen Abhandlungen herrschende natürlichere Gangart mit ihrer anschaulichen Darlegung der Begriffe, was den grossen Vorzug der neuen, gegen leere Geschwätzigkeit des Calcüls protestirenden Methode ausmacht. Es ist ungefähr dieselbe Zeit gewesen, in welcher die projectivische Geometrie und die gegen den Calcül reagirende synthetisch rationelle Mechanik in der Literatur aufzutauchen begannen, und es hat ebenfalls in beiden Richtungen länger als ein Menschenalter gedauert, ehe sich die neuen Standpunkte ein gewisses Maass von Anerkennung und einen, wenn auch nur in allerlei Mischungen sichtbaren Einfluss erringen konnten. Der stumpfe Widerstand, der grade von den beschränktesten Parteigängern des Calcüls am zähesten entgegengesetzt wurde, häufte die Schwierigkeiten einer gehörigen Grenzziehung, und noch heut kann man eher ungleichartige und wüste Mischungen der Methoden, als Einheitsgebilde echter Art antreffen, in denen jedes Mittel seinem Zweck angemessen wäre. Von den Mischlingserzeugnissen der Analysis und der Projectivik haben wir gesprochen; in der Mechanik aber konnten Einstreuungen von synthetischer Art nicht ganz so unpassend gerathen, weil schliesslich dabei mindestens eine Beschneidung des Calcüls und eine theilweise Ersetzung des Rechnungsschematismus durch ein allgemeineres Raisonnement Platz zu greifen hatte. Das Unbehülfliche konnte sich also hier nur darin äussern, dass Raisonnement und Calcül unter den Händen minder fähiger Bearbeiter nicht richtig abgewogen und vertheilt wurden. Trotz solcher Uebelstände sind nun aber die Zugeständnisse, welche man der Poinsotschen Methode auch schon in bessern Lehrbüchern gemacht hat, als ein Gewinn für die Verfassung der Wissenschaft und für die Bequemlichkeit des Studiums anzusehen. Das weitere Ziel würde darin bestehen, die synthetisch rationelle Mechanik, oder vielmehr die sachlichen Ausgangspunkte, und zwar nicht blos innerhalb der Schranken der

von Poinsot gegebenen Beispiele, zur allgemeinen Grundgestalt des mechanischen Wissens zu machen. Genauer untersucht und weiter verfolgt, bestände diese Forderung in nichts Anderem, als in dem Festhalten an einer natürlichen logischen Abstufung und Consequenz. Das Raisonnement am Leitfaden allgemeiner Begriffe und Anschauungen steht nämlich in Rücksicht auf Tragweite und Kürze da, wo es an sich überhaupt etwas leisten kann, noch eine Stufe höher als die analytische Verkettung durch den blossen Calcül, so dass man nicht blos unelegant, sondern auch logisch fehlerhaft verfährt, wenn man das, was sich vor der besondern Rechnung begrifflich feststellen lässt, auf weitschweifige Weise aus dem Formelapparat herausklaubt oder oft auch nur herauszuklauben scheint.

Die Geschichte selbst giebt mehr als blosse Fingerzeige dafür, wie das System der Hauptwahrheiten der rationellen Mechanik mit einfachen mathematischen Mitteln im Wesentlichen abgeschlossen werden konnte, und wie wenig die späteren Vortheile der analytischen Behandlungsart den Bestand an eigentlichen Entdeckungen erweitert haben. Das Eindringen in einige Specialitäten ist durch die sich grade hier geltend machende äusserliche Bequemlichkeit des analytischen Verfahrens allerdings erleichtert und überdies für einige allgemeine Grundverhältnisse ein abstract bezeichnender Ausdruck gewonnen worden; aber man hat zu den grundlegenden und originalen Haupteinsichten durch die analytische Verkettungsform nichts Erhebliches hinzugefügt, und wenn sich bei grossen Analytikern, wie Lagrange, etwas Schöpferisches findet, so darf man nicht übersehen, dass in solchen hervorragenden Fällen niemals völlige Einseitigkeit der Anschauungsweise geherrscht hat. Die analytische Sprache hat oft nur zum Ausdruck gebracht, was auf dem Wege rationell höher belegener Conceptionen oder durch unmittelbare Anschauung erkannt worden war. Uebrigens aber sind die Verdienste, die innerhalb der Analysis selbst zu Fortschritten führen, nicht mit denjenigen um die materiellen Wahrheiten der Mechanik zu verwechseln. Selbst da, wo die Entwicklung besonderer mechanischer Einsichten von der Ausführung analytischer Operationen abhängig gemacht wurde, ist es bekannt, welchen Widerstand diese Art der Problemfassung den Lösungsbestrebungen entgegensetzte. Die Aufstellung der Gleichungen ist oft genug keine grosse Schwierigkeit gewesen; aber man hatte mit einer solchen Aufstellung nichts erreicht, wenn die weiteren

Mittel der Analysis beispielsweise noch keine integrirte Form der Beziehungen irgend absehen liessen. In solchen Fällen wurde der Schein der Lösung oder Lösbarkeit, den die symbolische Formulirung erregte, häufig zu einer Ablenkung von dem unmittelbaren Wege, auf welchem die Aufgabe, wenn auch vielleicht zunächst nur unter bestimmteren Voraussetzungen und daher in engern Grenzen, mit mehr Chancen in Angriff genommen werden konnte.

Galilei und Huyghens, diese beiden Schöpfer der modernen Mechanik, sind zu ihren Ergebnissen auch ohne die Existenz der Analysis gelangt. Newton aber, der dritte Hauptförderer des neuen Wissenszweiges, ist mit sehr einfachen analytischen Vorkehrungen ausgekommen und hat in der Darstellung sogar die alte Synthesis vorgezogen. Mit ihm war aber der Hauptkreis der neuen Wissenschaft so gut wie durchlaufen, und es sollte daher auch bei der Abwägung des Werths der Methoden nie vergessen werden, dass für die eigentliche Erfindung und für das schöpferisch grundlegende Verhalten die unmittelbaren und anschaulichen Auffassungs- und Behandlungsarten das Entscheidende vorgethan hatten, ehe die Analysis mit ihrer Abstraction und ihren symbolischen Kunstmitteln die vorhandenen Wahrheiten gleichsam nur in eine andere Sprache übersetzte.

Dagegen sind wir von einer Ueberschätzung der besondern Poinsotschen Verfahrungsarten, wie schon früher angedeutet, weit genug entfernt. Diese Verfahrungsarten setzten ihren Urheber nicht einmal in den Stand, ein völliges Missverständniss von Sätzen und geometrisch mechanischen Anordnungen Lagranges zu vermeiden. Sie waren überdies nicht einmal immer echte und reine Sprösslinge der Anschauung, sondern wie die Kräftepaare von den analytischen Drehungsmomenten, von analytischen Begriffen her entnommen und hatten vermöge ihres erborgten Charakters auch noch sachliche Unbestimmtheiten an sich. Die Poinsotschen Wendungen gehören daher auch im eigentlichen Sinne des Worts zu den mathematischen Reactionserscheinungen des 19. Jahrhunderts, was aber eine relative Wohlthätigkeit derselben nicht ausschliesst. Es wurde wenigstens die eine der scholastischen Einseitigkeiten durch eine entgegengesetzte gemildert; denn waren Poinsots beste Wendungen auch nur ein Spielwerk im Rahmen beengten Schulgeistes, so wirkten sie doch in den Wirbeln blos analytischen Schulstaubes, wie untergeordnete Windmacherei ihn erregte, ähnlich einem etwas niederschlagenden Regen.

Es versteht sich, dass der höhere, sachlich natürliche Standpunkt, auf den wir für Mathematik und Mechanik hingewiesen haben, nur eine einzige Methode mitsichbringt, vermöge deren sich die jedesmaligen Mittel naturgemäss vertheilen. Auf diese Weise kommen alle Mittel, jedes an seinem Ort, zur Anwendung, und dem abstracten Rechnen wird nicht minder entsprochen als dem concreten Verbinden unmittelbarer Thatsachen und Anschauungen. Für diese Zwecke bedarf es aber keiner Künstlichkeiten oder gar neuer hybrider Begriffe, sondern es ist im Gegentheil genügend, an den alten geschichtlichen Grundlagen festzuhalten, deren analytischen Ausbau, soweit er eine überlegene Abstraction ist, als wesentlichen Fortschritt zu erkennen, überall aber die Beschränktheiten, Ausartungen und Verschrobenheiten, gleichviel ob sie der antiken Synthese, dem neuern analytischen Aufschwung oder den neusten synthetischen Reactionen angehören, im Ganzen wie im Einzelnen abzuthun.

215. In jeder Wissenschaft kann die Geschichte ihres Werdens mehr oder minder eine indirecte Anweisung für das Studium sein. Die gesichtete Darlegung der Bestandstücke, aus denen nach und nach das schliesslich vorhandene Ganze geworden ist, macht die natürliche Stufenfolge sichtbar, in welcher von den einfacheren und unmittelbareren Anschauungen zu den letzten Abstractionen und kunstreicheren Methoden fortgeschritten wurde. In ganz besonderm Maasse gilt nun diese Nützlichkeit der Wissenschaftsgeschichte für das Studium der gesammten Mechanik, so dass man behaupten darf, die historische Darstellung selbst bilde in ihren Hauptausgangspunkten eine natürliche erste Einleitung in das Gebiet. In der That war Letzteres auch kein Nebengesichtspunkt bei der Abfassung der vorliegenden Schrift gewesen. Mindestens sollte die Darstellung der früheren Epochen so selbstgenugsam und so wenig von anderm Wissen abhängig sein, dass vielmehr umgekehrt die Grundbegriffe des Gebiets grade in dem historischen Zusammenhange eine der sonstigen Rechenschaft überlegene Erläuterung fänden. In dieser Beziehung noch auf andere Hülfsmittel zurückzugreifen, könnte nur dann einen Sinn haben, wenn es sich irgendwo um die Versinnlichung von Experimenten handelte. Für die späteren Epochen ist dagegen nicht zu vergessen, dass hier die Einfachheit der mathematischen Mittel aufhört, und dass man sich daher im Studium unseres eingehenden Berichts nur dann ohne jeden Rest genügen kann, wenn man

sich zuvor das Verständniss der Grundbegriffe der höhern Analysis eröffnet hat. Man wird alsdann auch den Contrast wahrnehmen, der in dem Aufbau der Wahrheiten herrscht, je nachdem die einfache Natürlichkeit der ursprünglichen Verfahrungsarten oder aber die künstlich vermittelte Denkweise der spätern Zeit maassgebend gewesen ist.

Ein ähnlicher Vortheil würde sich auch für die Erlernung der reinen Mathematik ergeben, wenn es von diesem vielverzweigten Gebiet eine kritische Geschichte aller eigenthümlichen Principien, Ausgangspunkte und Hauptwendungen gäbe. Die allgemeine Geschichtsschreibung der Mathematik ist aber bis heute noch so ziemlich auf dem Standpunkt verblieben, auf welchem sie Montucla im 18. Jahrhundert in den noch von ihm selbst abgefassten Bänden seiner ausgedehnten Unternehmung hinterlassen hat. Das umfassende Werk des Franzosen ist später für kürzere Darstellungen die fast ausschliessliche Quelle geworden, und noch den heutigen Versuchen solcher abgekürzten Berichte sieht man sofort ihre vollständige Abhängigkeit von der Arbeit jenes Jahrhunderts an. Auch wagen sie sich begreiflicherweise nicht recht an das 19. Jahrhundert und bleiben sogar für die frühere Zeit da äusserst unzulänglich, wo die originalen Theile des Montucla-schen Werks versagen und nur auf einer viel tiefer stehenden Ergänzungsarbeit zu fussen ist. Ein gehöriges Verständniss für die Hauptziele der Arbeiten eines Lagrange würde man in solchen Darstellungen vergebens suchen, und dies ist nur ein einzelnes Beispiel für die weitere Manier, in welcher man sich in derartigen Geschichten der Mathematik mit den modernen Grössen abfindet. Auch Montucla selbst zeichnete sich mehr durch sorgfältige Ausführlichkeit in der Wiedergabe der leichter auffassbaren Thatsachen als durch besondere kritische Vertiefung aus. Das einzige Werk, welches im 19. Jahrhundert im Gebiet der Geschichte der Mathematik durch eine geistvolle Behandlung hervorragt, sind die vier Bände von Libri, welche die Schicksale der mathematischen Wissenschaften in Italien seit der Renaissance behandeln und auch noch soweit gelangt sind, um die Darstellung Galileis einzuschliessen. Diese detaillirt und kritisch angelegte, französisch geschriebene und zuerst in Paris 1838—1841 erschienene Arbeit des gebornen Italieners ist noch lange nachher in Deutschland (Halle 1865) nachgedruckt worden. Es ist in der That eine Musterarbeit, bezieht sich aber leider nur auf die Vorbereitungen

und ersten Ausgangspunkte der neuern Mathematik und ihrer Anwendungen und zwar auch auf diese nur insoweit, als das hier allerdings maassgebende Italien in Frage kommt.

Was man sonst noch für die Geschichte der Mathematik anführen könnte, verliert sich ganz und gar in Monographien, und hiezu kommt noch, dass diese Einzelschriften in ihrem abgerissenen Stückwerk hauptsächlich alte oder mittelalterliche Vorgänge von geringerem Interesse zum Gegenstande haben. Von unvergleichlich höherem Werth, als solche meist nur auf gewöhnliche Gelehrsamkeit und äusserliche Auffassung bedachten Specialitätsschriften und ausserdem auch hoch über dem Niveau der bisherigen Gesammtgeschichtsschreibung gelegen, ergeben grade die vereinzelten historisch aufklärenden Bemerkungen von Mathematikern ersten Ranges die besten Fingerzeige für ein tieferes Eindringen. So sind namentlich Lagranges Vorträge über die Functionenrechnung reich an subtilen Nachweisungen über die Art, wie verschiedene Wahrheiten der Analysis aufgefunden und geschichtlich weiterentwickelt wurden. Ueberhaupt muss es in jeder Art von Wissenschaftsgeschichte ein leitender Grundsatz sein, die historischen Aperçus der schöpferischen Geister höher zu achten, als die gemeine, gleichsam professionelle Geschichtsschreibung. Die Feinheiten und letzten Unterschiede sowie die entlegeneren Elemente des Zusammenhangs sind im günstigsten Falle zunächst denen sichtbar, die das Gebiet gestaltend und weiterbildend beherrschen. Der Fall einer kritischen Geschichtsschreibung von wirklich eindringender Art wird immer erst später eintreten, und es wird auch dann noch eine Seltenheit sein, dass dieses Eindringen über die gemeine Kritik hinausreicht und mit der Fähigkeit verbunden ist, die schöpferischen Motive der bedeutenden Geister in ihrer Eigenartigkeit zu erfassen.

Ueber den Mangel einer Geschichte der Mathematik des 19. Jahrhunderts kann man sich eine Rechenschaft geben, die zugleich auf den Stand der Wissenschaft selbst einiges Licht zurückwirft. Zunächst versteht es sich von selbst, dass die neuste Manier, nur noch in ganz specialistischen Winkeln des mathematischen Feldes thätig zu sein oder oft auch nur den Schein fördernder Thätigkeit zu erzeugen, die Zusammenhaltung dieser sich verlierenden Posten zu einer Nothwendigkeit der Geschichtsschreibung macht, wäre es auch nur um nachzuweisen, wie unergiebig und hohl viele dieser Unternehmungen oder blossen

Gebährungen sind. Hiedurch würde nun aber die Beschaffung eines geschichtlichen Berichts arg mit solchen Vorarbeiten belastet, deren Ergebniss zu der aufzuwendenden Mühe in keinem Verhältniss stände. Die verworrene Mischung der Thatsachen mit dem völlig Unfruchtbaren, aber dennoch oft in Geltung und Ansehen Stehenden, müsste den unkritischen Berichterstatter ganz desorientiren, den kritischen aber dazu treiben, öfter kurzen Process zu machen und sich von Vielerlei schon dessen bedeutungsloser Physionomie wegen abzuwenden. Eine solche Sichtung würde aber sicherlich keine äusserlich lohnende Arbeit, sondern ein persönliches Opfer sein, wie es innerhalb der Kreise des mathematischen Lehrgeschäfts wohl nicht zu gewärtigen ist. Man denke beispielsweise nur daran, welche Rolle die neusten Varianten der Algebra, seien es nun Invarianten oder Covarianten, in der gegenwärtigen collegialischen Schätzung der Wissenschaftsfortschritte spielen! Wer diese und ähnliche Abfälle der bereits an ihre Grenzen gerathenen Wissenschaft und die meistens nur neuen Worthülsen älterer Dinge richtig würdigen wollte, käme in die Lage, so viele Tagesautoritätchen zu verletzen, dass er dabei, wenn er keinen andern Rückhalt als sein Buch hätte, seines wissenschaftlichen Lebens nicht mehr sicher sein würde. Zu alledem kommt aber thatsächlich noch die Schwierigkeit, selbst in Anknüpfung an die bessere Ueberlieferung der älteren Zeit die späteren Ausläufer richtig zu gruppiren und das wirklich Mehrgewonnene, auch wenn sein praktischer Werth nicht gross sein sollte, vollständig und übersichtlich darzustellen. Es schlösse eine solche concentrirte Darlegung nichts Geringeres ein, als eine noch erst zu schaffende Systematisirung von dem, was als Gesammtheit noch in keinem Kopfe eine zusammenhängende Gestalt gewonnen hat. Die Erfüllung eines solchen Erfordernisses wäre aber mehr, als sich auch von grössern geschichtlichen Unternehmungen und den durchschnittlichen Fähigkeiten der zur Geschichtsschreibung gewöhnlich geneigten Personen erwarten lässt.

Die geschichtsschreiberische Lücke, auf die wir eben hinwiesen, ist um so bezeichnender, als der Punkt, bei welchem die reine Mathematik schon im Laufe des 18. Jahrhunderts anlangte, eine Stauung in Aussicht gestellt und auch wirklich im 19. Jahrhundert mit sich gebracht hat. Wenn sonst die Wissenschaften bei Grenzen anlangen, wo sie unfruchtbar werden, so pflegen ihre jedesmaligen Vertreter in historischen Rückblicken eine Ent-

schädigung für die versagten Fortschritte zu suchen. Man beschäftigt sich alsdann in grosser Breite mit der Geschichte des Faches und zehrt auch da, wo jenes nicht unmittelbar der Fall ist, von der Vergangenheit, indem man an deren Schöpfungen mit Kleinigkeiten und in Nebenvariationen herumspielt. Ist nun Letzteres auch in der heutigen Mathematik sichtbar genug, so hat doch bis jetzt jene Aufraffung zu einer systematischen und umfassenden Geschichtsschreibung gefehlt, und es dürfte die Schuld hieran einzig in dem abschreckenden Zustand der neusten Phase zu suchen sein. Die Zerfahrenheiten jüngster Gestalt haben noch nicht hinreichend ausgespielt, und es ist demgemäss der Tisch mit allerlei Geschirr besetzt, welches den Blick eines durchschnittlichen Historikers verwirren und ausser Stand setzen würde, mit den verschiedenen, zwar bemalten und mit allerlei Etiquetten versehenen, aber leeren Schüsseln gehörig aufzuräumen.

216. Verbindet man in der Gesammtbetrachtung des wissenschaftlichen Zustandes die reine Mathematik mit den Gebieten, in denen sie ihre Anwendung suchen muss, so zeigt sich bezüglich der Fortschritte gegenwärtig ein erheblicher Contrast. Während nämlich die reine Mathematik offenbar vielfach an ausganglose Strassenenden gerathen ist und sich schon länger auch da, wo sie durch bessere Geister vertreten war, an erschöpften Gegenständen und Richtungen abgemüht hat, ist die Physik nicht unerheblich weitergekommen und hat im letzten halben Jahrhundert einige bedeutendere Entdeckungen aufzuweisen, die zum Theil, wie namentlich das mechanische Wärmeäquivalent, zur Bethätigung des rechnenden Denkens neue Gelegenheit gegeben haben. Da sich die reine Mathematik und die Physik in Rücksicht auf wissenschaftliche Institutionen unter äusserlich ziemlich gleichen Verhältnissen befinden, so kann man die Stagnation in dem einen und die Bewegung in dem andern Gebiet zunächst nur auf die innern Lebensbedingungen zurückführen. Erst in zweiter Linie kann demgemäss der Verfall der Akademien und Universitäten in Anschlag kommen. Dieser Verfall verstärkt die Stauungen im Gebiet der reinen Mathematik und verringert die Fortschritte, die sonst im realen Gebiet gemacht werden könnten; aber er ist weder in der einen noch in der andern Richtung ein zureichender Erklärungsgrund des innern Lebens der Wissenschaft. Letzteres ist glücklicherweise in Allem, wo ein frisches Interesse des menschlichen Geistes als Motiv zu Grunde liegt,

nicht an wurmstichige Einrichtungen gebunden. Man erinnere sich, dass die erste Hauptentdeckung des Jahrhunderts, welche für Mechanik und Physik von so grosser Tragweite ist, von einem deutschen Arzt, also, wie es die zünftige Gelehrsamkeit nennt, von einem blossen Dilettanten gemacht wurde, und dass dieselbe keineswegs ein Geschenk des Zufalls, sondern die Frucht systematischen Nachdenkens und wohlangelegter rechnender Combination gewesen.

Die Bereicherung mit bedeutenden neuen Mitteln datirt in der Mathematik von der Fluxionenmethode Newtons, also aus dem 17. Jahrhundert, und hat dann wesentlich in der speciellen Weiterentwicklung von dem bestanden, was schon den für die Gravitationsmechanik ursprünglich nothwendigen Calcül ermöglicht hatte. Ihren Höhepunkt erreichte diese secundäre Entwicklung mit dem von Euler vorbereiteten und von Lagrange geschaffenen Variationscalcül. Hiemit und zugleich mit dem Uebergang vom 18. zum 19. Jahrhundert muss man den ursprünglich angelegten Cyklus analytischer Fortschritte als durchlaufen ansehen. In der That haben auch die späteren namhaften Mathematiker nur noch Nebenwege betreten können oder haben sich von vornherein in solche Speculationen zurückziehen müssen, die praktisch bedeutungslos sind und in jedem Jahrhundert nur als Nebenspiele des Geistes gelten können. Was zunächst diese mussereichen und mit dem Bedürfniss der realen Wissenschaft in gar keinem Zusammenhang stehenden Speculationsvergnügungen betrifft, so hat man sich an der Schwelle des 19. Jahrhunderts wieder Fermats erinnert, und seine unbewiesenen Sätze zahlentheoretischer Art sind der grosse Gegenstand geworden, an welchem sich eine besondere Disciplin aufgerankt und schliesslich auf den deutschen Universitäten recht breit ausgelegt hat. Von den lateinisch geschriebenen „Arithmetischen Untersuchungen“ von Gauss im Eingange des 19. Jahrhunderts und von Legendres „Théorie des nombres“ bis zu Dirichlets Beiträgen und der nach dessen Tode auf Grund von Vorlesungen unter seinem Namen erschienenen Zahlentheorie haben sich mancherlei Variationen dieses Gebiets abgespielt, und es ist schliesslich dahin gekommen, dass dieser Speculationszweig besonders seit Dirichlets Vorgang auf deutschen Universitäten einen Hauptgegenstand von Vorlesungen und zwar von solchen gebildet hat, die für das Studium als maassgebend in Geltung gebracht wurden.

Eine andere Wendung, welche der allgemeine im Grossen herrschende Stillstand mit sich gebracht hat, ist die auf das Kleine und äusserst speciell abseits Liegende gewesen. Hieher gehörte zu allererst die Cultur der elliptischen Functionen, wie sie wirklich original von Abel betrieben worden ist. Wenn man sieht, wie ein so hoch begabter, mit vollem Recht als Fachrepräsentant ersten Ranges geltender Geist keinen andern Gegenstand finden konnte, als einen sich fast verlierenden Ausläufer der Analysis, so muss man die Ursache davon zum grossen Theil doch in der Situation selbst suchen, in welche sichtlich grade die Analysis durch Erschöpfung ihrer ersten Hauptrichtungen gerathen ist. Die elegante Art und Weise des norwegischen Mathematikers war mit der abgerissenen Manier des Hebräers Jacobi, der ja auch nebenher in Behandlung desselben Gegenstandes ähnliche Schritte that, so contrastirend, wie die Sprachen, die sie beide gewählt hatten. Abel schrieb lebendiges Französisch und Jacobi nicht blos todtes, sondern auch recht schlechtes Latein. Der Umstand aber, dass der betreffende Gegenstand von äusserst secundärer Natur war, erklärt es, wie allenfalls die Doppelgängerschaft in seiner wissenschaftlichen Förderung für einige Theile desselben wirklich vorhanden sein und für andere Theile wenigstens Glauben finden konnte. Bei dem Anbau ganz entlegener Felder ist das Publicum nicht im Stande, die hinreichende Controle zu üben, und so begreift sich einigermaassen, warum der originale Typus, der die Abelschen Werke auszeichnet, das volle Maass der ihm einzig und allein gebührenden Anerkennung noch nicht eingeerntet hat. Trotz dieser hohen Werthschätzung des von Abel Gelieferten kann man aber doch nicht umhin, in einer solchen Anlegung des mathematischen Talents die bedauerliche Folge eines Zustandes zu sehen, der keinen Aufschwung zum umfassend Bedeutenden nahelegte. Wenn nun weiterhin die Ausspinnung von andern vereinzelten Functionen durch den späteren Nachwuchs Mode wurde und heute das Klauben an unpraktischen Singularitäten vorherrscht, so ist dies vollends ein Zeichen der Versandung.

Wer zu den angegebenen Merkmalen des Verfalls noch ein handgreiflicheres Symptom kennen zu lernen wünscht, mag sich nur ein wenig kritisch danach umsehen, auf welche Art und Weise das einfürallemal fertige analytische Handwerkszeug bei realen Anwendungen gehandhabt wird. Ist irgend eine materielle Ent-

deckung physikalischer Art gemacht worden, die eine mathematische Seite hat, so finden sich auch sofort Leute, die ihre algebraischen Spinneweben darüber ausbreiten und sich dann vor dem Publicum so anstellen, als wenn es sich um eine Fliege gehandelt hätte, die erst von ihnen in ihrem analytischen Netz gehörig eingefangen werden konnte. Man denke hiebei nur beispielsweise an mancherlei Schicksale der mechanischen Wärmetheorie. Wie einfach war Mayers bahnbrechende Entdeckung an sich selbst und in der anspruchslosen Darstellung durch ihren Urheber! Welche analytische Leerheiten haben sich aber seitdem dazugesellt und das Gebiet mit hohlen Nüssen überschüttet! Eine maassvolle Anwendung der Analysis ist in dieser Richtung selten, während allerlei Verzwicktheiten eines ergebnisslosen Calcüls den lauten Markt mit ihren eitlen Ansprüchen erfüllen. Unter Andern hat sich in dieser letzteren Richtung ein preussischer Professor, Herr Clausius, durch besondere Verworrenheit hervorgethan. Derartige Heimsuchungen der Mechanik und Physik verrathen ihren Schlag auch noch dadurch, dass sie bei dem Dreschen von leerem analytischem Stroh das Geklapper, welches den Schein einer fruchtbaren Thätigkeit erregen soll, noch durch das Schnarren mit allerlei selbstgezimmerten, aber höchst überflüssigen Kunstwörtern verstärken. Wo das Zeug zum Schmieden neuer Gedanken fehlt, da sucht man den Leser durch neue Wortgehäuse zu täuschen und ihn glauben zu machen, es müsse hinter dem seltsamen Aeussern auch innerlich Etwas stecken. Was ist nicht grade in der mechanischen Wärmetheorie mit allerlei neuen Wortverkleidungen für Unfug getrieben worden, um ganz bekannte Dinge in der Wortmaske als neu und eigenthümlich erscheinen zu lassen! Widerwärtige Schnörkelversuche ähnlichen Schlages sind überhaupt in der heutigen Mathematik zu Modeartikeln geworden, und ganz besonders haben auch die neusten Kleinigkeiten der Algebra, die sich gern mit dem hochtönenden Namen einer modernen Algebra bezeichnen, an Neuigkeiten dieser Manier gar viel aufzuweisen. Ueber letzteres Treiben hat auch Poncelet, der in der Signalisirung der Missstände noch immer sehr rücksichtsvoll verfuhr, seinem Spott einen entschiedenen Ausdruck gegeben.

Die anmaassliche Hohlheit, mit welcher Leute von blos analytischer Dressur es unternehmen, die Entdeckungen schöpferischer Geister zu escamotiren, ist schon für Poinsot ein Gegenstand verachtender Bespöttelung gewesen. Gegenwärtig kann man aber das

analytische und zum Theil auch überhaupt das vorherrschende mathematische Gebahren noch aus einem ganz andern Gesichtspunkt betrachten. Die Routiniers der blossen Form gebrauchen nämlich die Analysis und auch andere mathematische Mittel in einer ähnlichen Weise, wie einst die Scholastiker des Mittelalters die Logik angewendet haben. Sowenig die Syllogismen der Letzteren etwas Sachliches zu Tage förderten, ebensowenig wird die Handhabung der leeren Hülsen der Analysis unter den Händen unserer heutigen mathematischen Scholastiker die Geschichte mit irgend einem realen Fortschritt bereichern. Der Historiker einer spätern Zukunft wird auf unsere Zeit in mathematischer Beziehung ähnlich zurückblicken, wie wir bezüglich der Logik auf das Mittelalter, und er wird die Ergebnisslosigkeit des in Syllogismen einherschreitenden Stelzenganges mit derjenigen der unnützen Anbringung von analytischem oder sonst mathematistischem Schematismus in aller Ruhe vergleichen können; denn das Urtheil wird alsdann über beide Gebiete mit gleicher Entschiedenheit festgestellt sein.

217. Inmitten eines Tagesbetriebs der Mathematik, wie der eben gekennzeichnete ist, hat der Grundsatz, auf die früheren schöpferischen Werke selbst zurückzugreifen, eine noch grössere Wichtigkeit, als ihm auch ohnedies schon zukäme. Um nur an das oben erörterte Beispiel der projectivischen Geometrie zu erinnern, so können Originalwerke, wie das Ponceletsche, in ihrer geistreichen Individualität nicht durch Darstellungen zweiter Ordnung, geschweige durch gewöhnliche Lehrbücher ersetzt werden. Die fortwirkende Anregung kann aber stets nur von dem Eindruck ausgehen, den der unmittelbare Verkehr mit den selbstdenkenden und schaffenden Naturen hinterlässt. Auf die Unterscheidung der letzteren von dem Schlage der Subalternitäten jeden Grades kommt in jeglicher Richtung des Studiums Alles an. Wer einmal diese Kluft erkannt hat, von der die gemeine unthätige Auffassung des von einem gangbaren Compendium oder gangbaren Professor Gebotenen sich nichts träumen lässt, — wer einmal diese von der Natur gesetzten Rangunterschiede der Geister begriffen hat, wird sich, wie er auch in den Besitz der ersten Kenntnisse des Gebiets gelangt sein möge, fernerhin nicht mehr versucht finden, die Hauptkraft seiner Bemühungen auf etwas Anderes als auf die Original- und Grundwerke zu verwenden. Je früher die Emancipation von den gemeinen Lehrmitteln eintritt,

um so eindringlicher und fruchtbarer wird sich das Studium gestalten können. Die Intensität der Erfolge hängt fast gänzlich davon ab, wie bald es die Anlagen gestatten und günstige Umstände dazu veranlassen, den gewöhnlichen Lehrmitteln den Rücken zu kehren und weder in Vorträgen noch in Büchern gemeiner Art die eigentliche Förderung zu suchen.

Der Autorruf und zwar nicht blos der augenblickliche ist ein ziemlich unbestimmtes und meist im Groben verbleibendes Merkmal. Er würfelt selbst in dem günstigen Falle, dass er überhaupt am Orte ist, doch immer Capacitäten der verschiedensten Grade so durcheinander, als wenn es zwischen Genie, Talent und zusammenstellender Virtuosität keine Unterschiede gäbe. Das Publicum ist durch die aufdringliche Autoritätchenkrämerei und gegenseitige Selbstverherrlichung der jedesmal gangbarsten, wenn auch übrigens nichts weiter bedeutenden Professoren gewöhnlich so eingenommen, dass es gar nicht daran denkt, über die Figuranten der Reclame des Augenblicks hinwegzublicken und den lebendigen Geist in den Kundgebungen oder Hinterlassenschaften der frei schöpferischen Naturen vorauszusetzen. Diese letzteren sind ihm sogar meist, wenn auch von Namen, so doch nicht in ihrem wahren Charakter bekannt. Wie arg hier die geflissentliche Verwischung der Grenzen durch die Inhaber des Schulmonopols irreführe, lässt sich fast ausnahmslos an dem thörichten Verhalten aller Derjenigen beobachten, die unter dem Eindruck der gemeinen Lehrart völlig apathisch werden, und denen es nicht einfällt, dass die Aufschlüsse und tiefern Einsichten, gegen deren Bedürfniss man sie abzustumpfen sucht, anderwärts, wenn auch vielleicht nur im gedruckten Wort längst dahingegangener Autoren, in sehr einfacher Weise zu haben sind. Wie seltsam sich das Publicum auf den unterschiedlichen Ruf von Namen eines Faches versteht und welche Curiositäten bei solchen Missverständnissen gelegentlich zu Tage kommen, mag die Aeusserungsart eines celebrirteren deutschen Geschichtsprofessors beweisen, dessen Bücher auch nach seinem Tode noch immer etwas gelesen werden, und der in der hier fraglichen Beziehung eben recht als ein Vertreter der Urtheilsart der Menge anzusehen ist. F. Ch. Schlosser kam in der ersten Abtheilung des zweiten Theils seiner „Geschichte der alten Welt“ (Frankfurt a. M. 1828) auch darauf, die Euklidische Methode rühmen zu wollen, und schrieb bei dieser Gelegenheit, in hochkomischer Zusammenstellung

der Namen, S. 225 Folgendes: „Alle denkende Mathematiker von Archimedes bis auf Kästner haben diese Methode als die einzig richtige gepriesen.“ Archimedes und Kästner, in der That eine wunderliche Brüderschaft der Namen! Das Genie, welches uns beinahe allein das ganze mathematische Können des Alterthums repräsentirt, und dicht daneben in gleichheitlicher Zugesellung der seiner Zeit sehr gangbare Göttinger Professor, von dem man aber jetzt nichts mehr weiss und dessen Bücher längst verschollen sind. Wirklich sind für die Unerfahrenheit Derjenigen, die eben nur nach der officiellen Schablone studiren, auch noch heute die Archimedes und Kästner von gleichem Gewicht, und vielleicht giebt es auch heute Historiker, die geneigt sind, von einer Mechanik oder Physik von Galilei bis auf Helmholtz zu reden!

Ganz besonders nützlich wird eine gehörige Würdigung der Namen, wenn es sich nicht um selbständige Werke, sondern um Zeitschriften handelt. Das Schicksal der letzteren und unter ihnen vornehmlich der Akademieabhandlungen besteht in der neusten Zeit regelmässig darin, im Ganzen und Grossen einen Berg von Maculatur bilden zu helfen, in welchem unter tausenden von werthlosen Alltagsstücken oder gradezu schlechten Machwerken ein paar ausgezeichnetere Arbeiten vergraben sind. Manche Reihen von Acten der Akademien könnten ganz wohl cassirt werden, ohne der Wissenschaft den geringsten Verlust zuzufügen. Andere Journale, wie beispielsweise das Crellesche in seiner Ursprungsperiode, sind durch einzelne darin niedergelegte Arbeiten bedeutender oder interessanter Verfasser wie Poncelet, Abel, Steiner und Sophie Germain insoweit von Werth, als zum Theil später kein Ersatz durch originale Verarbeitung in selbständigen Werken oder durch vereinigte Herausgabe eingetreten ist. Bezüglich der Auffindung solcher vereinzelter Arbeiten ist für den Studirenden eben kein anderer Rath vorhanden, als sich an den Unterschied der Namen zu halten. Sowohl in Lehrbüchern als in Lehrvorträgen vernachlässigt man nämlich noch in grossem Maass die Angabe der Quellen und Fundörter der Einzelheiten. Man verhält sich oft zu den Originalabhandlungen noch schlimmer als zu den originalen Grundwerken, indem man nicht einmal die äusserliche Kenntniss von der Existenz jener Quellen gehörig vermittelt, und doch hätte man grade gegenwärtig, da Einzelheiten und Kleinigkeiten immer mehr vorwiegen, die meiste Ursache, in

diesem Punkte einige, freilich nicht nutzlos Alles durcheinander citirende, aber wohl etwas kritisch gewählte Gelehrsamkeit zu entwickeln.

218. In manchen Fällen kann es nützlich sein, für blosse Einzelheiten auch solche Arbeiten zu Rathe zu ziehen, die nur den Charakter der Zusammenstellung oder auch einigermaassen selbständigen Vereinigung vorhandener, aber sonst zerstreuter Materialien aufzuweisen haben. Von einem hohen Genre sind diese Unternehmungen niemals, so vielgenannt und angesehen gelegentlich auch die Verfasser gewesen sein mögen. Auch diejenigen Werke gehören hieher, die man als Ausspinnungsarbeiten bezeichnen könnte, weil sie die leicht zu vollziehenden Ausführungen der primitiven Wahrheiten in aller Breite darbieten. Zu den älteren guten Werken dieser letzteren Spielart gehört beispielsweise Cramers „Einleitung in die Analysis der algebraischen Curven" (Genf 1750). Diese mit den elementarsten Beispielen ausgestattete und in deutlichem Französisch geschriebene Darstellung ist freilich nichts Anderes, als eine Detailausspinnung leicht zugänglicher Wahrheiten auf Grund des seit Newton Vorhandenen; aber man könnte froh sein, wenn heutige Arbeiten solcher secundären Gattung noch dasselbe Maass von Verlässlichkeit und Beherrschung des Stoffes aufzuweisen hätten. Ohnedies würde es sich auch schwerlich erklären, dass man noch öfter auf das alte Werk zurückgreift, und in der That kann der Studirende in dem Buch des Genfer Mathematikers noch heute manchen Aufschluss finden, den er in gleicher Verständlichkeit in neuern Handbüchern nicht antreffen dürfte.

Ueber den heutigen Versuchen der zusammenstellenden Gesammtabhandlung eines Gebiets scheint kein besonders günstiges Schicksal zu walten; denn selbst da, wo die Vereinigung der Materialien in modernem Gewande an der Zeit und nicht schwer ist, haben wir, wie beispielsweise für die Differential- und Integralrechnung, neuerdings keinen irgend befriedigenden Gesammttractat erhalten. Was ein französischer Gelehrter, Herr Bertrand, mit diesem Anspruch geliefert hat, ist, ganz abgesehen von der auch sonst unzulänglichen und für ein umfassendes Sammelwerk äusserst einseitigen Darstellung, nur ein Zwitter von Lehrbuch und Gesammttractat geworden. Die Uebungsaufgaben, die man in diesem weitschichtig angelegten Buch und noch dazu in der schülerhaftesten Gestalt antrifft, machen einen komischen Eindruck, ohne

dass deswegen das Opus im Uebrigen irgend den Charakter eines besonders verständlichen Lehrmittels aufzuweisen hätte. In Vergleichung mit solchen Erzeugnissen ist am Anfange des Jahrhunderts Lacroixs grosser Tractat, der doch auch nur von ganz secundärer Ordnung war, noch ein Muster der Stoffvereinigung und Darstellung gewesen. Lacroix hatte aber auch wenigstens die Eigenschaften eines guten Lehrers der Mathematik gehabt, und seine ganz brauchbaren Lehrbücher, die sich über alle Theile der Mathematik erstreckten, hatten durch Uebersetzungen in die verschiedensten Sprachen gleichsam ihre Welttour gemacht. Sogar noch heute trifft man öfter auf neue Auflagen dieser einst so einflussreichen Lehrmittel.

Einen grossen Gesammttractat pflegt man weder zur ersten Erlernung noch zu einem weitern zusammenhängenden Studium, sondern nur zum Nachschlagen von Einzelheiten oder zur Ausfüllung von Lücken zu benutzen. Niemand bedarf des äussersten Details anders als in bestimmten einzelnen Richtungen, und Niemand wird daher allen Lehren und Bestandtheilen eine gleiche Aufmerksamkeit widmen. Gute Gesammttractate sollen das, was sich in Specialarbeiten, seien es nun Monographien oder Journalabhandlungen, allerwärts zerstreut findet, in gehöriger Ordnung zu vereinigen und so nicht blos die alten sondern auch die neuen Stoffe des Gebiets leichter zugänglich zu machen suchen. Bisweilen kommt es nun vor, dass einige Zeit nach der Schöpfung eines Wissenschaftszweiges auch Gesammttractate von einem weit höheren Charakter erscheinen, indem deren Verfasser zu den schaffenden Mathematikern gehören und ihren Stoff nicht blos besser beherrschen, sondern auch wirklich mit eignen erheblichen Zuthaten bereichern. Von dieser Art und ursprünglich zugleich auch wirkliche Lehrwerke für das tiefere und umfassendere Studium waren die lateinisch geschriebenen Hauptarbeiten Eulers, nämlich seine „Einleitung in die Analysis des Unendlichen“, welche nicht etwa die Infinitesimalrechnung, sondern nur die dazu vorbereitende Analysis enthält und alsdann seine Differential- und seine Integralrechnung. Da von diesen drei Werken auch deutsche, theils ältere, theils neuere Uebersetzungen vorhanden sind, so ist die Zumuthung, sie in einzelnen Lehren noch immer zu Rathe zu ziehen, auch für das allgemeinere aber gründlichere Studium ganz in der Ordnung. Die predigerhafte, wohl vom Gewerbe des Vaters her zugleich mit den bigotten Neigungen ererbte

Breite und die logische Schwäche, vermöge deren die Differentiale als reine Nullen ausgegeben werden, stört bei einem solchen theilweisen Gebrauch weniger, als bei einem durchgängigen Studium.

Auch die von Euler selbst deutsch abgefasste, erst nach seiner Erblindung gearbeitete „Vollständige Anleitung zur Algebra“ (2 Theile, Petersburg 1770, auch neugedruckt in Reclams Universalbibliothek, Leipzig 1884) ist ein Lehrbuch guter Art und noch immer für den ersten Unterricht recht brauchbar, zumal da die Fälle, in denen elementare Lehrbücher von Mathematikern hohen Ranges ausgehen, in der Geschichte ganz vereinzelte Ausnahmen sind. Es erinnert die Beschaffenheit dieser Anleitung daran, wie Euler auch in seinen sonstigen Werken sich auf eine einfache, wirklich lehrhafte Darstellung verstand. Es wäre daher gar nicht fehlgegriffen, wenn ein Anfänger, der zunächst recht einfacher und ausgiebiger Erläuterungen bedarf und daher die geduldige Durcharbeitung durch breitere Auslassungen nicht scheuen wird, von vornherein für die Differential- und Integralrechnung sowie überhaupt für Analysis die betreffenden Werke Eulers als erste Einführungsmittel benutzte, was freilich nicht das spätere Studium der Arbeiten Lagranges entbehrlich machen, aber in dem vorausgesetzten Fall zweckmässig vorbereiten und erleichtern würde. Uebrigens bleibt aber als Hauptgesichtspunkt für die grössern Arbeiten Eulers die Betrachtung derselben als höherer Gesammttractate maassgebend, in denen überdies eigne Lehren eingemischt und daher an der Quelle aufzusuchen sind. Bezüglich Arithmetik und Elementaralgebra sei nebenbei bemerkt, dass Lagranges ausgezeichnete Vorträge an der Normalschule neuerdings ins Deutsche übersetzt und so zum ersten Mal als besondere Schrift zugänglich geworden sind. In formeller Beziehung, bei welcher von diesem Stoff allein die Rede sein kann, und durch geistvolle Auffassung des Einfachen stehen sie hoch über jener weitläufigeren Arbeit Eulers. Näheres hierüber findet man in unserer zu den Grundmitteln gehörigen Anleitung.

Für das am meisten in die Augen fallende Hauptgebiet der Anwendungen des höhern Calcüls, nämlich für die Gravitationslehre, hat Laplace in seiner bändereichen Himmelsmechanik ein Werk geliefert, welches sich von dem Charakter der Gesammttractate, also der Materialienvereinigungen und Ausspinnungsarbeiten, trotz einzelner selbständiger Elemente und Abhandlungen,

durchaus nicht entfernt. Die Ueberschätzung des Gegenstandes und der von uns schon früher besprochene Mangel an Unterscheidung für das verschiedene Gewicht der Capacitäten hat dahin geführt, dass der Name Laplace gewöhnlich so erwähnt wird, als wenn er soviel zu bedeuten hätte, wie der eines Euler oder gar eines Lagrange. Die Mécanique céleste ist aber nur eine weitläufige Verarbeitung und Ausspinnung der Stoffe, die in und seit Newtons Grundwerk für die planetarische Mechanik gewonnen worden waren. Das Uebermaass des analytischen Schematismus ist für die zusammenhängende Auffassung nicht wenig störend, und Newtons eignes Buch, von welchem noch 1872 eine deutsche Uebersetzung erschien, mit seiner bescheideneren Kürze und seiner algebraischen Sparsamkeit bleibt noch immer eine Zuflucht, um wenigstens alle Hauptgrundlagen der planetarischen Mechanik auf einfache Weise kennen zu lernen. Man mag daher die Laplace, Legendre und Poisson immerhin auf einer Linie nennen; aber man sollte sich klar zu machen suchen, dass zwischen der verarbeitenden Virtuosität eines Laplace und der frei thätigen Genialität eines Lagrange eine Kluft gähnt, die sich schon äusserlich in ihrem Stil und ihren Darstellungsallüren verräth.

219. Wenn irgend eine Wissenschaft nicht wesentlich auf mündliche Lehrfortpflanzung angewiesen ist, so muss es die Mathematik sein. Die Unabhängigkeit der letzteren von dem gesprochenen, und ihre vollständige Mittheilbarkeit vermöge des gedruckten Wortes ist so entschieden, dass die Vorlesungen als ein völlig unnützer Aufwand anzusehen sind. In der That ist es ein wunderliches Ding, Mathematik vorzulesen oder, wie man gern beschönigend sagt, vorzutragen. Im günstigsten Falle begleitet der Professor seine an der Tafel producirte Kreideweisheit und seine Schwammoperationen mit solchen Bemerkungen, wie sie auch bei der Entwicklung der Formeln in einem Buch an gehöriger Stelle Platz finden würden. Der schriftliche und der mündliche Vorrechner spielen alsdann ganz dieselbe Rolle, nur mit dem Unterschiede, dass ein Buch stillhält, wenn das Verständniss des Lesers nicht gleich folgen kann, während der Professor unbekümmert darum bleibt, ob er bei Trivialitäten durch die Langsamkeit seines Ganges ermüde oder über schwierigere Punkte sich zu leicht hinwegbefördere, ohne seine Zuhörer aufgeklärt zu haben. Die herkömmliche Gewohnheit der Studirenden geht auf die Beschaffung eines Heftes durch Nachschreiben; aber diese letztere Operation will

sich grade in der Mathematik nur äusserst schlecht mit der erforderlichen Anspannung der Aufmerksamkeit und frei überlegenden Gedankenbewegung vertragen.

Nicht der mündliche Unterricht überhaupt, sondern das Halten von Vorlesungen ist es, was in der Mathematik nicht nur überflüssig ist, sondern auch schadet. Ja die ganze Lehrmanier der Universitäten kann höchstens noch in benachbarten Fächern, wie in der Physik, dadurch einige Anziehungskraft erhalten, dass hier in den producirten Experimenten etwas unmittelbar zur Schau gestellt wird, wovon in den Büchern nur Abbildungen und Berichte möglich sind. Durch die Vereinigung grosser Apparate können die centralen Lehranstalten eine Art Monopol gewinnen, welches gleichsam auf ihrer Capitalausstattung, nämlich auf der Dotirung mit umfassenden Experimentirmitteln beruht. Ausserdem kann gelegentlich auch wohl das Vorhandensein eines wirklich geschickten Experimentators den sogenannten Vorlesungen über Physik einigen Reiz verschaffen. Für die Erinnerung an den Gedankengang und für die genauere Orientirung über die Anstellung der Experimente wird aber ein Buch dennoch die Hauptsache leisten müssen. Auch ist es bekannt, dass die einfacheren Experimente, die man selbstthätig macht, für das physikalische Studium mehr Werth haben, als die verwickelten, die man nur sieht. Die Universitäten haben aber auch aus diesem Gesichtspunkt im günstigsten Falle nur gute Schaustücke aufzuweisen, und die Vorlesungen verhelfen Niemandem zu der so überaus wichtigen Selbstthätigkeit. Im Gegentheil wirkt die Einseitigkeit des Vortrags und die künstlich vorbereitete, mit dem Charakter der Plötzlichkeit auftretende Abspielung der Experimente nur zu beschwichtigend auf die Selbstthätigkeit des Zuhörers und Zuschauers. Die Gewöhnung, sich ganz passiv Etwas vordemonstriren und vormachen zu lassen, bringt unvermeidlich einige Erschlaffung mit sich, und hieraus erklärt sich auch vielleicht, dass die Professoren nicht selten Alles mehr auf Unterhaltung als auf Belehrung anlegen. Hiemit erzielt denn die theatralisch gewordene Experimentirvirtuosität allerdings solche Erfolge, wie sie bei dem Abbrennen eines Feuerwerks ganz am Orte wären. Es ist also nicht einmal für die Physik und die experimentirenden Fächer einzuräumen, dass die Universitätsmanier hier im Rechte wäre. Freie Associationen zur Beschaffung und selbstthätigen Benutzung von Apparaten würden hier unverhältnissmässig mehr Vortheil

gewähren, und das geringe Maass von persönlicher Anleitung im Hantiren, welches überhaupt erforderlich ist, würde noch ausserdem ohne grossen Aufwand zu erlangen sein. Sogar der Entschluss des Einzelnen, die einfacheren, ihm mit eignen Mitteln möglichen Experimente nach irgend einer Buchanleitung selbst anzustellen, wird schon jetzt mehr Förderung gewähren können, als die blosse Zuschauerschaft bei physikalischen Theaterstücken. Ist es nun mit dem, was die Universitätsvorlesungen über Physik darzubieten pflegen, schon bedenklich bestellt, und wirkt schon hier die mittelalterliche Lehrart in Gestalt der einseitigen autoritären Mittheilung übel auf die wahren Interessen des Studiums zurück, so fällt vollends bei der Mathematik, die eine Wissenschaft nicht des Experimentirens sondern des blossen Denkens ist, jedes Element fort, wodurch Vorlesungen vor Büchern etwas voraushaben könnten. Wohl aber zeigt sich das grade Gegentheil hievon, dass nämlich die Bücher unter übrigens gleichen Umständen den Vorlesungen bei Weitem vorzuziehen sind. Statt sich also in mittelalterlicher Weise Hefte dictiren zu lassen und so eine Gewohnheit fortzusetzen, die schon seit Erfindung des Buchdrucks als veraltet hätte aufgegeben werden können, entziehe man sich, soweit es die zwingenden Vorschriften irgend gestatten, dieser unzeitgemässen Vorlesungsfrohn. Man halte sich an Bücher und möglichst an eigentliche Grundwerke, so wird man bald erfahren, wie das moderne öffentliche Mittheilungssystem durch den Buchdruck vor dem mittelalterlichen, auf den Zuhörerkreis beschränkten und monopolistischen Verfahren den Vorzug verdiene. Als man Bücher noch abschreiben lassen musste und die Abschriften selten und kostbar waren, lag es sehr nahe, sich durch eigne Nachschrift einer auch schon hierauf berechneten und im Dictirtempo gehaltenen Vorlesung den Wissensschatz zu verschaffen, den man als Buch nicht bezahlen oder überhaupt nicht haben konnte. Ueberdies war auch die Bücherproduction behindert; denn sie hatte ihre Schranken an dem geringen Absatz, der Angesichts der theuren Abschriftenpreise in Aussicht stand. Dieser Hemmungszustand ist glücklicherweise überwunden; aber die Universitäten sind mit ihrer Vorlesungsmanier ebenso wie mit ihrer Zunftverfassung als mittelalterliche Ruinen stehen geblieben und haben die Mode der Vorlesungen überhaupt auch auf andere modernere Anstalten, also namentlich auf die polytechnischen Schulen vererbt. Hiedurch ist selbst in frischerer Umgebung die an sich

todte Manier eingebürgert, wenn auch etwas besser umgestaltet worden. Die einzige Aufgabe, welche durch ein selbstverständlich nur geringes Maass einseitiger Vorträge erfüllt werden kann, ist keine andere, als diejenige, der auch die freie und eigentliche Rede dient. Man vermag durch das frische mündliche Wort anzuregen und die Punkte oder Richtungen zu signalisiren, für welche das Interesse des Zuhörers gewonnen werden soll. Das Studium selbst kann aber nicht im Anhören einer Rede bestehen, und die gründliche Wissensaneignung nicht die Wirkung eines, wenn auch noch so anregenden Vortrags werden. Das grade Gegentheil hievon ist aber die semesterlange Abhaspelung eines ganzen Wissenschaftszweiges in einer ermüdenden Vorlesungsreihe, und wenn man auch im Bereich der moderneren, also namentlich der polytechnischen Institute weit praktischer und zweckmässiger verfahren ist, als auf den Universitäten, so hat man doch die beengende Form nicht überwinden und aus den Vorlesungen nichts machen können, was deren Wesen widerspricht. Wenn hienach in Rücksicht auf den Genuss der Universitätsvorlesungen die sparsamste Diät von mir als die beste angesehen wird, so empfehle ich hiemit keine Enthaltsamkeit, die ich nicht selbst geübt hätte. In der That habe ich mir in Bezug auf das Anhören rein mathematischer Universitätsvorlesungen kein Opfer vorzuwerfen, welches auf wissenschaftlichem Irrthum beruht hätte und nicht durch Prüfungsrücksichten und zwar ganz speciell durch den Ausblick auf die Person eines bestimmten Examinators motivirt gewesen wäre.

220. Die Mathematik und die verwandten Wissenschaften müssen ihre Förderung nicht nur in einem regen internationalen Ideenverkehr auf Grund moderner Sprachkenntniss, sondern Angesichts der noch heut bestehenden Situation auch vorzugsweise in Anknüpfung an die französische Ueberlieferung des 18. Jahrhunderts suchen. Nach der Beseitigung des Latein wurde das Französische die vorherrschende Sprache der Werke von gewählterem Charakter, und ist auch für die heutige literarische Production die Vertheilung zwischen den verschiedenen Nationalliteraturen gleichmässiger, so sind doch grade die früheren Grundlagen, von denen man ausgehen muss, und welche mehr als die spätern Kleinigkeiten bedeuten, in ihrer maassgebenden modernen Form französisch gewesen. Dieser Umstand legt im Studium eine Verbindung der Mathematik mit den neuern Sprachen sehr nahe.

Auch ist, nebenbei bemerkt, für alle die, welche sich dem Unterricht an Realschulen und Gymnasien widmen, diese zum Theil übliche Combination weit zweckmässiger als diejenige mit der niedern, mehr beschreibenden Naturwissenschaft. Aber auch von solchen äusserlichen Rücksichten ganz abgesehen, bleibt die Pflege des Französischen (und alsdann allenfalls noch des Englischen und des Italienischen) für den Mathematiker oder Physiker ein Erforderniss. Mindestens muss er sich den unmittelbaren Zugang zu den französischen Grundwerken und sonstigen Lehrmitteln eröffnen können, wenn er nicht stets unter Vormundschaft seiner eignen nationalen Fachliteratur bleiben will. Können auch Uebertragungen hier einige Hülfe gewähren, so fehlen sie doch bei wesentlichen Werken und sind übrigens oft genug äusserst unzulänglich. Uebersetzungen aus einer modernen Sprache und von schöpferischen Grundwerken werden da, wo sie nicht grade unexact und fehlerhaft gerathen, mindestens das eigenthümliche Gepräge der Ausdrucksweise des Originals verwischen und daher von der ursprünglichen Schärfe und Eleganz wenig verrathen, zumal der Abstand zwischen der Capacität des Uebersetzers und den Eigenschaften des Verfassers in solchen Fällen meist gar zu gross ist. In einer gewissen Beziehung verhält es sich mit Uebersetzungen neuerer lateinischer Werke umgekehrt; denn das Latein ist hier meist so schlecht gewesen, dass der Gedanke, wo er überhaupt vom Uebersetzer verstanden wird, schon durch die Einkleidung in eine lebende Sprache gewinnen muss.

Die Cultur der alten Sprachen wird für den Mathematiker und Physiker sowie überhaupt für Jeden, der in der modernen Welt lebendige, nicht aber todte Angelegenheiten im Auge hat, eine Belastung sein, die theils völlig unnütz bleibt, theils aber, wo sie ausnahmsweise das gelehrte Quellenstudium geschichtlicher Art in irgend einer fruchtbaren Richtung unterstützt, Ergebnisse liefert, die in gar keinem Verhältniss zu der verursachten Mühe stehen. Der ganze Aufwand sogenannter classischer Bildung, der bei so Vielen die schönsten Jugendjahre verzehrt, ist für die exacte Wissenschaft nicht blos ein Verlust, sondern auch eine Hemmung. Die Gewöhnung des Geistes an die griechischen und lateinischen Schulübungen disponirt zum grammatischen Pedantenthum, aber nicht zu jener freien Beweglichkeit des Auffassens und Denkens, wie sie für die Sachwissenschaften erforderlich ist. Eine Folge hievon ist es auch, dass der Unterricht in der Mathe-

matik um so verkehrter ausgefallen ist, je mehr er mit altsprachlich gelehrten Anstalten in Berührung kam. Wir sind schon oben mehrfach der Thatsache begegnet, dass die polytechnische Gestaltung des modernen Lebens mit den von ihr geschaffenen Instituten auf die Lehre der exacten Wissenschaften günstig zurückgewirkt hat. Dies kommt offenbar daher, dass sich hier die Emancipation von den todten Bildungsmitteln am entschiedensten vollzogen hat.

221. Erinnern wir uns noch einmal jener Epoche, in welcher als Nachwirkung der französischen Revolution auch der Geist der Pariser polytechnischen Schule trotz aller Einschränkungen ein mächtiges Förderungsmittel natürlicher und gediegener Studien wurde. In jener Zeit hatte ein Monge seine „Beschreibende Geometrie" veröffentlicht. Der Unterricht in diesem von ihm neugeschaffenen Zweige der Mathematik, in welchem auch zu einem erheblichen Theil die spätern anschaulichen und projectivischen Wendungen eines Poncelet als in ihrem gesundesten Boden wurzelten, sollte eine im strengen Sinne des Worts volksthümliche Wirkung haben. Handwerker und Künstler sollten ihre Anschauung und ihr Geschick in der Auffassung räumlicher Verhältnisse ausbilden und sich so den Weg bahnen, durch die Bethätigung des geometrisch verfeinerten Geschmacks und der zugehörigen gesteigerten Gewandtheit die Verfahrungsarten und Leistungen verbessern zu können. Es war dies eine zugleich gross angelegte und wahrhaft praktische Idee, welche die Rücksicht auf die veredelnden Wirkungen der wissenschaftlichen Bildung mit der Sorge um die grösstmögliche technische Leistungsfähigkeit des gesammten Volkes verband. Noch heut ist die Géométrie descriptive und zwar noch immer am besten in der Gestalt des diesen Namen tragenden Werkes von Monge auch da ein wesentliches Erziehungsmittel der geometrischen Anschauung, wo der sonstige praktische Zweck im persönlichen Einzelfall nicht die Hauptsache zu sein braucht. Man hat über beschreibende oder, wie man es auch nennt, darstellende Geometrie manche neuere Lehrbücher; aber man wird die natürliche Einfachheit des Grundwerks von Monge nur dann angemessen würdigen, wenn man es auch jetzt noch als das hauptsächlichste Lehrmittel auf sich wirken lässt. Ja dieses Lehrmittel ist, wie es Monge wollte, in seinem hauptsächlichsten grundlegenden Theil schon für zwölfjährige Schüler brauchbar, und es könnte meiner Ansicht nach, solange etwas

noch Vollkommneres mangelt, den Ausgangspunkt für den geometrischen Unterricht überhaupt und mit einigen Ergänzungen einen vollständigen Ersatz für die gewöhnliche geometrische Anfängerschulung bilden, die nach der traurigen, unnatürlichen, Alexandrinischen Manier des Euklides die Unterrichtserfolge durchschnittlich verdirbt und wirkliche mathematische Bildung zu einem Ausnahmevorzug von einigen Procenten begabterer Schüler macht, welche die künstliche Hemmung überwinden, während die Menge so gut wie nichts lernt. Freilich ist die Bestimmung von Eigenschaften körperlicher Gebilde dadurch, dass man diese Gebilde nach zwei Ebenen auffasst, nur ein einzelnes Mittel unter andern; aber die Mongesche Art und Weise ist jedenfalls ein erstes entscheidendes Beispiel, die Erkenntniss des Geometrischen mit lebendigen und praktischen Vorstellungen zu betreiben. Wir, die wir nicht an der Grenzscheide des achtzehnten und neunzehnten Jahrhunderts, sondern für den Uebergang zum zwanzigsten arbeiten, haben freilich eine vollkommnere Perspective zu vertreten. Wir haben der höchsten Abstraction ebenso wie der vollsten Anschaulichkeit, der strengsten Beweiszurüstung ebenso sehr wie den unmittelbaren Gangarten des erkennenden Denkens gerecht zu werden.

Die Hinweisung auf das vorher gekennzeichnete ansehnliche Beispiel hat ungleich mehr zu bedeuten, als blos einen Fingerzeig für das Studium des fraglichen speciellen Theils der Mathematik. Jene ganze Conceptionsart ist es, die unsere Aufmerksamkeit in Anspruch nehmen muss. Man sollte die gesammte Mathematik und Mechanik nebst den benachbarten Wissenschaften von einem ähnlichen gesunden Standpunkt auffassen wie Monge sein eigenstes Gebiet; alsdann würde die Lehrart derselben sich verbessern und in universeller Weise wirklich fruchtbar werden können. Man kann die Mathematik als Hülfsmittel für die Technik behandeln, oder man kann sie, wie auf Universitäten, nur lehren, um Lehrer darin auszubilden und zwar meist Lehrer nicht technischer Art, die keine weitere Aufgabe haben, als ihre Disciplin auf Gymnasien und Realschulen als Bildungsmittel geltend zu machen. In diesem letztern Fall dreht sich Alles im Kreise ohne praktische Anregung zum Fortschreiten und zur Anpassung der Stoffe an die Bedürfnisse des realen Lebens und der mit ihm lebendig zusammenhängenden Forschung. Man lehrt, um wieder lehren zu lassen, und die sehr unbestimmten Bildungszwecke bieten in ihrer that-

sächlich rein formalistischen Haltung gar keinen orientirenden Compass dar. Die Entartung zur blossen Gelehrsamkeit ist unter solchen Umständen unvermeidlich und eine die Einsicht und das Studium erschwerende Behandlungsart sehr gewöhnlich. Ein dritter Gesichtspunkt wäre die Aneignung der mathematischen Wissenschaften behufs Begründung einer exacten Naturanschauung. Dieser wirkliche Bildungszweck gestattet aber kein Abreissen des Fadens bei der niedern Mathematik. Man kann daher behaupten, dass, abgesehen von der ganz untergeordneten, blos formalen Uebung der Anschauung und des Denkens, das Studium seinen materiellen Bildungswerth einbüsst, wenn es nicht bis zu denjenigen Einsichten fortgeführt wird, die zur strengen Auffassung der Gravitationslehre sowie zur ungehinderten mathematischen Handhabung der physikalischen Erfahrungssätze nothwendig sind. In der Technik aber kann ohnedies eine Beschränkung auf die niedere Mathematik nicht stattfinden; es begegnen sich also hier die Rücksichten auf die Praxis des Lebens und auf den höchsten Bildungszweck der Theorie. Aus diesem Grunde werden auch diejenigen Institutionen, die dem realen Leben in moderner Weise dienen, am geeignetsten sein, für die höchste Bethätigung des Bildungswerthes der Mathematik den Anknüpfungspunkt abzugeben. Mindestens wird man die praktische und nach den Anwendungen gekehrte Seite der Mathematik besser mit dem höheren Bildungsziel vereinigen können, als die gelehrte Ausartung und speculative Isolirung des scholastischen Fachbetriebs. Eine selbstverständliche Voraussetzung bleibt hiebei, dass sich die Lehranstalten aller Art, soweit sie überhaupt noch eine Berechtigung zur Existenz haben, im freiheitlichen Sinne umgestalten und den wirklichen Interessen der Gesellschaft dienen. Politisch absterbende oder corrupte Zustände wirken auch auf die persönliche Vertretung der Mathematik übel zurück; denn sie lassen der Regel nach in die tonangebenden Lehrämter der Universitäten und ähnlicher Anstalten nur Diejenigen gelangen, die nach Charakter und Accommodationsvermögen zu dem herrschenden System passen.

Es ist geschichtlich bedeutsam, dass die Epoche der französischen Revolution nicht blos den Zukunftsgedanken wahrhafter, von den ersten Repräsentanten des Faches im allgemeinen Interesse gearbeiteter Lehrwerke einmal auf die Tagesordnung gebracht, sondern auch einige Annäherungen daran, wie es Arbeiten von Lagrange und Monge sind, verwirklicht hat. Auch ist der auf-

klärende Geist des 18. Jahrhunderts, welcher jener gewaltigen Aufrüttelung des menschlichen Gemeinlebens voranleuchtete, noch heut in der wissenschaftlichen Methode eine ideelle Macht, die zwar durch Rückschritte beengt, aber doch in ihrer Fortwirkung nicht ganz unterdrückt werden konnte. In der Mathematik muss jener Geist der Klarheit und Gediegenheit uns als ein ideales Vorbild erscheinen, wenn wir ihn mit späteren oder heutigen Gespenstern nebelhafter oder gar mystischer Art vergleichen, deren Spuk die sich streng und exact nennenden Wissenschaften heimgesucht hat. Nicht blos die Geschichte der Mechanik, sondern auch diejenige der gesammten Mathematik liefert uns die Beläge, dass die bessern Ansätze zum Fortschritt, die wir noch im neunzehnten Jahrhundert wahrnehmen, dem achtzehnten sowohl zeitlich nahe als auch im Geistestypus ähnlich geblieben sind. So ergiebt die Wissenschaftsgeschichte selbst eine principielle Schlusserinnerung für die allgemeine Haltung und Richtung des Studiums. Wenn wir aber die Methode des letzteren in dem Abschluss unserer Geschichte der Grundlagen der rationellen und mathematischen Mechanik zu systematisiren unternommen haben, so hat diese Nutzanwendung ausserdem noch die eigenste persönliche Erfahrung zum Wegweiser gehabt. Die hier aufgestellten Grundsätze befinden sich in Uebereinstimmung mit dem eignen Studiengange, so dass auch in dieser Beziehung für den Schriftsteller keine Kluft zwischen dem eignen Verhalten und den Rathschlägen besteht, die sich ihm zum Entwurf einer zusammenhängenden Studientheorie gestaltet haben. Im Grossen betrachtet, schafft aber die Bewahrheitung der persönlichen Erfahrungen und namentlich des Urtheils über die Gegenwart durch die bestimmten Lehren der gesammten Wissenschaftsgeschichte die sicherste Gewähr, dass Nahes und Fernes in gleichem Maasse nach denselben kritischen Grundsätzen einheitlich aufgefasst und beurtheilt worden sind.

222. Nach Alledem, was hier über die Lehr- und Lernweise bezüglich des mathematischen und des benachbarten, am meisten exacten Wissens gesagt worden, sei noch auf den weitern Zusammenhang hingewiesen, in welchem unsere methodischen Empfehlungen zu unsern übrigen Arbeiten stehen. Das hier Beigebrachte reiht sich, wie diese ganze Schrift, in den Kreis unserer der Wissensreform gewidmeten Thätigkeitsfrüchte ein. Obwohl es etwas Selbständiges und daher auch an sich Verständ-

liches ist, erhält es doch eine noch gesteigertere Nützlichkeit, sobald man es mit unsern anderweitigen Aufstellungen in Beziehung setzt.

Ich meine hier nicht blos die Anleitung in den neuen mathematischen „Grundmitteln“, sondern überhaupt den erhöhten Standpunkt, den wir, d. h. der Verfasser und der bei den andern Werken theilweise in erster Linie betheiligte Mitverfasser eingenommen, und auf dem wir zu immer specielleren und greifbareren Errungenschaften gelangt sind. Die Erfindung einer neuen Rechnungsart, der Werthigkeitsrechnung, die Verbesserung der niedern und höhern Gleichungstheorie und deren Bereicherung mit neuen Thatsachen und Methoden, die Grundlagen einer neuen allgemeinen Functionenlehre, — das sind Besonderheiten, die dafür bürgen, dass auch die allgemeinen, begrifflich umwälzenden Aufschlüsse, wie die bezüglich des Unbeschränktkleinen und des Imaginären, eine nicht leicht zu überschätzende Tragweite haben.

Durch die Vermehrung und Verbesserung der Wissenschaft selbst ist es aber auch erst möglich geworden, einfachere und klarere Lerngrundlagen darzubieten und die Bahn zu einem bessern Unterrichte zu brechen. In unserer Zeit ist, und zwar namentlich durch gewisse Hinterlassenschaften von Gauss, die Mathematik und deren Unterricht nach mehreren wesentlichen Seiten so sehr entstellt worden, dass man sie in dieser hässlichen Verzerrung mit kühlem Blut und dem besten Gewissen als einen hervorragenden Verstandesverderb bezeichnen kann. Die sich schneidenden Parallellinien sind nur ein handgreifliches Symptom aus einer Geistesverrückung, deren Gebiet sehr reichhaltig ist, und aus dem man mehr als eine wissenschaftliche Irrenmenagerie vollauf und bunt ausstatten könnte.

Diesem Unwesen muss nicht blos abgeholfen, sondern auch künftigen Abweichungen ähnlichen Schlages, soweit möglich, vorgebeugt werden. Die hohe Bedeutung des mathematischen Wissens besteht nicht blos in seiner Zweckdienlichkeit, sondern auch in der Festigkeit, die es dem Verstande geben kann. Eine Hauptfunction schon des elementaren Unterrichts sollte darin bestehen, diese Festigkeit zu erzeugen. Was will man nun aber in dieser Richtung mit Elementen, die neuerdings zweiflerisch durchsetzt, von altersher aber, soweit es sich um die Ausläufer zum Höheren

handelt, mit erheblichen Erdichtungen behaftet und überdies in einer unnatürlichen Weise zusammengestellt sind!

Die Elemente, also die Urbestandtheile aller Mathematik, sind entscheidend für alles Weitere, Zusammengesetztere und Höhere, also auch für alle wichtigen Specialitäten höchster Ordnung und für alle Anwendungen. Es wäre eine übel angebrachte Vornehmheit, ja eine hohle Scheinvornehmheit, über die Elemente als über etwas von geringem Werth und Interesse hinwegsehen zu wollen. Im gründlicheren Sinne des Worts sind nämlich sie es, durch welche man am weitesten herrscht. Hier müssen die Hebel angesetzt werden, um den mathematischen Aberglauben aus den Angeln zu heben und die mathematischen Schaffenskräfte in allen Richtungen frei zu machen. Wir selber haben allerdings bisher die höheren und höchsten Gebiete mit anscheinender Bevorzugung gepflegt; aber wir verdankten die Möglichkeit unserer Erfolge theilweise auch dem Umstande, dass wir zuvor für uns in die Elemente auf jeder Stufe Klarheit gebracht hatten. Die Elemente und Principien sind treibende Kräfte, und die Erkenntnisse der vorgängigen Stufen sind gleichsam Werkzeuge, die auf den noch zu ersteigenden gebraucht werden. Sind nun diese Werkzeuge gut und scharf, so kann die Arbeit auch fruchtbar ausfallen, und man wird in allen Richtungen zur Vollendung des Wissens fortschreiten.

Mit der Säuberung und Klärung der Mathematik wird auch die Mechanik und werden mit dieser die Physik, die Astronomie, die Chemie, ja schliesslich alle Wissenschaften klarer, in denen gemessen und gerechnet werden kann. Da sich diesen aber auf die Dauer nichts Räumliches und Zeitliches, also für den nicht abergläubischen Sinn kein irgend erdenkliches Sein ganz und gar entziehen wird, so ist der Zusammenhang des mathematischen und exacten Wissens mit Allem und Jedem in der Welt, ja mit der Beschaffenheit jedes möglichen Seins die für das Denken und das Forschen am meisten maassgebende Thatsache.

Schriften desselben Verfassers.

1. Philosophische:

†**De tempore, spatio, causalitate atque de analysis infinitesimalis logica.** Berlin 1861. 3 M.

†**Natürliche Dialektik,** neue logische Grundlegungen der Wissenschaft und Philosophie. Berlin 1865. 4 M.

Der Werth des Lebens, populär dargestellt. 3. Auflage. Leipzig 1881. Fues. 6 M.

Cursus der Philosophie als streng wissenschaftlicher Weltanschauung und Lebensgestaltung. Leipzig 1875. Heimanns Verlag. 9 M.

Logik und Wissenschaftstheorie. Leipzig 1878. Fues. 9 M.

Kritische Geschichte der Philosophie von ihren Anfängen bis zur Gegenwart. 3. Auflage. Leipzig 1878. Fues. 9 M.

2. Volkswirthschaftliche und socialitäre:

Carey's Umwälzung der Volkswirthschaftslehre und Socialwissenschaft. 12 Briefe. München 1865. Merhoff. 2 M. 50 Pf.

†**Capital und Arbeit,** neue Antworten auf alte Fragen. Berlin 1865. 3 M. 50 Pf.

***Kritische Grundlegung der Volkswirthschaftslehre.** Berlin 1866. 8 M. 40 Pf.

Die Verkleinerer Carey's und die Krisis der Nationalökonomie, sechzehn Briefe. Breslau 1867. Trewendt. 3 M.

Kritische Geschichte der Nationalökonomie und des Socialismus. 3. Auflage. Leipzig 1879. Fues. 9 M.

Cursus der National- und Socialökonomie, einschliesslich der Hauptpunkte der Finanzpolitik. 2. Aufl. Leipzig 1876. Fues. 9 M.

3. Vermischte:

†**Die Schicksale meiner socialen Denkschrift für das Preussische Staatsministerium,** zugleich ein Beitrag zur Geschichte des Autorrechts und der Gesetzesanwendung. (1868.) Heimanns Verlag in Leipzig. 1 M.

Der Weg zur höheren Berufsbildung der Frauen und die Lehrweise der Universitäten. Zweite verbesserte und mit Gesichtspunkten für Selbstausbildung und Selbststudium erweiterte Auflage. Leipzig 1885. Fues. 2 M.

Die Judenfrage als Frage der Racenschädlichkeit für Existenz, Sitte und Cultur der Völker. Mit einer weltgeschichtlichen Antwort. Dritte verbesserte Aufl. Karlsruhe 1886. Reuther. 3 M.

Die Ueberschätzung Lessing's und dessen Anwaltschaft für die Juden. Karlsruhe 1881. Reuther. 1 M. 80 Pf.

Sache, Leben und Feinde. Als Hauptwerk und Schlüssel zu seinen sämmtlichen Schriften. Mit seinem Bildniss. Karlsruhe 1882. Reuther. 8 M.

Der Ersatz der Religion durch Vollkommeneres und die Ausscheidung alles Judenthums durch den modernen Völkergeist. Karlsruhe 1883. Reuther. 4 M. 50 Pf.

4. Mathematische und naturwissenschaftliche:*

Neue Grundmittel und Erfindungen zur Analysis, Algebra, Functionsrechnung und zugehörigen Geometrie, sowie Principien zur mathematischen Reform nebst einer Anleitung zum Studiren und Lehren der Mathematik. Von Dr. E. Dühring und Ulrich Dühring. Leipzig 1884. Fues. 12 M.

Neue Grundgesetze zur rationellen Physik und Chemie. Erste Folge. Leipzig 1878. Fues. 3 M.

Neue Grundgesetze zur rationellen Physik und Chemie. Zweite Folge enthaltend fünf neue Gesetze nebst Beleuchtung der nach der ersten Folge erschienenen Contrefaçons und Nachentdeckungen. Von Dr. E. Dühring und Ulrich Dühring. Leipzig 1886. Fues. 4 M.

Robert Mayer der Galilei des neunzehnten Jahrhunderts. Eine Einführung in seine Leistungen und Schicksale. Mit seinem Portrait in Stahlstich. Chemnitz 1880. Schmeitzner. 4 M.

Für das mit einem * bezeichnete Buch ist die Verlagshandlung eingegangen, und befinden sich die wenigen restirenden Exemplare bei dem Verfasser, Adresse Zehlendorf bei Berlin, von wo solche gegen vorgängige Einsendung des Betrages zu beziehen sind. — Die mit einem † bezeichneten Bücher sind vergriffen.

Bemerkung zum Schriftenverzeichniss
über die Plagiirung der ersten Folge der neuen Grundgesetze zur Physik und Chemie.

Die im Verzeichniss aufgeführte Schrift „Neue Grundgesetze" etc. (erste Folge) erschien im Mai 1878 und erhielt sofort durch den Buchhandel eine umfassende Verbreitung im Inlande und nach Verhältniss der Sprache auch im Auslande. Ueberdies waren schon vorher Prospecte derselben an zahlreiche Fachgelehrte, sowie an Akademien des In- und Auslandes versendet worden. In diesen Prospecten war insbesondere das von meinem Sohn Ulrich entdeckte und von ihm in der Schrift selbst mit einer vollständigen Theorie und praktischen Anwendungen ausgestattete Siedegesetz wörtlich formulirt. Die einzige Aufmerksamkeit jedoch, welche die Gelehrten dieser Schrift widmeten, bestand darin, dass sie dieselbe recht erfreulich kauften, sich aber, wie des Näheren nachher deutlich werden wird, auch nachträglich deren neuen Inhalt für sich, wie der Volksausdruck lautet, zu kaufen versuchten. Sie schwiegen Jahr und Tag über die Schrift in den Fachjournalen, gaben aber mündlich die Parole aus, es sei in der Schrift nichts Neues enthalten, das darin Enthaltene vielmehr schon überall zu lesen, und ich hätte mich mit dieser Schrift ganz besonders blamirt. Dies war die eine Seite des liebenswürdigen Gelehrtenverhaltens, dessen allgemeine moralische Signatur in früheren berühmten Fällen seit meiner Schrift über Robert Mayer auch dem weiteren Publicum eindringlicher bekannt und durchschaubar geworden ist. Die andere, noch unwürdigere Seite, die das Zubehör hiezu bildete, zeigte sich bald und zwar zuerst in Deutschland, dann aber auch im Auslande. Als Beispiele führe ich nur folgende Fälle an, weil sie sich weniger auf das von mir Herrührende, als vielmehr speciell auf das ebenso einfache als wichtige, darum aber auch handgreiflich verständlichere und zu handgreiflicher Aneignung äusserst bequeme Gesetz meines Sohnes über die correspondirenden Siedetemperaturen beziehen. Ich für mein Theil bin an die edlen Manieren der Gelehrten, an gleichzeitige Verschweigung und Plünderung meiner Schriften durch sie, genugsam gewöhnt und hätte viel zu thun, wenn ich Derartiges im Einzelnen verfolgen wollte.

Zuerst ist ein Theil des Gesetzes der correspondirenden Siedetemperaturen Seitens eines Professors Winkelmann durch Vermittlung eines Mitgliedes der Münchener Akademie, eines Professors von Jolly, als neue und angeblich Herrn Winkelmann gehörige Entdeckung Juni 1879 jener Akademie vorgelegt und in deren Abhandlungen in Gestalt eines Aufsatzes des Herrn Winkelmann veröffentlicht worden. Obenein ist die Aufnahme einer sachgemässen Reclamation, die mein Sohn an Herrn von Jolly eingesendet hat, von diesem Herrn verweigert worden. Schon kühner geworden, hat später Herr Winkelmann in einer Abhandlung der Wiedemannschen „Annalen der Physik" (Jahrgang 1880) sich wesentlich den Hauptinhalt des Gesetzes der correspondirenden Siedetemperaturen unter Umhüllung mit einer unerheblichen Abänderung angeeignet und diese Manipulation dadurch gekrönt, dass er zugleich das Gesetz dem Publicum gegenüber ostensibel als unwahr signalisirte. In diesem Fall gelang es meinem Sohn,

wenigstens einen Artikel zum Schutz seines Gesetzes in die Annalen eingerückt zu erhalten.

Das vollständige Gesetz auch ohne den Schein einer Abänderung ist im Februar 1880 der Pariser Akademie der Wissenschaften als die neue Entdeckung eines Herrn P. de Mondesir durch ein Mitglied dieser Akademie, den bekannten Chemiker H. Sainte-Claire Deville vorgelegt worden, und ist der betreffende Artikel des Herrn de Mondesir auch damals in den „Comptes Rendus“ erschienen. Alsdann wurde das Gesetz meines Sohnes in dem Incognito einer französischen Entdeckung in deutsche Fachzeitschriften übernommen, wogegen er zunächst im „Chemischen Centralblatt“ (December 1880) reclamirte. Dieselbe Reclamation, nur in französischer Sprache, war von ihm dem betreffenden Secretär der französischen Akademie mit dem Ersuchen um Aufnahme in die „Comptes Rendus“ zugesendet worden. Sie fand sich aber nur in wesentlicher Fälschung der Worte und des Sinnes (ebenfalls December 1880) zum Abdruck gebracht, so dass mein Sohn für diese ihm untergeschobene Fassung nicht verantwortlich ist. Später haben sich zu den Genannten auch noch Andere gesellt, welche mit jenen und unter sich nunmehr über die Priorität der Aneignung markten mögen. So haben beispielsweise auch ein holländischer Professor Waals und ein preussischer Professor Clausius, unter verschiedenen aber schlecht verhüllenden Masken und Verzerrungen, in ihrer Manier das Gesetz als ihr eignes reproducirt. Letzterer Herr hat sogar in einer einschlägigen Abhandlung (Annalen der Physik, Bd. XIV, 1881) eine angebliche Zusammenfassung des seiner vorgeblichen Production Vorangegangenen riskirt, nämlich den Daltonschen ursprünglichen Ansatz, sowie eine Kleinigkeit in derselben Richtung von einem gewissen Groshans angeführt, die entscheidende Hauptsache aber, das seit 1878 vorliegende umfassende Gesetz, kühnlich weggelassen. Bezeichnenderweise ist nun jene verzerrte Production des Herrn Clausius frischweg auch schon collegialisch nachtreterisch in Lehrbücher aufgenommen worden, wie z. B. gehorsamst in den Nachtrag des Jaminschen Cursus der Physik (1883), welches Buch auch übrigens in seiner 3. Auflage durchgängig unsolider und unbehilflicher gerathen ist als in seiner ersten Bearbeitung durch den ursprünglichen Verfasser. — Näheres und die Beweisstücke für alles dies findet man in unserer gemeinsamen zweiten Folge der Neuen Grundgesetze von 1886.

Die Thatsachen, aus denen mein Sohn das Gesetz 1877 erkannte, standen seit mehreren Jahrzehnten in Fülle Jedermann zur Verfügung; aber erst als seine Entdeckung veröffentlicht war, sprossten in den darauf folgenden Jahren allerorten die Nachentdeckungen hervor. Er selbst konnte es nicht eher finden, als geschehen; denn er ist erst, als schon die Thatsachen vorhanden waren, geboren und hat dieses Gesetz, welches von grosser physikalischer und chemischer Tragweite ist, in seinem 15. Lebensjahre aufgefunden. Wenn nun, nachdem er die fragliche sehr umfassende Wahrheit, um die sich 70 Jahre früher ein Dalton vergebens bemüht hatte, gesehen, auch andere ältere Leute, die schon Jahrzehnte vorher sie hätten sehen sollen, nun plötzlich sehen lernten, so ist dies wohl verständlich genug.

Es ist aber in derartigen Dingen oft noch mehr Komik, als schon der Rückimport deutscher Originalwaare aus dem Auslande in sich schliesst, wie er auch einst R. Mayer gegenüber prakticirt worden war. Es hat nämlich die

Münchener Akademie in der ganzen Plagiatangelegenheit nicht blos die Palme der Priorität für sich, sondern offenbar auch den Apfel der höchsten Komik abgeschossen. Bei allem moralischen Ernst der Sache hat sie dennoch, wie die Leser der Gruppe meiner mathematisch naturwissenschaftlichen Schriften wissen, schon einmal den Humor rege gemacht. Die Akademie der alten Mönchestadt hatte nämlich einen Dr. G. Berthold mit der Abfassung einer Geschichte der Physik beauftragt und dieser nichts Besseres zu thun gewusst, als sich unbekannterweise an mich zu wenden, um dazu Disposition und Materialien von mir zu bekommen, die ich selbstverständlich nicht verabfolgt habe. So ist der Münchener Akademie das Schicksal erspart worden, auf jene Weise vom Vater zu zehren; indessen der Sohn ist, wie erwähnt, nicht ganz heil davongekommen. Jedoch auch er hat gezeigt, dass er sich nöthigenfalls gegen Anzehrungen zu wehren wisse, und zunächst ist ihm das Schicksal des zu wenig wehrhaften R. Mayer ein zur Warnung leuchtendes Beispiel geworden. Auch bei diesem hatten die Thatsachen, auf Grund deren er seine neue grosse Wahrheit entdeckte, mehrere Jahrzehnte lang aller Welt zur Verfügung gestanden; aber erst als er sie 1842 veröffentlicht hatte, schossen in den nächsten Jahren im In- und Auslande eine ganze Anzahl Nachentdecker auf. Im Fall R. Mayers gesellte sich aber zu den Beraubungen noch ein besonderes Gelehrtenverbrechen, welches schlimmer war als das gegen Galilei verübte und in meiner Schrift über R. Mayer dem Publicum dargelegt worden ist. Diese Schrift hat ausser ihrem persönlichen Gegenstande überhaupt noch die allgemeinere Bedeutung, die tiefe moralische Verderbniss und intellectuelle Verkommenheit der gewerbsmässigen Gelehrtenclasse sichtbar zu machen und zu zeigen, wie diese Classe gegenwärtig eine ähnliche Rolle spielt, wie vor ihr ausschliesslich die Priester. Es ist daher kein Wunder, wenn der mit allen Mitteln betriebene und, wenn verübt, mit allen Mitteln aufrecht erhaltene Ehrendiebstahl und andere verwandte saubere Stückchen in der Gelehrtenclasse mehr grassiren, als in der ungelehrten der gemeine Diebstahl und die sonstigen Gaunerstreiche.

Pierer'sche Hofbuchdruckerei. Stephan Geibel & Co. in Altenburg.

